



# Matematyczno-fizyczny opis procesu ługowania (Proces ługowania kawern solnych cz. II)

*Physical and mathematical description of leaching process.  
(Salt cavern leaching process p. II)*

Kazimierz URBAŃCZYK

ul. Kanadyjska 34, 32-087 Zielonki e-mail: kazeku@poczta.onet.pl

## STRESZCZENIE

Omówiono najważniejsze podejścia do określenia równań składających się na matematyczno-fizyczny opis procesu ługowania. Podstawową rolę odgrywa tu turbulентne mieszanie wywołane zróżnicowaniem gęstości. Niezrozumienie tej roli i brak jej opisu stanowią podstawowe braki dotychczasowych propozycji. Dość dobrym przybliżeniem jest model, w którym stężenie i przepływ przez kawernę zależą jedynie od głębokości i czasu.

**Słowa kluczowe:** proces ługowania, kawerna solna, szybkość ługowania, transport soli w kawernie, model procesu ługowania.

## ABSTRACT

The most important approaches to formulate the equations constituting the physical and mathematical description of the leaching process are discussed. Turbulent mixing caused by density differentiation plays the principal role here. Poor understanding of this role and lack of its description are the fundamental deficiencies of past proposals. Model where brine concentration and flow through the cavern are dependent only on depth and time, is sufficiently good approximation.

**Key words:** leaching process, salt cavern, leaching rate, transport of salt in the cavern, model of leaching process.

## WSTĘP

Niniejszy tekst jest drugim z serii poświęconej procesowi ługowania, ukazującej się na łamach *Przeglądu Solnego*. Za-

mierzeniem autora jest podsumowanie wiedzy na ten temat, zwłaszcza jeśli idzie o opis matematyczno-fizyczny, jego stosowność oraz implementacje w postaci modeli komputerowych.

Część pierwsza (Urbańczyk 2015) omawiająca empiryczne dane o procesie ługowania soli, zakończyła się podsumowaniem, stwierdzającym iż:

- Z badań laboratoryjnych ostatecznie wynika, że szybkość ługowania soli zależy od typu soli, oraz temperatury, kąta nachylenia ługowanej powierzchni i stężenia ługującego roztworu, nie zależy natomiast od wysokości ługowanej powierzchni, zaś przy ługowanej powierzchni panują warunki turbulентne.
- W kawernie ługowanej w bloku solnym można wyróżnić dwie główne strefy: powyżej i poniżej buta rury wodnej. Powyżej następuje turbulентne mieszanie się solanki w całej objętości, stężenie jest niemal jednorodne, poniżej turbulентne mieszanie możliwe jest jedynie horyzontalnie i następuje stratyfikacja solanki.
- Nie dochodzi do ługowania powierzchni prawie poziomych, o nachyleniu mniejszym niż pewien kąt graniczny.
- Efekty molekularne nie grają istotnej roli.

Dotąd, zdaniem autora, w literaturze nie podano pełnego, poprawnego matematyczno-fizycznego opisu procesu ługowania. Najbardziej znane próby to (Кулле 1949, Nolen i in. 1974, Sharma&Pralong 1982, Карагыгин i in 1994), którym można zarzucić niepełne zrozumienie procesu, niezidentyfikowanie dominujących czynników albo źle sformułowane warunki brzegowe.

Opis matematyczno-fizyczny procesu ługowania przestał być problemem akademickim w momencie, gdy możliwości

komputerów pozwoliły na numeryczne modelowanie procesu. Od tego, jakie równania zostaną w komputerowym modelu wykorzystane, zależy w jakim stopniu uzyskane wyniki będą dokładne i wiarygodne oraz czy będą się nadawać do praktycznego wykorzystania przy projektowaniu i wykonywaniu kawern solnych.

### NAJWAŻNIEJSZE ZJAWISKA

Proces ługowania polega na rozpuszczaniu w wodzie niejednorodnego ośrodka (soli kamiennej), zawierającego głównie sole rozpuszczalne ale też i pewien niezbyt wielki procent części nierozpuszczalnych. Części rozpuszczalne przechodzą do roztworu, części nierozpuszczalne są rozmywane, rozdrabniane, częściowo opadają na dno, częściowo tworzą w solance zawieszinę i mogą z nią wydostać się z kawerny na powierzchnię.

Poza NaCl w skale solnej trafiają się, jak była mowa, niewielkie domieszki innych soli, z tej racji, ściśle rzecz biorąc, powstająca solanka stanowi roztwór wieloskładnikowy. W praktyce jednak, gdy udział innych soli jest poniżej procenta, można proces ługowania opisać tak, jakby dotyczył jednoskładnikowej soli.

Na proces ługowania komory solnej składają się niżej wymienione zjawiska fizyczne:

- Przechodzenie soli ze skały solnej do roztworu (rozpuszczanie). W trakcie rozpuszczania następuje przemieszczanie się ociosu w tempie zależnym od jego nachylenia i od stężenia solanki rozpuszczającej ocios.
- Transport soli od ługowanego ociosu do wnętrza komory i w samej komorze. Wywołany jest on przez dyfuzję turbulentną nakładającą się na unoszenie soli przez średni przepływ przez komorę związany z zatłaczaniem wody i poborem solanki.
- Przepływ przez komorę w efekcie zatłaczania i poboru solanki, na który nakładają się zjawiska konwekcji i turbulencji, wywołane zróżnicowanym rozkładem stężenia.
- Rozkruszanie, wymywanie lub obrywanie się nierozpuszczalnych domieszek i wypełnianie przez nie dolnej części komory.

Zjawiska są skomplikowane, co może wydawać się paradoksem, gdy sprawa dotyczy tak codziennego zjawiska, jak rozpuszczanie soli w wodzie. Również podany tutaj opis procesu nie będzie zupełny, będzie zawierał liczne uproszczenia, jednak obejmie najbardziej istotne jego elementy, umożliwiające stworzenie modelu dającego wyniki zgodne z rzeczywistością.

### SZYBKOŚĆ ŁUGOWANIA

Zgodnie z zasadami termodynamiki, szybkość przechodzenia jonów soli z postaci krystalicznej do roztworu, zależy od niedosycenia roztworu, tj. różnicy między stężeniem roztworu, a stężeniem roztworu nasyconego. Dla małych stężeń zależność ma postać:

$$j = K(C_N - C) \quad (1)$$

gdzie:

$j$  – strumień rozpuszczanej masy [ $\text{kg}/\text{m}^2\text{s}$ ]

$C_N$  – stężenie nasycenia [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]

$C$  – stężenie roztworu bezpośrednio przy ługowanej powierzchni [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]

$K$  – współczynnik kinetyki [ $\text{m}/\text{s}$ ]

W miarę rozwoju teorii o budowie kryształów i mechanizmach krystalizacji pojawiły się bardziej złożone formuły.

Burton, Cabrera i Franck biorąc pod uwagę sposób rozmieszczenia dyslokacji w kryształach podają formułę (Benne-  
ma, Gilmer 1973):

$$j = K'(C_N - C)^2 \operatorname{th}\left(\sigma \frac{C_N}{C_N - C}\right) \quad (2)$$

gdzie:

$K'$ ,  $\sigma$  – stałe współczynniki

Można zauważyć, że dla stężeń bliskich zeru formułą (2) jest asymptotycznie kwadratowa względem niedosycenia, tzn.

$$j \cong K' \operatorname{th}\sigma(C_N - C)^2 \quad (2a)$$

Zaś dla stężeń bliskich nasyceniu, formuła jest liniowa:

$$j \cong K' \sigma C_N (C_N - C) \quad (2b)$$

Z kolei wg Machielsa (Olander i in. 1982), gdy uwzględnić występowanie w kryształach obcych jonów, zależność może być opisana formułą:

$$j = K'' \left(\frac{C_N - C}{C_N}\right)^\beta \left(1 - \frac{C_N - C^*}{C_N - C}\right) \quad (3)$$

gdzie:

$j$  – strumień rozpuszczanej masy [ $\text{kg}/\text{m}^2\text{s}$ ]

$C_N$  – stężenie nasycenia [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]

$C$  – stężenie roztworu bezpośrednio przy ługowanej powierzchni [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]

$C^*$  – stężenie progowe, przy którym ustaje już dalsze rozpuszczanie [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]

$\beta$  – wykładnik z przedziału  $\langle 1, 2 \rangle$

$K''$  – współczynnik kinetyki [ $\text{kg}/\text{m}^2\text{s}$ ]

Dla stężeń wyraźnie niższych od  $C^*$ , drugi czynnik w formule (3) można pominąć. Wtedy dla  $\beta=1$  otrzymujemy formułę liniową, zaś dla  $\beta=2$  – kwadratową.

Wg kinetyki chemicznej, szybkość rozpuszczania zależy od stężenia roztworu rozpuszczającego, od własności rozpuszczanej skały, zaś nie powinna zależeć od kąta nachylenia rozpuszczanej powierzchni. Jednak zależność od kąta obserwuje się w laboratorium. Stąd powstała alternatywna teoria,

tw. dyfuzyjna, w myśl której kinetyka jest na tyle szybka, że przy rozpuszczanej powierzchni tworzy się warstwa roztworu nasyconego i szybkość rozpuszczania zależy od szybkości, z jaką jony rozpuszczane przedyfundują przez tę warstwę roztworu nasyconego, nazywaną stąd warstwą dyfuzyjną. Wynikająca stąd formuła na szybkość rozpuszczania, zwana równaniem Nernsta-Brunnera, względnie Noyesa-Whitneya, najczęściej podawana jest ona w postaci typu:

$$j = \frac{D}{\delta}(C_N - C_a) \quad (4)$$

gdzie:

$D$  – stała dyfuzji [ $m^2/s$ ]

$\delta$  – grubość warstwy dyfuzyjnej [m]

$C_a$  – stężenie roztworu poza warstwą dyfuzyjną [ $kg/m^3$ ]

Ściśle rzecz biorąc, aby przez warstwę przyścienną mogła zachodzić dyfuzja, musi w niej być, choćby niewielki, gradient stężenia, czyli formuła (4) jest przybliżeniem formuły

$$j = D \text{ grad } C \quad (4a)$$

Teoria dyfuzyjna, sformułowana przez Nernsta, stała się na długie lata obowiązującym poglądem, mimo, że zgodnie z tą teorią, szybkość rozpuszczania nie powinna zależeć od typu soli, ale być dla wszystkich soli kamiennych jednakowa. W rzeczywistości jednak obserwuje się tę zależność. Również badania szybkości wędrówki inkluzji solankowych w kryształach soli pod wpływem gradientu temperatury (Olander i in 1982) świadczą, że kinetyka rozpuszczania nie jest aż tak szybka, by teoria dyfuzyjna stosowała się ściśle. Większość jednak formuł wyprowadzanych teoretycznie do tej teorii nawiązuje.

Najistotniejszym parametrem we wzorze (4) jest  $\delta$  – grubość warstwy dyfuzyjnej. Zdaniem dawniejszych autorów, warstwa ta musi zawierać się w laminarnej warstwie przyściennej, lub obejmować ją w całości.

Analizując warstwę przyścienną, robiąc szereg przybliżeń i uproszczeń, Kulle wyznaczył  $\delta$ , które podstawione do wzoru (4) dało następujący wynik (Кулле 1949):

$$j = 0,795 \sqrt[4]{\frac{g C_N D^3 (\rho_s - 1) \sin \psi}{\nu \rho_N \rho_s h}} (C_N - C) \quad (5)$$

gdzie:

$g$  – przyspieszenie ziemskie [ $m/d^2$ ] ( $7,32 \cdot 10^{10}$ )

$\rho_s$  – gęstość soli [ $t/m^3$ ]

$\psi$  – kąt nachylenia

$\rho_N$  – gęstość roztworu nasyconego [ $t/m^3$ ]

$\nu$  – lepkość kinematyczna roztworu [ $m^2/d$ ]

$h$  – głębokość od powierzchni izolacji [m]

Należy zwrócić uwagę, że otrzymana przez Kullego grubość warstwy dyfuzyjnej rośnie z głębokością  $h$  od zera,

przez co szybkość rozpuszczania powierzchni jest różna na różnych głębokościach, w górnym rozpuszczanym punkcie bliska nieskończoności. Nie jest to zgodne z doświadczeniem, stąd na miejsce „teoretycznej” formuły (5) Kulle wraz z Korolevem zaproponowali formułę empiryczną (Кулле 1949), wyznaczoną na podstawie badań laboratoryjnych:

$$j = \begin{cases} \left(1 - \frac{C \gamma_N}{C_N \gamma}\right) \left(1 + \frac{t}{22,4}\right) (3,25 \sqrt{\psi} + 1,8) & \psi \in \langle 0, \pi/2 \rangle \\ \left(1 - \frac{C \gamma_N}{C_N \gamma}\right) \left(1 + \frac{t}{22,4}\right) (5,87 - 8,75 \cos \psi) & \psi \in \langle \pi/2, \pi \rangle \end{cases} \quad (6)$$

gdzie:

$j$  – strumień rozpuszczanej masy [ $kg/m^2h$ ]

$C_N$  – stężenie nasycenia [ $kg/m^3$ ]

$C$  – stężenie roztworu [ $kg/m^3$ ]

$g_N$  – ciężar właściwy solanki nasyconej [ $kg/m^3$ ]

$\gamma$  – ciężar właściwy solanki [ $kg/m^3$ ]

Podobne podejście do problemu mieli Durie i Jessen (1964), zakładając paraboliczny profil stężenia w warstwie przyściennej oraz odpowiedni profil prędkości przepływu, zanedbując wpływ stężenia na lepkość i stałą dyfuzji, wyprowadzili następującą formułę:

$$j = 0,0997 \sqrt[4]{\frac{D^3 \sin \psi}{\nu Z}} (C_N - C)^{\frac{5}{4}} \quad (7)$$

gdzie:

$j$  – średni po wysokości strumień rozpuszczanej masy [ $g/cm^2s$ ]

$D$  – stała dyfuzji [ $cm^2/s$ ]

$\nu$  – lepkość kinematyczna roztworu [ $cm^2/s$ ]

$\psi$  – kąt nachylenia

$Z$  – wysokość rozpuszczanej powierzchni [cm]

$C_N, C$  [mol/litr]

Okazało się jednak, że (jak można było oczekiwać) nie zgadza się ona z wynikami badań laboratoryjnych. Durie i Jessen sparametryzowali rozbieżności przy użyciu regresji liniowej, w efekcie czego ostateczna postać ich wzoru jest następująca:

$$j = 0,0997 \left( \frac{D^3 \sin \psi}{\nu Z} \right)^{\frac{1}{4}} (C_N - C)^{\frac{5}{4}} (1,7 + 0,26(C_N - C)) \quad (8)$$

Wadą powyższej formuły jest zależność od wysokości ługowanego ociosu – im wyższy, tym wolniej się ługuje. Nie jest też jasne, czy dla  $D$  i  $\nu$  należy stosować wartości dla czystej wody, czy też brać pod uwagę ich zależność od  $C$ .

W rzeczywistym procesie ługowania kawerny ocios nie jest gładkim monokryształem, ale ma powierzchnię o wyraźnych makro- i mikronierównościach. Zatem grubość warstwy przyściennej jest nierównomierna, a z uwagi na grawitację,

nie będzie ześlizgiwać się gładko po nierównościach ociosu, lecz odrywać się. Gdyby formuła (8) miała być traktowana poważnie, to za  $Z$  należałoby przyjmować nie tyle pełną wysokość ługowanego ociosu, ile średnią, zależną od struktury skały solnej i nachylenia, długość warstwy przyściennej, nim nie ulegnie zerwaniu. Jednak główna przyczyna niestosowności wzoru (8) leży gdzie indziej.

Kłopotliwa zależność od  $Z$  pochodzi z założenia o laminarnym charakterze warstwy przyściennej. Jeśli wprowadzić kryterialne liczby Nusselta, Grashoffa i Schmidta, określone następująco:

$$\begin{aligned} \text{Nu} &= \frac{jZ}{(C_N - C)D} \\ \text{Gr} &= g\beta \frac{(C_N - C)Z^3}{\nu^2} \\ \text{Sc} &= \frac{\nu}{D} \end{aligned}$$

to relacja (7) jest równoważna zależności typu:

$$\text{Nu} = A_{lam} (\text{GrSc})^{\frac{1}{4}} \quad (9)$$

Przy czym w liczbie Grashoffa wyrażającej stosunek sił wyporu do sił lepkości, wypór wywołany jest zależnością gęstości od stężenia, czyli:

$$\beta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial C}$$

Warto tu zwrócić uwagę, jak silny jest wypór wywołany różnicą stężenia. Np. różnica stężeń wynosząca  $5 \text{ kg/m}^3$  powoduje wypór podobny, jak różnica temperatur  $50^\circ\text{C}$ . Cóż dopiero mówić o różnicach rzędu  $200 \text{ kg/m}^3$ !

Jak jednak wiadomo, warstwa przyścienna ma charakter turbulentny, wówczas (przez analogię z innymi zjawiskami, np. cieplnymi) zachodzi relacja:

$$\text{Nu} = A_{turb} (\text{GrSc})^{\frac{1}{3}} \quad (9a)$$

I wtedy otrzymuje się związek:

$$j = A_{turb} \left( \frac{g\beta D^2}{\nu} \right)^{\frac{1}{3}} (C_N - C)^{\frac{4}{3}} \quad (10)$$

w którym kłopotliwej zależności od wysokości ociosu już nie ma.

Ahmed Saberian – kontynuator badań grupy Jessena na Uniwersytecie w Austin ponownie przebadał laboratoryjnie rozpuszczanie prób soli i ustalił ostateczny kształt formuły w postaci skończonego szeregu potęgowego względem  $\rho$  gęstości solanki (Saberian 1984):

$$\omega = k(\psi) k_1 \sum_{i=-1}^4 c_i \rho^i \quad (11)$$

gdzie:

$\omega$  – szybkość ługowania (szybkość przemieszczania się ociosu),

$k_1$  – dodatkowy współczynnik empiryczny, zależny od wykształcenia ługowanej soli,

$\rho$  – lokalna gęstość solanki w pobliżu ługowanego miejsca,

$c_{-1} \dots c_4$  – stałe,

$k(\psi)$  – funkcja opisująca wpływ kąta nachylenia ługowanej powierzchni względem poziomu.

Jeśli  $\omega$  jest w stopach na minutę, zaś  $\rho$  w gramach na centymetr sześcienny, współczynniki Saberiana wynoszą:

$$c_{-1} = 0,76092$$

$$c_0 = -3,87155$$

$$c_1 = 7,82541$$

$$c_2 = -7,82541$$

$$c_3 = 3,87895$$

$$c_4 = -0,75338$$

Russo nieznacznie zmodyfikował parametryzację Saberiana, zastępując gęstość solanki we wzorze (11) przez jej względny ciężar właściwy, tj. stosunek ciężaru właściwego solanki do ciężaru właściwego wody czystej (Russo 1981, 1983).

Z pewnością odejście od parametryzacji poprzez niedosyćcenie nie jest właściwym rozwiązaniem, biorąc pod uwagę, że domieszki innych niż NaCl soli rozpuszczalnych mogą zmieniać relację pomiędzy stężeniem solanki a jej gęstością (czy względnym ciężarem właściwym). W takim przypadku trzeba by nie jeden, ale wszystkie 6 współczynników wyznaczać laboratoryjnie od nowa.

W formułach Durie i Jessena oraz Saberiana brak jawnego wpływu temperatury. Jest on uwikłany w zależnościach stężenia nasycenia, lepkości kinematycznej i stałej dyfuzji od temperatury, jednak nie wystarczą one by opisać wpływ obserwowany empirycznie. Zaś parametryzacja Saberiana nie uwzględnia wpływu temperatury, mimo iż wpływ ten był Saberianowi znany i przebadany przez niego ilościowo (Saberian 1983), o czym będzie w dalszej części.

Odmienne podejście mieli praktycy rumuńscy, którzy do technicznych obliczeń zalecili wzór typu (2a) z jawną zależnością od temperatury (Manualul 1956):

$$\omega = k_i [1 + 0,0167(T - 15^\circ)] (C_N - C)^2 \quad (12)$$

gdzie:

$k_i$  – współczynnik zależny od kąta nachylenia, wyznaczony empirycznie dla dwóch kątów: prostego (nachylenie pionowe) – współczynnik ługowania bocznego oraz półpełnego (nachylenie poziome – strop) – współczynnik ługowania stropowego.

$T$  – temperatura ośrodka rozpuszczającego [ $^\circ\text{C}$ ]

W literaturze rumuńskiej brak informacji o wartościach dla innych kątów.

Badania laboratoryjne szybkości ługowania wykonane w Chemkopie doprowadziły do jeszcze innej zależności (por. Urbańczyk 1990, Kunstman i in. 2004):

$$\omega(C, T, \psi) = k(\psi)(1 + \beta(T - T_0)) \left( \frac{C_N(T) - C}{C_N(T_0)} \right)^\alpha \left( \frac{C_N(T)}{C_N(T_0)} \right)^{2-\alpha} \quad (13)$$

gdzie:

$k(\psi)$  – współczynnik szybkości ługowania zależny od kąta nachylenia ługowanej powierzchni względem poziomu [mm/h],

$T$  – temperatura ośrodka rozpuszczającego [°C],

$T_0$  – temperatura odniesienia [°C],

$\beta$  – współczynnik temperaturowy [1/°C], o wartości zależnej od  $T_0$ ,

$\alpha$  – wykładnik z przedziału <1,2>.

Wzór (13) można uznać za szczególny przypadek formuły Machielsa (3), w którym zależność temperaturową współczynnika kinetyki rozwinęto w szereg zatrzymując z niego dwa wyrazy, przyjęto  $C^* = C_N$ , zaś wyrażenie

$$\left( \frac{1}{C_N(T_0)} \right)^\alpha \left( \frac{C_N(T)}{C_N(T_0)} \right)^{1-\alpha}$$

wyodrębniono z przyczyn wymiarowych.

W oparciu o badania polskie i jugosłowiańskie (Bośnia i Hercegowina) ostatecznie ustalono (Urbańczyk 1990):

$$\alpha = 1,5$$

$$\beta = 0,0262 \text{ przy } T_0 = 20^\circ\text{C}$$

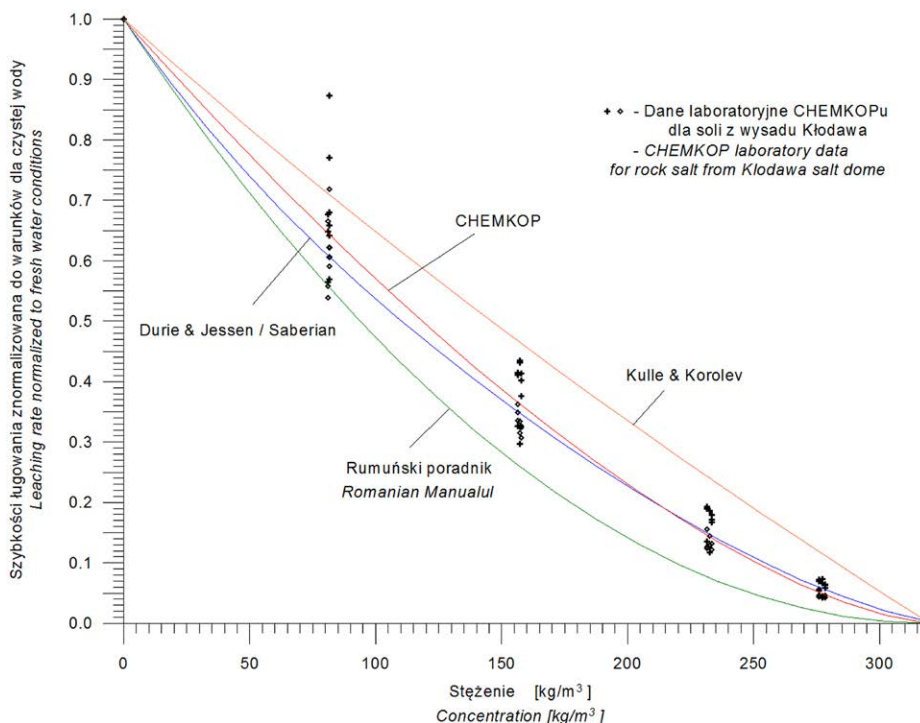
$$\omega = k(\psi) [1 + 0,0262(T - 20^\circ)] \frac{(C_N - C)^{1,5} C_N^{0,5}}{(C_N(20^\circ))^2} \quad (14)$$

Porównanie wpływu stężenia roztworu ługującego według wzorów (6), (11), (12) i (14) przedstawia Ryc. 1. Za jeden przyjęto tu szybkość ługowania w czystej wodzie. Formuły Saberiana (11) i Chemkopu (12) są dość bliskie siebie i mieszczą się w rozrzucie danych empirycznych, wzór (11) daje wartości nieco niższe dla małych stężeń i minimalnie wyższe dla wysokich stężeń. Natomiast formuła rumuńska (12) leży poniżej danych empirycznych a formuła Kullego i Korolewa (6) wyraźnie powyżej.

Wpływ kąta nachylenia ługowanej powierzchni jest podany explicite we wzorze Kullego i Korolewa (6), ma on jednak ostre załamanie dla ściany pionowej, co musi budzić wątpliwości. Saberian z kolei ustalił zależność następującą (Saberian 1984):

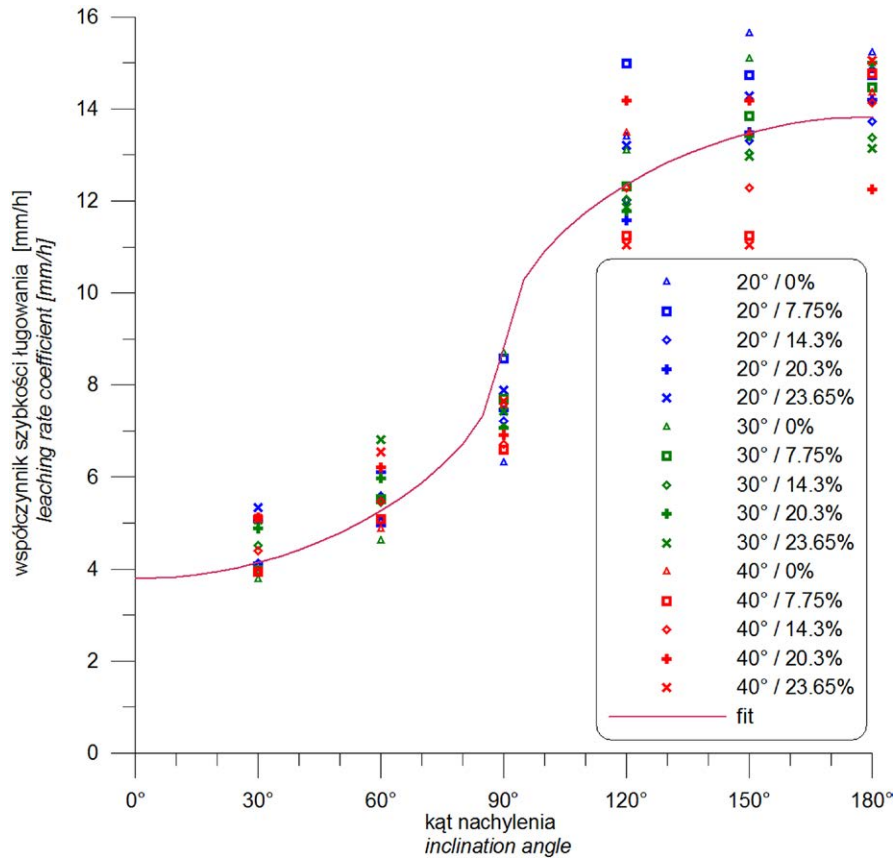
$$k(\psi) = \begin{cases} 1 + 0,22 \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{135^\circ - \psi}{45^\circ}} \right) & \psi > 90^\circ \\ \sqrt{\sin \psi} & \psi \leq 90^\circ \end{cases} \quad (15)$$

Również w Chemkopie badano w laboratorium zależność od kąta nachylenia. Pomiary prowadzono przy różnych stężeniach (Urbańczyk 1990). Wartości współczynnika  $k(\psi)$  dla różnych kątów, temperatur i stężeń procentowych zebrano na Ryc. 2.



Ryc. 1. Zależność szybkości ługowania od stężenia roztworu ługującego

Fig. 1. Leaching rate vs. concentration of leaching medium



Ryc. 2. Zależność współczynnika szybkości ługowania od kąta nachylenia – badania Chemkopu  
 Fig. 2. Leaching rate coefficient vs. inclination angle of the leached surface – test made in Chemkop.

W dopasowywanej formule postanowiono uwzględnić dwa dodatkowe efekty:

- Kąt graniczny ługowania – na powierzchniach o mniejszym nachyleniu osiadają części nierozpuszczalne i blokują ruch solanki, stabilizując nieruchomą warstwę przyścienną o stężeniu nasyconym. Nawet minimalny udział części nierozpuszczalnych jest w stanie zablokować dalsze ługowanie. Natomiast przy większych kątach, części nierozpuszczalne ześlizgują się po ługowanym ociosie i ługowanie odbywa się nadal.
- Osłabienie ługowania dla bardzo wysokich kątów przy niskich ciśnieniach (na niewielkich głębokościach) – pod taką powierzchnią może zbierać się powietrze rozpuszczone w wodzie, jak też pewne gazy z inkluzji gazowych w skale solnej i przez to spowalniać ługowanie.

Dlatego zaproponowano następującą formułę (Urbańczyk 1990):

$$k(\psi) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq \psi \leq \psi_B \\ \left[ k_b - (k_s - k_b) \sqrt{\cos \psi} \right] \left[ 1 - \left( \frac{\text{tg} \psi_B}{\text{tg} \psi} \right)^2 \right] & \text{dla } \psi_B < \psi < \frac{\pi}{2} \\ \left[ k_b + (k_s - k_b) \sqrt{-\cos \psi} \right] & \text{dla } \frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{3\pi}{4} \\ \left[ k_b + (k_s - k_b) \sqrt{-\cos \psi} \right] \left[ 1 - A(1 + \text{tg} \psi)^2 \right] & \text{dla } \frac{3\pi}{4} < \psi \leq \pi \end{cases} \quad (16)$$

gdzie:

$k_b$  – współczynnik ługowania boczego ( $\psi = \pi/2$ )

$k_s$  – współczynnik ługowania stropowego ( $\psi = \pi$ )

$\psi_B$  – graniczny kąt ługowania, dla kątów mniejszych ługowanie ustaje,

$A$  – osłabienie ługowania stropowego przez zbierający się gaz (w przypadku większych głębokości  $A = 0$ ).

Fit na Ryc.2. odpowiada zerowemu kątowi granicznemu i brakowi osłabienia ługowania stropowego oraz współczynnikiem  $k_b = 8,81$  mm/h,  $k_s = 13,84$  mm/h

Powyższa formuła (16) odbiega jakościowo od formuły (15), którą Saberian oparł na swoich danych laboratoryjnych. Niestety, w Chemkopie nie przeprowadzono badań powtórnych, które by potwierdziły, lub zmodyfikowały otrzymane wyniki. Rozbieżności mogą mieć źródło w metodyce badań. Warunki laboratoryjne niekoniecznie muszą odpowiadać warunkom w kawernie, a formuła dobrze opisująca dane laboratoryjne niekoniecznie dobrze opisuje proces in-situ. Próby zastosowania wzoru (16) w modelowaniu komputerowym nie dały oczekiwanych rezultatów. Ostatecznie dla modelowania komputerowego przyjęto w Chemkopie odmienną formułę interpolacyjną (Kunzman, Urbańczyk 1990), mimo iż gorzej pasuje do wyników testów laboratoryjnych:

$$k(\psi) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq \psi \leq \psi_B \\ k_h \frac{\sin^2 \psi - \sin^2 \psi_B}{1 - \sin^2 \psi_B} & \text{dla } \psi_B \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \\ k_h \sin^2 \psi + k_v \cos^2 \psi & \text{dla } \frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \pi \end{cases} \quad (17)$$

Ryc. 3. przedstawia porównanie wzorów (6), (15), (17), opisujących wpływ kąta nachylenia ługowanej powierzchni na szybkość ługowania. Formułę Chemkopu (17) przedstawiono w paru wariantach. Dla kątów powyżej  $\pi/2$  ( $90^\circ$ ) uwzględniono trzy różne stosunki  $k_v/k_h$ : 2,5 – podobny jak wynika z formuły Kullego-Korolewa (12), 2,0 oraz 1,44 jaki wynika ze wzoru Saberiana (15). Dla kątów poniżej  $\pi/2$  – z kątem granicznym  $15^\circ$  oraz z kątem granicznym zero.

Jeśli idzie o wysokie kąty, wzory (15) i (17) są w pewnym stopniu analogiczne. Różnica leży w tym, że wg (17) zmienność jest łagodna. W opisie procesu in-situ ma to znaczenie, gdyż rzeczywiste powierzchnie kawern nie są gładkie, kąt nachylenia ściany nie jest dany precyzyjnie, a lokalnie jest to większy to mniejszy. Jeśli przyjąć jako reprezentatywny średni kąt, współczynnik nie może zmieniać się zbyt gwałtownie. Druga różnica polega na możliwości opisu wzorem różnych stosunków ługowania stropowego do bocznego. Stosunek 1,44 wynikający ze wzoru (15) stanowi raczej jego dolną granicę. Obserwuje się dla różnych złóż stosunki rzędu 2-3. I jeszcze dodatkowo formuła Saberiana nie uwzględnia kąta granicznego. W zastosowaniu do modelowania, wzór

(15) jest skokowo ucięty w kącie granicznym, co też musi budzić wątpliwości.

Pozostaje do omówienia zależność od temperatury. We wzorze (14) częściowo tkwi ona w zależności stężenia nasycenia od temperatury, pozostałość jest przybliżona wyrażeniem liniowym ze współczynnikiem  $\beta = 0,0262$  przy  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ .

W literaturze spotykać można też inne zależności. Saberian (1983) dopasował do danych empirycznych następującą zależność:

$$\frac{\omega(T)}{\omega_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^b \exp\left(a\left(\frac{\rho - \rho_w}{\rho_N - \rho}\right)\left(\frac{T - T_0}{T_0}\right)\right) \quad (18)$$

gdzie:

$a$  – współczynnik empiryczny

$b$  – wykładnik empiryczny

$T$  – temperatura [ $^\circ\text{F}$ ]

$T_0$  – temperatura odniesienia (u Saberiana  $75^\circ\text{F}$ )

$\rho$  – gęstość solanki (najprawdopodobniej w temperaturze odniesienia)

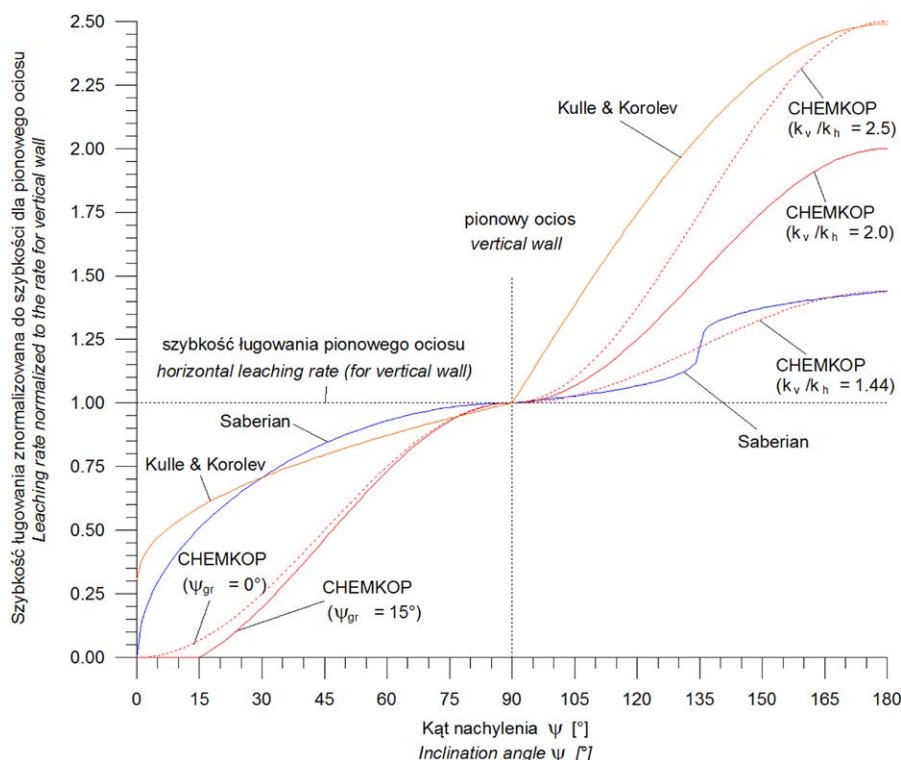
$\rho_N$  – gęstość solanki nasyconej

$\rho_w$  – gęstość wody

$\omega_0$  – szybkość ługowania w temperaturze odniesienia.

Dla gęstości w gramach na centymetr sześcienny i szybkości ługowania w centymetrach na sekundę, przyjmując  $\rho_w = 1$ ;  $\rho_N = 1,2019$ ; Saberian ustalił:  $a = 0,02925$  oraz  $b = 1,3$ .

Nie jest to końca jasne, jak formuła (18) ma się do formuły (11). Zapewne formuła (11) opisuje  $\omega_0$ . Jednak analizowanie



Ryc. 3. Porównanie różnych formuł na zależność współczynnika szybkości ługowania od kąta  
 Fig. 3. Comparison of the formulae for angular dependency of leaching rate coefficient.

zależności temperaturowych przy użyciu gęstości w temperaturze odniesienia jest nieszczęśliwym pomysłem, nie bierze pod uwagę, że stężenie nasycenia zmienia się z temperaturą. W efekcie różnica ( $\rho_N - \rho$ ) w stosunku do różnicy ( $C_N - C$ ) daje dla niskich temperatur wartości zbyt wysokie, dla wysokich – zbyt niskie, co musi kompensować pozostała część formuły i być może przez to się tak ona komplikuje. Nie wiadomo też, jak określić gęstość solanki o stężeniu wyższym, niż stężenie nasycenia w temperaturze referencyjnej. Poza tym wzór (18) daje zerową szybkość dla stężenia 26,325%, niezależnie od temperatury. Przyjęcie, że gęstości solanki nasyconej i wody są niezależne od temperatury, może być zbyt dużym uproszczeniem. Nie wiadomo też, jak ma się gęstość roztworu do jego stężenia. Dane Saberiana należałoby ponownie przeanalizować, stosując inną parametryzację. Ale i tak wpływ temperatury na szybkość ługowania wg (18) jest nieco wyższy niż wg (14).

Do zagadnienia wrócili Charnavel i in (2006a, 2006b). Analizowali łącznie horyzontalne i wertykalne rozpuszczanie prób. Część była z rdzenia wiertniczego, część wycięta z lizawek solnych (salt licks), które zawierały czystą sól kuchenną. Dla prób z lizawek uzyskali mniejszy wpływ temperatury niż u Saberiana i znacznie niższe szybkości ługowania. Analiza wyników była dość trudna, bo rozpuszczano walcowate próbki umieszczane pionowo lub poziomo. Ostatecznie dla rdzenia solnych uzyskali podobny wpływ temperatury, jak u Saberiana, choć wartości szybkości ługowania wyraźnie niższe.

Zależność stwierdzona w Chemkopie, wg wzoru (14) jest pośrednia w stosunku do badań Charnavela i in.

Z kolei problemem wpływu temperatury na szybkość ługowania zajęto się w laboratoriach Sandia (Engvall i in 2013). Rozpuszczano pobocznice walcowatych próbek, w strumieniu wody i solanki o różnych stężeniach, przepływającej w dół. Również i tu uzyskano stosunkowo niskie wyniki, do których dopasowano następującą formułę:

$$\omega = [a_0 T^2 + a_1 S^2 + a_2 TS + a_3 T + a_4 S + a_5] c_r \quad (19)$$

gdzie:

$c_r$  – poprawka na szerskość powierzchni

$S$  – stężenie w procentach nasycenia

$T$  – temperatura [°C]

$\omega$  – szybkość ługowania [cm/s]

$$a_0 = 1,647 \times 10^{-8}$$

$$a_1 = 8,425 \times 10^{-9}$$

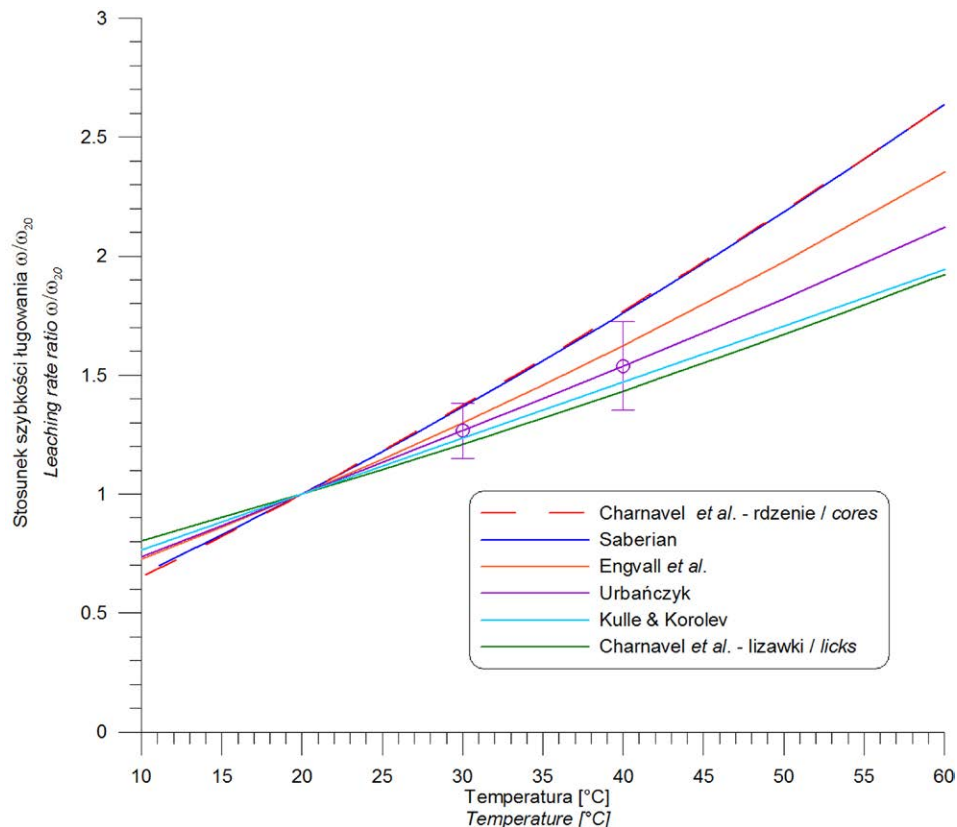
$$a_2 = -4,293 \times 10^{-8}$$

$$a_3 = 3,064 \times 10^{-6}$$

$$a_4 = -1,269 \times 10^{-6}$$

$$a_5 = 6,185 \times 10^{-5}$$

Ten sposób parametryzacji jest jeszcze bardziej fatalny, niż przyjęty przez Saberiana. Jak sami jego autorzy zauważyli, generuje artefakty, a szybkość ługowania nie zeruje się przy stężeniu nasycenia, ale rozmaicie, czasem powyżej, czasem poniżej. Również błędem było rozpuszczanie w strumie-



Rys. 4. Zależność szybkości ługowania od temperatury wg różnych autorów

Fig. 4. Leaching rate vs. temperature according to different authors



niu wody płynącym w dół, nie zaś do góry, wpływ kierunku przepływu był omówiony gdzie indziej (Urbańczyk 2015).

Porównanie wpływu temperatury na szybkość ługowania według omawianych tu badań przedstawiono na Ryc. 4.

Powstaje problem, czy różnice między wynikami spowodowane są różną metodyką badań, jeśli tak, to która zależność odpowiada warunkom *in situ*? A może wpływ temperatury jest zależny od rodzaju soli i dla każdego złoża może być odmienny? Krzywa dla lizawek może nie być reprezentatywna, bo nie była to sól naturalna. Badania w Chemkopie obejmowały temperatury 20, 30 i 40°C, przy sporym rozrzucie wyników nie można wykluczyć, że wpływ uległ zaniżeniu.

Tak więc zachodzi potrzeba dalszych badań. Ważne jednak, by w metodyce przestrzegać następujących zasad:

- ługowaniu powinna podlegać płaska powierzchnia próby, wygładzona,
- pozostała powierzchnia próby powinna być zabezpieczona odpowiednim woskiem (nie zaś oklejona tekturą, płytą, czy zabezpieczona aparaturowo),
- próba powinna być zawieszona w stosunkowo dużym pojemniku, by sól rozpuszczona z próby nie zmieniała stężenia rozpuszczalnika w sposób istotny,
- nie ma większego sensu rozpuszczanie poboczniczy prób walcowych, a jeśli już wykonuje się takie badania przy wymuszonym opływie wody, strumień wody powinien płynąć z dołu w górę.

Omawiając szybkość ługowania, należy, dla porządku, wspomnieć o formule opublikowanej przez Trzaskę (1976,1977), wyrażającej kinetykę rozpuszczania, zdaniem autora odpowiadającą za szybkość ługowania:

$$j = K(C_N - C)Q \quad (20)$$

gdzie:

$Q$  – średnia prędkość przepływu przez kawernę,

Pozostałe oznaczenia jak w (1).

Autor nie podał skąd i na jakiej podstawie przyjął taką zależność, dlaczego kinetyka rozpuszczania miałyby być proporcjonalna do prędkości przepływu, tem bardziej, że średnia prędkość przepływu jest wielkością globalną, nie lokalną i jako taka nie wiąże się z warunkami w pobliżu ługowanej powierzchni. Badania laboratoryjne przeczą takiej zależności. W dodatku, gdy brak przepływu, sól, w myśl powyższego wzoru, w ogóle nie powinna się rozpuszczać.

#### PODSUMOWANIE

Ani teoria kinetyczna, ani teoria dyfuzyjna nie są tu bezpośrednio stosowalne. Na szybkość ługowania ma wpływ zarówno kinetyka rozpuszczania jak i dyfuzja przez turbulentną warstwę graniczną. Obserwuje się bowiem zarówno zależność

od kąta nachylenia ługowanej powierzchni jak i od typu soli. Nie ma do tej pory, uzgodnionej między różnymi grupami badaczy, opinii, co do kształtu formuły opisującej szybkość ługowania. Najmniej wątpliwości budzi zależność od stężenia, zależność od kąta i od temperatury wymaga dalszych badań. Stosowane metodyki badań oraz ich analizy pozostawiają wiele do życzenia, należy je sensownie ujednoczyć.

#### TRANSPORT ROZPUSZCZONEJ SOLI W KAWERNIE

Aby mogło zachodzić rozpuszczanie, roztwór rozpuszczający musi mieć stężenie niższe od nasycenia, więc rozpuszczona sól musi być usuwana z pobliża rozpuszczanej powierzchni. Są dwa główne mechanizmy transportu soli w kawernie: unoszenie z przepływem wody oraz dyfuzja turbulentna.

Podstawowe prawo opisujące transport soli rozpuszczonej to równanie zachowania masy soli, na które składają się następujące elementy:

- Zmiana ilości soli w solance znajdującej się w rozpatrywanej objętości,
- Strumień soli unoszonej z solanką przepływającą przez powierzchnię zamkniętą stanowiącą brzeg rozpatrywanej objętości
- Strumień soli przechodzącej w wyniku turbulentnego mieszania przez powierzchnię zamkniętą stanowiącą brzeg rozpatrywanej objętości
- Dopływ i odpływ soli z zewnątrz przez rury ługownicze (o ile otwory rur znajdują się wewnątrz rozpatrywanej objętości)
- Dojście soli wylugowanej z ociosu solnego (o ile ocios znajduje się wewnątrz rozpatrywanej objętości)

Prawo to w postaci globalnej, która jest najogólniejsza, wygląda następująco:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V C dV = - \int_{\Gamma} (C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{\Gamma} (D_T \nabla C \cdot \mathbf{n}) dS + \int_V (q_w C_w) dV + \int_A (p_s \rho_s \omega) dA \quad (21)$$

gdzie:

$A$  – fragment powierzchni  $\Gamma$  będący powierzchnią graniczną kawerny ze skałą solną [ $m^2$ ] (może być zerowy, jeśli cała objętość  $V$  zawarta jest wewnątrz kawerny)

$C$  – stężenie solanki [ $kg/m^3$ ]

$C_w$  – stężenie źródeł zewnętrznych (zatłaczanej wody i odbieranej solanki) [ $kg/m^3$ ]

$D_T$  – współczynnik dyfuzji turbulentnej [ $m^2/s$ ]

$\mathbf{n}$  – wektor normalny do powierzchni  $\Gamma$  skierowany na zewnątrz

$p_s$  – zawartość soli rozpuszczalnej w skałe solnej

$q_w$  – wydajność źródeł zewnętrznych na jednostkę objętości [ $1/s$ ]

$t$  – czas [ $s$ ]

$\mathbf{v}$  – lokalna średnia prędkość przepływu przez solankę [ $m/s$ ]

$V$  – rozpatrywana objętość [m<sup>3</sup>] (należy zwrócić uwagę, że może ona być zmienna w czasie, jeśli obejmuje rozpuszczony ocios komory)

$\Gamma$  – zamknięta powierzchnia brzegowa objętości  $V$  [m<sup>2</sup>]

$\rho_{sl}$  – gęstość skały solnej [kg/m<sup>3</sup>]

$\omega$  – szybkość ługowania [m/s]

$$\int_{q_w} q_w dV = Q_{WE}$$

(wydajność zatłaczania wody), jeżeli wylot rury wodnej znajduje się wewnątrz objętości  $V$ , inaczej jest zerowa

$$\int_{q_w} q_w dV = -Q_{WY}$$

(wydajność odbioru solanki), jeżeli wylot rury solankowej znajduje się wewnątrz objętości  $V$ , inaczej jest zerowa.

Biorąc pod uwagę podobieństwo między mini-kawernami ługowanymi w laboratorium w bloku solnym i kawernami przemysłowymi, zjawiska związane z dyfuzją molekularną można pominąć. Należy zwrócić uwagę, że  $D_T$  nie jest tu stałą, ale funkcją czasu i współrzędnych przestrzennych, zależną od tego, jak rozwija się turbulencja. W ogólnym przypadku może być nie pojedynczą funkcją ale dwuwskaznikowym tensorem.

Aby rozwiązać równanie (21) konieczne jest dodanie dodatkowych równań określających pole średniej prędkości przepływu oraz pole funkcji dyfuzji turbulentnej.

Zwykle w literaturze równanie (21) podawane jest w postaci lokalnej (różniczkowej), w formalizmie Eulera:

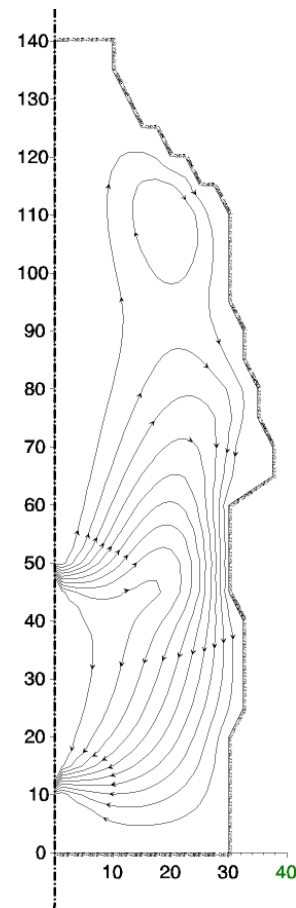
$$\frac{\partial}{\partial t} C + \nabla C \cdot \mathbf{v} = \nabla D_T \cdot \nabla C + (q_w C_w) \quad (22)$$

W równaniu tym pominięto dopływ soli z wyługowanej powierzchni, gdyż trzeba pamiętać, że przejście w równaniu (21) z pochodną po czasie pod całkę, jest możliwe jedynie poza otoczeniem ługowanego brzegu.

Zastanawiające, że w literaturze problemu, prawie nie się nie mówi na temat dyfuzji turbulentnej, o ile w ogóle się o wspomina. Świadczy to, jak powszechny był (a w pewnym stopniu jest i do dzisiaj) brak zrozumienia procesu, nawet wśród specjalistów, jak Kulle, Nolen, Sharma czy Kublanov. (Nolen i in.1974) ogranicza strefę turbulencji do sąsiedztwa wylotów rur ługowniczych, (Sharma & Pralong 1982) dodatkowo uwzględnia ją w warstwie przyściennej, (Карагылин i in 1994) jedynie o niej wspominają, ale nie wprowadzają explicite do równań.

Analizując równanie (21) lub (22), należy podkreślić, że przy stabilnym przepływie, z zaniedbywalną dyfuzją, stężenie w kawernie, poza warstwą przyścinną byłoby praktycznie zerowe, z uwagi na brak mechanizmu transportu soli w poprzek linii prądu. Jest to oczywiste, jeśli rzucić okiem na Ryc. 5.

Jest to wynik jednego z eksperymentów numerycznych, jakie autor przeprowadzał wspólnie z A. Kunstmanem.



**Ryc. 5.** Linie prądu w kawernie przy osłabionej grawitacji, bez silnej dyfuzji, stężenie wewnątrz kawerny jest zerowe.

**Fig. 5.** Streamlines inside the cavern with weakened gravitation without strong diffusion concentration inside the cavern is nearly zero.

Przy zmniejszeniu grawitacji, tak by przepływ w kawernie był laminarny, stężenie wewnątrz kawerny spadło do 10<sup>-8</sup> kg/m<sup>3</sup>. Należy w związku z tym podejrzewać, że rozkłady stężenia w kawernie w niektórych publikacjach np. (Hieblinger & Kleinitz 1978), (Kretzschmar & Heidenreich 1978) są efektem dyfuzji numerycznej i ew. niezbilansowanego schematu aproksymacyjnego we współrzędnych cylindrycznych i nie mają nic wspólnego z rzeczywistym rozkładem stężenia w kawernie. Takie rozkłady wydają się nieprawdopodobne również w świetle pomiarów gęstości i temperatury solanki w kawernie, o czym była mowa w poprzednim artykule (Urbańczyk 2015).

Z powyższego wynika jedno: za fakt, iż wewnątrz komory nie ma stężenia zero, odpowiada dyfuzja, i to dyfuzja turbulentna, gdyż dyfuzja molekularna jest zbyt słaba. Dyfuzja turbulentna jest zatem głównym mechanizmem rządzącym rozkładem stężenia wewnątrz kawerny, a więc pośrednio i procesem ługowania, natomiast pole prędkości przepływu ma znaczenie drugorzędne.

Skalę dyfuzji turbulentnej, można oszacować przechodząc do równania (22) w postaci bezwymiarowej:

$$\frac{1}{St} \frac{\partial}{\partial t^*} C^* + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* C^* = \frac{1}{Pe} \nabla^* \cdot \nabla^* C^* + \frac{1}{St} q_w^* C^* \quad (23)$$

gdzie:

gwiazdka \* oznacza wielkość bezwymiarową

$C$  – stężenie

$\mathbf{v}$  – średnia prędkość przepływu

$$St = \frac{v_0 t_0}{l_0} \quad \text{liczba Strouhala (Thomsona)}$$

$$Pe = \frac{v_0 l_0}{D_T} \quad \text{turbulentna masowa liczba Pecleta}$$

$t_0$  – charakterystyczny czas

$l_0$  – charakterystyczna długość

$v_0$  – charakterystyczna prędkość

$D_T$  – „stała” dyfuzji turbulentnej [m<sup>2</sup>/s]

Dla przykładowego oszacowania liczb kryterialnych posłuży przypadek kawerny o promieniu 20 m, do której woda jest tłoczona z wydajnością 100 m<sup>3</sup>/h. Za czas charakterystyczny można przyjąć czas, w którym promień kawerny zwiększy się o metr. Gdyby w kawernie była czysta woda, byłoby to ok. 100 godzin, ponieważ w kawernie będzie stężenie rzędu 200 kg/m<sup>3</sup>, czas ten wydłuży się ok. 5-krotnie. Tak więc:

$$t_0 = 500 \text{ godz} = 1,8 \cdot 10^6 \text{ s}$$

$$l_0 = 20 \text{ m}$$

$$v_0 = Q / (\pi l_0^2) = 2,21 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

$$St = 1,99$$

Zakładając warunki, dla których stężenie i jego pochodne są podobnego rzędu (np. przy obiegu prawym), powinno być również  $Pe \approx 1$ . Wtedy:

$$D_T \approx 4,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$$

Oszacowanie to nie bierze pod uwagę wielkości gradientu stężenia. Ten gradient, jak się okaże w następnym rozdziale jest głównym źródłem generującym turbulencje. Zależnie od kierunku tego gradientu, turbulencje mogą być znacznie większe od powyższego oszacowania, lub mogą w ogóle nie występować. Ponieważ turbulencje wiążą się z polem przepływu przez kawernę, problem ten będzie poruszony jeszcze w następnym rozdziale.

Warunkiem brzegowym dla równania transportu jest dopływ soli rozpuszczonej na przemieszczającym się ociosie. Szybkość przemieszczania się ociosu jest dana przez szybkość ługowania omówioną poprzednio, zaś dopływ soli wynika z udziału soli rozpuszczalnej w skale solnej (halicie) w obrębie przemieszczenia. Części nierozpuszczalne zawarte

w skale solnej wykruszają się i opadają na dno kawerny, ale to zjawisko nie wpływa bezpośrednio na rozkład stężenia w kawernie, a jedynie pośrednio, poprzez wpływ na pole przepływu w kawernie.

## PODSUMOWANIE

Dominującym czynnikiem w transporcie soli od ociosu do wnętrza kawerny jest dyfuzja turbulentna. Turbulencje wiążą się z polem przepływu wewnątrz kawerny.

Bez turbulentnego mieszania, stężenie solanki w większej części kawerny byłoby bliskie zeru.

### Pole przepływu wewnątrz kawerny

Pole przepływu w kawernie jest opisane równaniem zachowania pędu, które w postaci globalnej ogólnie ma postać:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{v} dV + \oint_{\Gamma} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho \mathbf{G} dV + \oint_{\Gamma} \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \mathbf{a}_w dV \quad (24)$$

gdzie:

$\mathbf{a}_w$  – wydajność źródeł pędu z zewnątrz [kg/m<sup>2</sup>s<sup>2</sup>] (związana z tłoczeniem wody i odbiorem solanki)

$\mathbf{G}$  – pole grawitacyjne [m/s<sup>2</sup>]

$p$  – ciśnienie w kawernie [Pa]

$\mathbf{v}$  – lokalna średnia prędkość przepływu solanki [m/s]

$\mathbf{\Pi}$  – tensor naprężeń [Pa]

$\rho$  – lokalna średnia gęstość solanki [kg/m<sup>3</sup>]

$$\int_V \mathbf{a}_w dV = \rho_{WE} v_{WE} Q_{WE}$$

(wydajność dopływu pędu wody), jeżeli wylot rury wodnej znajduje się wewnątrz objętości  $V$

$$\int_V \mathbf{a}_w dV = -\rho_{WY} v_{WY} Q_{WY}$$

(wydajność odpływu pędu solanki), jeżeli wylot rury solankowej znajduje się wewnątrz objętości  $V$

Biorąc pod uwagę podobieństwo między mini-kawernami ługowanymi w laboratorium w bloku solnym i kawernami przemysłowymi, naprężenia wywołane lepkością molekularną można pominąć.

Tensor naprężeń można rozłożyć na ciśnienie i naprężenia styczne (lepkie):

$$\mathbf{\Pi} = -p\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda} \quad (25)$$

Tensor naprężeń stycznych  $\mathbf{\Lambda}$  jest określony w przyjętym formalizmie z dokładnością do stałej addytywnej, jako:

$$\mathbf{\Lambda} = \overline{\mathbf{v}'' \rho \mathbf{v}''} \quad (26)$$

gdzie:

$\mathbf{v}''$  – fluktuacyjna składowa prędkości [m/s]

zaś całe wyrażenie po prawej stronie jest uśrednione.

Naprężenia styczne w przepływie turbulentnym opisane są osobnymi równaniami, zależnymi od przyjętego modelu

turbulencji. Jeśli przyjąć hipotezę gradientową Boussinesque'a, można je wyrazić poprzez pochodne średniej prędkości analogicznie, jak dla przepływu laminarnego:

$$\Lambda = \mu_T \left( \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{I} \right) \quad (27)$$

gdzie:

$\mathbf{I}$  – tensor jednostkowy

$p$  – ciśnienie [Pa]

$\Lambda$  – tensor naprężeń lepkich [Pa]

$\mu_T$  – lepkość dynamiczna turbulentna [Pa s]

Równanie (24) w postaci lokalnej w formalizmie Eulera ma postać:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{v} (\rho \mathbf{v}) = -\rho g \mathbf{i}_z - \nabla p + \nabla \cdot \mu_T \left( \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{I} \right) + \mathbf{a}_w \quad (28)$$

gdzie:

$g$  – przyspieszenie ziemskie [m/s<sup>2</sup>]

$\mathbf{i}$  – wersor osi  $z$  (skierowany w górę)

Równanie powyższe jest czasem nazywane równaniem Reynoldsa i jest ono odpowiednikiem równania Naviera-Stokesa, od którego się różni tym, że dotyczy średnich wielkości przepływu turbulentnego. Częstą procedurą jest tu wyłączenie gęstości  $\rho$  poza równanie. W przypadku cieczy niejednorodnej z kontrakcją takie uproszczenie nie jest jednak dopuszczalne.

Równanie przepływu jest wektorowe, opisuje prędkość przepływu. Występuje w nim dodatkowo gęstość i ciśnienie. Gęstość jest powiązana ze stężeniem, więc nie jest dodatkową funkcją niewiadomą, natomiast pojawienie się ciśnienia wymaga dodatkowego równania.

Klasyczna hydrodynamika dołącza z tego powodu, do równań przepływu, równanie ciągłości, w postaci:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_{\Gamma} (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (29)$$

lub

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (30)$$

Dla cieczy nieściśliwej można też wykorzystać zależność:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (31)$$

Jednakże w przypadku kawerny ługowniczej, żadne z powyższych równań nie jest słuszne. Bowiem podobnie, jak stężenie zmienia się skutkiem dyfuzji, tak również zmienia się gęstość solanki, a jak wiadomo, dyfuzja turbulentna gra tu rolę dominującą, zaś dodatkowo rozpuszczaniu się soli, jak też mieszanii solanki o różnym stężeniu towarzyszy kontrakcja.

Jeśli pominąć otoczenie brzegu oraz miejsc dopływu wody i odpływu solanki, można napisać:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_{\Gamma} (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \oint_{\Gamma} \left( D_T \frac{d\rho}{dC} \nabla C \cdot \mathbf{n} \right) dS \quad (32)$$

lecz jak była mowa, równanie to nie może być wykorzystane, jako równanie niezależne, bo jest powiązane z równaniem transportu soli relacją gęstość–stężenie. Zaś wykorzystanie tego równania w postaci (29) lub (30) oznacza użycie układu równań wzajemnie sprzecznych, a taki układ może w efekcie dać rozwiązania bardzo różne, zależnie do sposobu wyliczania.

Dopuszczalne jest natomiast użycie równania

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = c + o \quad (33)$$

gdzie:

$c$  – lokalna kontrakcja na jednostkę czasu [1/s]

$o$  – bilans udziału części nierozpuszczalnych, które opadają na dno kawerny [1/s]

Gdyby przyjąć upraszczające założenie, że całość kontrakcji aż do stężenia wypływającej solanki następuje w momencie rozpuszczenia, a części nierozpuszczalne opadają „natychmiast” na dno kawerny, dopiero wówczas można, poza otoczeniem brzegu kawerny, stosować (31). Zapewne błąd związany z tym przybliżeniem będzie mniejszy, niż pominięcie dyfuzji turbulentnej w (29) lub (30).

Formułując warunek brzegowy, trzeba pamiętać o kontrakcji towarzyszącej rozpuszczaniu się soli i o częściach nierozpuszczalnych, które zajmują pewną objętość, a w efekcie ługowania opadają na dno kawerny. Tak więc na brzegu ługowanym zachodzi:

$$\mathbf{v}_n = \omega (1 - p_n) \left( \frac{\rho_{sr}}{\rho_{zl}} - 1 \right) \quad (34)$$

gdzie:

$p_n$  – udział części nierozpuszczalnych w skale solnej

$\rho_{sr}$  – pozorna gęstość soli po jej rozpuszczeniu (po kontrakcji)

$\rho_{zl}$  – gęstość soli kamiennej (halitu)

Jeśli zaniedbać kontrakcję, otrzymuje się  $\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ .

Wg Kublanova (Каратыгин i in 1994) warunkiem brzegowym jest żądanie, by składowa normalna prędkości przepływu na brzegu była równa szybkości, z jaką przesuwa się ocios, czyli by zachodziło  $\mathbf{v}_n = \omega$ . Jest to warunek fałszywy, nie zachodzący w żadnej sytuacji, gdyż rozpuszczanie nie oznacza dematerializacji. Już lepszym założeniem jest, że składowa normalna prędkości na ruchomym brzegu jest zerowa ( $\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ ), pod warunkiem, że we właściwy sposób uwzględni się ruchomość powierzchni.

Można, jeśli ktoś by tak chciał, przyjąć, że prędkość  $\mathbf{v}$  nie jest średnią prędkością przepływu solanki, ale parcjalaną prędkością przepływu wody, wtedy obowiązuje (29) i (30), by może też i (31), ale dyskusyjny staje się sens wyrazów adwekcyjnych, i zupełnie nie wiadomo, jak sformułować warunek brzegowy. W każdym razie warunek brzegowy  $\mathbf{v}_n = \omega$  także i wtedy nie jest słuszny, bo wyługowanej soli nie zastępuje czysta woda.

Z kolei na dnie kawerny, gdzie deponują się nierozpuszczone części skały solnej, mamy sytuację odwrotną, brzeg kawerny przemieszcza się w górę, do jej wnętrza, z uwagi na porowatość zasypu, część solanki pozostaje w nim, a zasyp ma większą objętość niż objętość opadłych części nierozpuszczalnych netto.

Zachodzi:

$$w_r p_n \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_1} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_2} dV \quad (35)$$

gdzie:

$n$  – porowatość zasypu

$V_1$  – objętość zawierająca ocios podlegający ługowaniu

$V_2$  – objętość zawierająca dno kawerny na którym zachodzi depozycja

$w_r$  – współczynnik rozluźnienia części nierozpuszczalnych przy depozycji ( $w_r = \frac{1}{1+n}$ )

$$w_r = \frac{1}{1+n}$$

Szczegółowy warunek brzegowy na dnie zależy od jego rozmiarów, kształtu oraz założeń, jakie uczyni się o rozkładzie depozycji na dnie (np. równomiernie, lub bezpośrednio pod ługowanym ociosem z osypywaniem się pod określonym kątem, lub z jakimś rozproszeniem).

Najistotniejszym jednak zagadnieniem jest kwestia lepkości turbulentnej. W najogólniejszym przypadku jest ona dwuwskaznikowym tensorem. Przyjmuje się, że turbulentna liczba Schmidta (Prandtla) wynosi ok. 0,7, a więc określenie lepkości turbulentnej zarazem określa dyfuzję turbulentną i odwrotnie.

Znane są modele turbulencji, np. model k-ε, czy model małych liczb Reynoldsa, wątpliwa jest jednak ich stosowność dla turbulencji generowanych grawitacyjnie. Istnieją również skomplikowane teorie, w których turbulencja opisana jest poprzez tzw. domknięcia rzędu drugiego, tj. układ dodatkowych równań na pulsacyjne (fluktuacyjne) składowe prędkości i gęstości (lub stężenia), równanie na średnią energię kinetyczną ruchu turbulentnego i jej transportu, równanie rozpraszania ciepła, w skrajnym przypadku opis zagadnienia staje się układem 15 równań różniczkowych cząstkowych, nadal jednak potrzebne są dodatkowe założenia empiryczne o poszukiwanych funkcjach. Wydaje się, że dla problemu kawerny ługowniczej jest to komplikowanie zagadnienia, za które nie otrzymuje się nic w zamian. Jak dotąd, ta droga prowadzi do nikąd.

Aby oszacować skalę turbulencji, należy, podobnie jak dla równania transportu, przejść do bezwymiarowej postaci równania przepływu (28). Jest ona następująca:

$$\frac{1}{St} \frac{\partial}{\partial t} \rho^* \mathbf{v}^* + \nabla^* \cdot \mathbf{v}^* (\rho^* \mathbf{v}^*) = -Eu \nabla^* p^* - \frac{1}{Fr} \rho^* \mathbf{i}_z + \frac{1}{Re} \nabla^* \cdot \Lambda^* \quad (36)$$

gdzie:

gwiazdka \* oznacza wielkość bezwymiarową

$p$  – ciśnienie w kawernie

$t$  – czas

$\mathbf{v}$  – średnia prędkość przepływu

$\rho$  – gęstość solanki w kawernie

$\Lambda$  – tensor turbulentnych naprężeń stycznych

$$St = \frac{v_0 t_0}{l_0} \text{ liczba Strouhala (Thomsona)}$$

$$Eu = \frac{p_0}{\rho_0 v_0^2} \text{ liczba Eulera}$$

$$Fr = \frac{v_0^2}{l_0 g} \text{ liczba Frouda}$$

$$Re = \frac{v_0 l_0}{\nu_T} \text{ turbulentna liczba Reynoldsa}$$

$g$  – przyspieszenie ziemskie

$l_0$  – charakterystyczna długość

$p_0$  – charakterystyczne ciśnienie

$t_0$  – charakterystyczny czas

$v_0$  – charakterystyczna prędkość

$\nu_T$  – lepkość turbulentna [m<sup>2</sup>/s]

$\rho_0$  – charakterystyczna gęstość

Dla oszacowania liczb kryterialnych podobnie, jak w poprzednim rozdziale, posłuży przypadek kawerny o promieniu 20 m, do której woda jest tłoczona z wydajnością Q=100 m<sup>3</sup>/h. Tak więc:

$$t_0 = 500 \text{ godz} = 1,8 \cdot 10^6 \text{ s}$$

$$l_0 = 20 \text{ m}$$

$$v_0 = Q / (\pi l_0^2) = 2,21 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

$\rho = 1200 \text{ kg/m}^3$  (gęstość solanki), gdyby brać zakres zróżnicowania, mamy  $200 \text{ kg/m}^3$

$$g = 9,81 \text{ m/sek}^2 \text{ (grawitacja ziemska)}$$

$$p_0 = 11,8 \text{ MPa (dla 1000 m głębokości)}$$

Otrzymujemy:

$$St = 1,99$$

$$Eu = 2 \cdot 10^{13}$$

$$Fr = 2,5 \cdot 10^{-12}$$

Jaskrawo widać dysproporcję pomiędzy liczbami Frouda i Eulera a pozostałą częścią równania. Nie ma fizycznie takiej możliwości, by pochodne prędkości mogły być rzędu 10<sup>9</sup> 1/s. Wymagało by to pojawienia się w kawernie prędkości ponadświatlnych. Tak więc po lewej stronie równania (25) brak wyrazów mogących zrównoważyć siłę grawitacji. Gdyby podobnie, jak dla równania transportu, przyjął, że pochodne wielkości bezwymiarowych są tego samego rzędu, to liczba Reynoldsa powinna być rzędu 10<sup>-12</sup>, a lepkość turbulentna rzędu 10<sup>8</sup> m<sup>2</sup>/s! Warto zauważyć, że jeśli turbulencja zachodzi zgodnie z klasycznymi teoriami i  $Sc_T = 0,7$ , to i dyfuzja turbulentna będzie parę rzędów wielkości wyższa, niż wynikało to z oszacowań poprzedniego rozdziału.

Powyższe rozważania są skrajnie uproszczone, mają jedynie na celu zilustrować skalę problemu. Można spotkać bardziej rozwinięte analizy rozdzielające gęstość na część stałą i zmienną, następnie wprowadzając funkcję naporu hydraulicznego modyfikują nieco równania. Prowadzi to do pojawienia się „gęstościowej” liczby Frouda.

$$F_{rp} = \frac{v_0^2 \rho_0}{l_0 g \Delta \rho}$$

Liczba ta jest jednak tylko o rząd wielkości niższa od „zwykłej” liczby Frouda, chyba że różnice gęstości są bardzo małe.

Biorąc pod uwagę wielkości liczb kryterialnych, można powiedzieć, że równanie przepływu w istocie zdominowane jest przez równanie hydrostatyki, innymi słowy, równanie (30) można zapisać w postaci:

$$-\rho g \mathbf{i}_z - \nabla p + \nabla \cdot \Lambda \approx 0 \quad (28a)$$

Jeśli styczne naprężenia związane z turbulencją nie są dostatecznie duże, to poziome gradienty ciśnienia muszą być bardzo małe, a zatem i gradienty gęstości i stężenia. Jeśli gradient stężenia jest skierowany pionowo w dół, zachodzi przypadek równowagi trwałej. Dla gradientu gęstości skierowanego inaczej, brak jest równowagi. Siły grawitacji przeciwstawiają się zróżnicowaniu gęstości i poprzez turbulencję doprowadzą do wymieszania się solanki i likwidacji poziomej składowej gradientu gęstości. Czysto teoretycznie,

gradient gęstości mógłby być skierowany idealnie pionowo w górę. Jest to przypadek równowagi chwiejnej. Ponieważ w kawernie dopływ soli następuje od ociosu, taka równowaga nie może się pojawić.

Mogą w kawernie pojawić się strefy, gdzie proces przebiega inaczej. Niektórzy autorzy obliczają gęstościową liczbę Frouda biorąc prędkość na wylocie rury wodnej. Tak samo dla małych promieni kawerny – np. dla promienia 1 m liczba Frouda będzie już tylko rzędu  $10^{-6}$ . W praktyce jednak oznacza to jedynie, że w wąskiej kawernie czy w pobliżu wylotu rury wodnej, turbulентne mieszanie się solanki przebiega słabiej, niż w dalszych rejonach kawerny szerokiej.

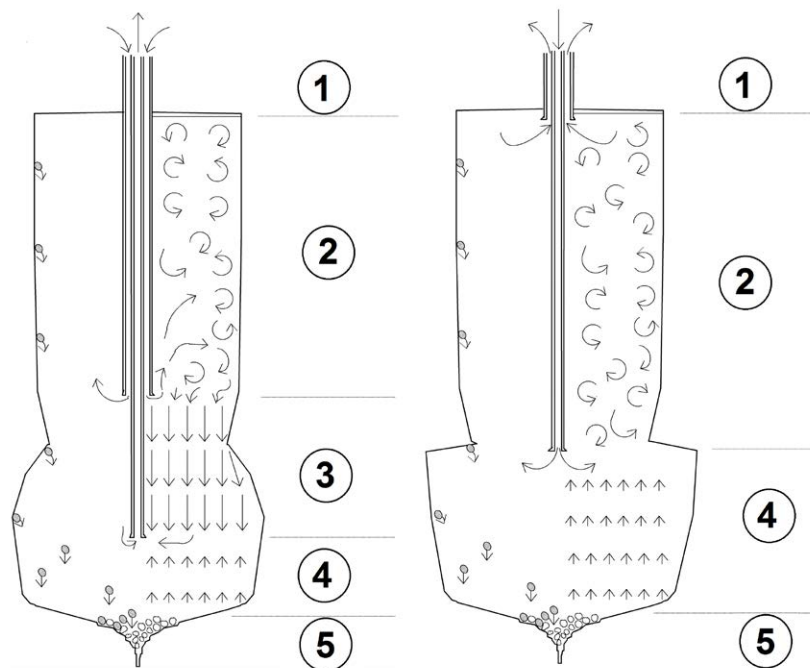
W literaturze można spotkać różne próby uproszczonego opisu pola przepływu w kawernie. Nolen (Nolen i in. 1974, Meister i in. 1978) potraktował wnętrze kawerny jako ośrodek porowaty i tego typu opis użył do modelu. Jest to równoważne rozwinięciu dywergencji naprężeń stycznych w szereg potęgowy względem prędkości przepływu i zatrzymanie jedynie wyrazu liniowego z tego rozwinięcia. Jednak dopuszczalne jest to jedynie w przypadku, gdy prędkości są bardzo małe. Odpowiednie równanie jest następujące:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} = -\rho g \mathbf{i}_z - \nabla p + \frac{\mu}{\kappa} \mathbf{v} \quad (37)$$

gdzie:

$\mu$  – lepkość dynamiczna molekularna [Pa s]

$\kappa$  – współczynnik o wymiarze przepuszczalności [ $\text{m}^2$ ]



**Ryc. 6. Warunki panujące** w komorze ługowanej w obiegu lewym, techniką „zblizonych butów rur” (po lewej) i w obiegu prawym (po prawej). ① – strefa izolowana; ② – strefa turbulentnego mieszania, intensywne ługowanie; ③ – strefa grawitacyjnej stratyfikacji – słabnące ługowanie; ④ – strefa stagnacji, dosycanie solanki; ⑤ – rzapie zasypane przez nierozpuszczalne części, brak ługowania.

**Fig. 6. Conditions in the cavern during leaching in reverse circulation, close tubing shoes version (left) and in direct circulation (right).**

① – zone protected by blanket; ② – turbulent mixing zone, intensive leaching; ③ – gravity stratification zone, weakening leaching,

④ – stagnation zone, saturating of brine; ⑤ – sump filled by insolubles, no leaching.

Inne podobne podejście, to założenie o potencjalności przepływu, czyli że rotacja prędkości jest zerowa.

Jeszcze inną możliwością jest zaniechanie nieliniowości kontrakcji i przyjęcie nieściśliwości solanki z warunkiem (33). Można wtedy wprowadzić potencjał wektorowy prędkości, który w przypadku symetrii może mieć dwie składowe zerowe i jedynie jedną niezerową. Zwykle rozpatruje się wówczas rotację równania przepływu, która również ma tylko jedną składową niezerową. Dla cieczy jednorodnej równania takie pozwalają na eliminację ciśnienia, czyli części hydrostatycznej, z równania przepływu, co znacznie upraszcza od strony numerycznej rozwiązanie układu równań. W przypadku cieczy niejednorodnej równania stają się jednak bardzo skomplikowane.

Jednak wszystkie tego typu ujęcia nie obejmują turbulentnej dyfuzji, czyli powraca problem, skąd bierze się niezerowe stężenie soli wewnątrz kawerny. Jeśli zaś wprowadzić dyfuzję turbulentną, to nadal brak jej opisu.

Wydaje się, że jeśli idzie o lepkość lub dyfuzję turbulentną, powinna ona być proporcjonalna do:

$$\sqrt{\frac{2k}{\rho}} \quad (38)$$

gdzie:

$k$  – gęstość energii kinetycznej turbulencji [ $J/m^3$ ]

Z kolei energia kinetyczna turbulencji powinna być proporcjonalna do nadwyżki energii potencjalnej związanej z kierunkiem gradientu gęstości.

$$k \sim \frac{|\nabla\rho| - \nabla\rho \cdot \hat{i}_z}{2} g l^2 \quad (39)$$

gdzie:

$l$  – stała o wymiarze długości, średnica zawirowań turbulentnych

Eksperymenty numeryczne, jakie autor przeprowadził wspólnie z A. Kunstmanem pokazały, że wszelkie opisy turbulencji nie związane z gradientem gęstości, doprowadzają do mieszania się solanki w strefie poniżej butów rur, czego w kawernie się raczej nie obserwuje.

Biorąc to wszystko pod uwagę, w kawernie podczas ługowania, tworzą się strefy o odmiennej hydrodynamicie, o których wspomniano we wstępie. Przedstawia je Ryc. 6.

Strefa ① to otwór i podstropowa warstwa kawerny wypełniona medium izolującym strop. W tej części na ługowanie nie ma miejsca.

Strefa ② to strefa intensywnego mieszania się solanki, powyżej buta rury wodnej. Stężenie w niej jest niemal jednolite, ściany komory ługują się w tej strefie równomiernie, i ile tylko skała solna jest jednorodna.

Strefa ③ to strefa separacji grawitacyjnej, występująca jedynie w obiegu lewym, pomiędzy butami rur ługowniczych. Solanka w strefie tej jest uwarstwiona, najniższe stężenie pa-

nuje na poziomie rury wodnej, najwyższe na poziomie rury solankowej. Warstwy solanki są przepychane w dół, ku wyłotowi rury solankowej, dosycając się po drodze do końcowego stężenia. W związku ze zróżnicowaniem stężenia, ługowanie zachodzi szybciej na poziomie rury wodnej, wolniej na poziomie rury solankowej, maleje więc w tej strefie komory kąt nachylenia ługowanej ściany.

Strefa ④ to strefa martwa, poniżej butów obu rur ługowniczych. Nie ma tu dopływu świeżej wody, Opadanie na dno części nierozpuszczalnych wywołuje w tej strefie nieznaczny przepływ solanki ku górze. Solanka dosyca się tu do chemicznego nasycenia. Przemieszczenia ścian kawerny są tu bardzo niewielkie, lub żadne.

Strefa ⑤ to rzapie kawerny wypełnione częściami nierozpuszczalnymi i solanką nasyconą pomiędzy nimi. Na ługowanie nie ma tu miejsca.

Do opisu takiego obrazu procesu zbędna jest cała skomplikowana hydrodynamika 3D czy 2D. Oczywiście aby zachodziła dyfuzja (także turbulentna) jest konieczny pewien niewielki gradient stężenia, ściana kawerny ogranicza skalę turbulencji, więc w jej bezpośrednim otoczeniu stężenie może być nieco podwyższone, tak więc granice między strefami w kawernie nie są płaskie, poziome, ale nieznacznie stożkowo-paraboloidalne.

Dla porządku można wspomnieć o jeszcze jednej pozycji, w której hydrodynamika 2D oparta jest na równaniu Naviera-Stokesa (Shtilkind 2007). Pierwszym założeniem modelu jest, że przepływ przez kawernę jest laminarny. Zapewne dzięki błędnemu (?) potraktowaniu grawitacji i ograniczeniu się do „początkowego stanu” udało się otrzymać pole prędkości i niezerowe stężenie w kawernie (wystartowano z kawerny wypełnionej solanką nasyconą). Dalszy komentarz zbędny.

## Podsumowanie

W kawernie dominuje statyczny rozkład ciśnienia i naprężeń stycznych związanych z turbulencjami wywołanymi różnicami gęstości. Gradient gęstości i stężenia w przybliżeniu powinien być zgodny z kierunkiem grawitacji. Przepływ wymuszony przez kawernę na ogół daje jedynie nieznaczną poprawką do tego rozkładu.

Można próbować różnych przybliżeń do opisu przepływu przez kawernę: ograniczenia do wyrazu liniowego, zakładać bezwirowość lub bezźródłowość przepływu, ale jeśli nie skonstruuje się właściwego modelu turbulencji, związanego z gradientem gęstości, wyniki mogą mieć mało wspólnego z rzeczywistością. Takiego modelu turbulencji nikt do tej pory nie zaproponował.

W opisach podawanych w literaturze można znaleźć błędnie postawione warunki brzegowe, lub korzystanie z równań wzajemnie sprzecznych.

## PRZYPADEK JEDNOWYMIAROWY

Ponieważ gradient stężenia praktycznie może być jedynie skierowany w dół, stężenie można rozpatrywać, jako funkcję jedynie dwóch zmiennych: głębokości i czasu. A jeśli dodatkowo przepływ uśredniony utożsamiać z przepływem wymuszonym przez tłoczenie wody i odbiór solanki, to zjawisko staje się jednowymiarowe, niezależne od promienia i azymutu. Jeśli zaś efekt turbulencji uwzględniać zgodnie z wnioskami na końcu poprzedniego rozdziału, to można jawną dyfuzję turbulentną usunąć z równań modelu, dodając dodatkowy warunek na stężenie, że musi zachodzić równowaga grawitacyjna, tam zaś gdzie równania (bez jawnej turbulencji) prowadzą do jej braku, należy wymieszać solankę w strefie inwersji, czyli uśrednić w niej stężenie. W takim przypadku równania modelu znacznie upraszczają się.

Równanie transportu soli otrzymuje postać:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{H_1}^{H_2} S(h,t) C(h,t) dh = S(H_2,t) v(H_2,t) C(H_2,t) - S(H_2,t) v(H_1,t) C(H_1,t) + \int_{H_1}^{H_2} S(h,t) q_w(h,t) C(h,t) dh + \int_{H_1}^{H_2} A(h,t) dh \quad (40)$$

gdzie:

$A(h,t)$  – objętościowa gęstość dopływu soli w efekcie ługowania ścian komory [kg/m s]

$C(h,t)$  – stężenie solanki na głębokości  $h$  w chwili  $t$  [kg/m<sup>3</sup>]

$H_1, H_2$  – głębokości w których interwale równanie bilansuje masę soli [m]

$q_w(h,t)$  – wydajność źródeł zewnętrznych przepływu na jednostkę objętości [1/s]

$S(h,t)$  – pole przekroju komory na głębokości  $h$  w chwili  $t$  [m<sup>2</sup>]

$v(h,t)$  – prędkość średniego przepływu przez komorę na głębokości  $h$  w chwili  $t$  [m/s]

Wydajność źródeł zewnętrznych przepływu obejmuje teraz nie tylko efekt tłoczenia wody, poboru solanki, ale też opadania na dno części nierozpuszczalnych, które wypychają z dna solankę ku górze:

$$q_w = Q_{WE}(t) \frac{\delta(h-h_{WE})}{S(h_{WE},t)} - Q_{WY}(t) \frac{\delta(h-h_{WY})}{S(h_{WY},t)} - Q_n(t) \frac{\delta(h-h_D)}{S(h_D,t)} \quad (41)$$

gdzie:

$h_{WE}$  – głębokość buta rury wodnej [m]

$h_{WY}$  – głębokość buta rury solankowej [m]

$h_D$  – głębokość dna komory (poziomu części nierozpuszczalnych) [m]

$Q_{WE}$  – wydajność tłoczenia wody [m<sup>3</sup>/h]

$Q_{WY}$  – wydajność poboru solanki [m<sup>3</sup>/h]

$Q_n$  – tempo depozycji części nierozpuszczalnych [m<sup>3</sup>/h]

$S(h,t)$  – pole przekroju komory na głębokości  $h$  w chwili  $t$  [m<sup>2</sup>]

$\delta(h)$  – funkcja delta Diraca

O ile wielkości fizyczne charakteryzujące hydrodynamikę wewnątrz komory są funkcjami jedynie czasu i głębokości, o tyle własności ługownicze soli mogą zmieniać się z promieniem i azymutem. Kształt komory nie musi być w związku z tym osiowo-symetryczny.

Ocios komory można opisać jako powierzchnię  $R(h,\varphi,t)$ , wyrażającą promień na danej głębokości, pod danym azymutem i zmieniający się w czasie. Wtedy można wyrazić szybkość ługowania poprzez przyrost promienia na danej głębokości:

$$\omega(h,\varphi,t) = \frac{\partial R(h,\varphi,t)}{\partial t} \sin \psi(h,\varphi,t) \cos \xi(h,\varphi,t) \quad (42)$$

gdzie:

$\xi$  – kąt między azymutem rozpatrywanego punktu a azymutem wektora normalnego w tym punkcie do powierzchni  $R$ .

Objętościową gęstość dopływu soli w efekcie ługowania ścian komory można wtedy wyrazić, jako:

$$A(h,t) = \int_0^{2\pi} R \frac{\omega(1-p_n)\rho_s}{\sin \psi \cos \xi} d\varphi \quad (43)$$

gdzie wielkości pod całką są funkcjami głębokości  $h$ , azymutu  $\varphi$ , i czasu  $t$ .

$p_n$  – udział części nierozpuszczalnych w skale solnej [-]

$\rho_s$  – gęstość soli kamiennej (halitu) [kg/m<sup>3</sup>]

$\psi$  – kąt nachylenia ługowanej powierzchni [-]

Można kąt  $\xi$  a także kąt  $\psi$  wyrazić poprzez odpowiednie pochodne funkcji  $R$  wzorami geometrii różniczkowej. Są one jednak nie tylko skomplikowane, ale też, jak dotąd, bez praktycznego zastosowania. W przypadku zbliżonym do symetrii osiowej, tj. gdy zachodzi:

$$\frac{\partial R(h,\varphi,t)}{\partial \varphi} \approx 0 \quad (44)$$

zachodzą relacje:

$$\omega(h,\varphi,t) \approx \frac{\partial R(h,\varphi,t)}{\partial t} \sin \psi(h,\varphi,t) \quad (45)$$

$$\psi(h,\varphi,t) \approx \arctg \left( \frac{\partial R(h,\varphi,t)}{\partial h} \right) + \frac{\pi}{2} \quad (46)$$

$$\sin \psi(h,\varphi,t) \approx \left( 1 + \left( \frac{\partial R(h,\varphi,t)}{\partial h} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (47)$$

gdzie:

$R(h,t)$  – promień komory na głębokości  $h$ , w azymucie, w momencie  $t$

$\psi(h,t)$  – nachylenie ściany komory na głębokości  $h$ , azymucie, w momencie  $t$



Można zapisać tempo depozycji części nierozpuszczalnych na dnie przy użyciu wprowadzonej parametryzacji następująco::

$$Q_n(t) = \int_{H_{min}}^{H_D} \int_0^{2\pi} R(h, \varphi, t) \frac{\omega(h, \varphi, t) p_n(h, \varphi, t)}{\sin \psi(h, \varphi, t) \cos \xi(h, \varphi, t)} d\varphi dh \quad (48)$$

gdzie:

$H_{min}$  – głębokość stropu komory (lub poziomu izolacji) [m]

$H_D$  – głębokość dna komory (poziomu części nierozpuszczalnych) [m]

$p_n$  – udział części nierozpuszczalnych w skale solnej [-]

Z kolei sumaryczną kontrakcję, określoną jako:

$$Q_{WY}(t) = Q_{WE}(t) - V_{kon}(t) \quad (49)$$

gdzie:

$V_{kon}$  – ubytek objętości związany z kontrakcją, który wyraża się wzorem:

$$V_{kon}(t) = \int_{H_{min}}^{H_D} \int_0^{2\pi} R(h, \varphi, t) \frac{\omega(h, \varphi, t) (1 - p_n(h, \varphi, t))}{\sin \psi(h, \varphi, t) \cos \xi(h, \varphi, t)} \left(1 - \frac{\rho_{zl}}{\rho_{sr}}\right) d\varphi dh \quad (50)$$

gdzie:

$\rho_{zl}$  – gęstość soli kamiennej (halitu)

$\rho_{sr}$  – pozorna gęstość soli po jej rozpuszczeniu (po kontrakcji)

Ściśle rzecz biorąc, z powodu nieliniowości kontrakcji,  $\rho_{sr}$  jest zależne od stężenia, a więc także może być traktowane, jako funkcja czasu.

Równanie zachowania pędu dla przypadku jednowymiarowego przyjmuje (z pominięciem turbulencji) ogólną postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{H_1}^{H_2} S(h, t) \rho(h, t) v(h, t) dh = \\ = S(H_2, t) (v(H_2, t))^2 \rho(H_2, t) - S(H_2, t) (v(H_1, t))^2 \rho(H_1, t) + \\ + \int_{H_1}^{H_2} S(h, t) \rho(h, t) g dh + \int_H^{H_2} S(h, t) \frac{\partial p(h, t)}{\partial h} dh + \int_{H_1}^{H_2} a_w(h, t) dh \end{aligned} \quad (51)$$

gdzie:

$a_w$  – wydajność źródeł pędu z zewnątrz (składowa pionowa) [kg/m<sup>2</sup>s<sup>2</sup>] (związana z tłoczeniem wody i odbiorem solanki, opisana przy równaniu (26))

$g$  – przyspieszenie ziemskie [m/s<sup>2</sup>]

$H_1, H_2$  – głębokości w których interwale równanie bilansuje pęd solanki,

$p(h, t)$  – ciśnienie w kawernie [Pa]

$S(h, t)$  – pole przekroju komory na głębokości  $h$  w chwili  $t$

$v(h, t)$  – lokalna średnia prędkość przepływu solanki (ze znakiem dodatnim, gdy skierowana ku dołowi) [m/s]

$\rho(h, t)$  – lokalna średnia gęstość solanki [kg/m<sup>3</sup>]

W praktyce, biorąc pod uwagę warunki panujące w kawernie, równanie (51) opisuje nieznaczące poprawki do ciśnienia opisanego poniżej wzorem (52) i nie ma praktycznego znaczenia.

$$p(H_2, t) = p(H_1, t) + \int_{H_1}^{H_2} \rho(h, t) g dh \quad (52)$$

Do wyznaczenia średniej prędkości przepływu konieczne jest zatem równanie ciągłości (33), które dla przypadku jednowymiarowego wyrazić można następująco:

$$\begin{aligned} S(H_2, t) v(H_2, t) - S(H_2, t) v(H_1, t) = \\ = \int_{H_1}^{H_2} S(h, t) c(h, t) dh + \int_H^{H_2} S(h, t) o(h, t) dh + \int_{H_1}^{H_2} S(h, t) q_w(h, t) dh \end{aligned} \quad (53)$$

gdzie:

$c(h, t)$  – lokalna kontrakcja na jednostkę czasu [1/s], wyrażająca się wzorem (54)

$o(h, t)$  – bilans udziału części nierozpuszczalnych, które opadają na dno kawerny [1/s], wyrażający się wzorem (55)

$q_w(h, t)$  – wydajność źródeł zewnętrznych przepływu na jednostkę objętości [1/s] wyrażająca się wzorem (41) z podstawieniami (48), (49) i (50).

$$c(h, t) = \int_0^{2\pi} R(h, \varphi, t) \frac{\omega(h, \varphi, t) (1 - p_n(h, \varphi, t))}{\sin \psi(h, \varphi, t) \cos \xi(h, \varphi, t)} \left(1 - \frac{\rho_{zl}}{\rho_{sr}}\right) d\varphi \quad (54)$$

$$o(h, t) = \int_0^{2\pi} R(h, \varphi, t) \frac{\omega(h, \varphi, t) p_n(h, \varphi, t)}{\sin \psi(h, \varphi, t) \cos \xi(h, \varphi, t)} d\varphi \quad (55)$$

Można równania (40) i (53) wyrazić w postaci lokalnej, jako (56) i (57), jednak postać globalna w naturalny sposób się aproksymuje i może być bezpośrednio użyta do rozwiązań numerycznych.

$$\frac{\partial C(h, t)}{\partial t} = \frac{1}{S(h, t)} \frac{\partial}{\partial h} (v(h, t) C(h, t) S(h, t)) + q_n(h, t) C_n(h, t) + A(h, t) \quad (56)$$

$$\frac{1}{S(h, t)} \frac{\partial}{\partial h} (S(h, t) v(h, t)) = c(h, t) + o(h, t) + q_w(h, t) \quad (57)$$

Podniesienie się dna kawerny (zasypu) wynika z (35):

$$w_r p_n \frac{\partial}{\partial t} \int_{H_D(t)}^{H_{min}} S(h, t) dh = \frac{\partial}{\partial t} \int_{H_{max}}^{H_D(t)} S(h, t) dh \quad (58)$$

gdzie:

$H_D(t)$  – głębokość zasypu [m]

Prawa strona równania wyraża przyrost objętości zasypu, lewa strona objętość wynikającą z ilości części nierozpuszczalnych w rozługowywanej objętości skały.

Nie ma potrzeby formułowania dodatkowych warunków brzegowych na dnie kawerny, gdyż wypychanie solanki

z dennej warstwy przez części nierozpuszczalne jest zawarte w  $q_w$  (41) i (48).

W stropie kawerny warunkiem brzegowym jest brak przepływu, jeśli strop jest izolowany. W przeciwnym razie, dla stropu ługowanego, warunki brzegowe dla prędkości i dopływu soli są następujące:

$$v(H_{\min}(t), t)_n = -\omega(H_{\min}(t), t)S(H_{\min}(t), t)(1 - p_n(H_{\min}(t))) \left( \frac{\rho_r}{\rho_i} - 1 \right) \quad (59)$$

$$\bar{A}(H_{\min}(t), t) = \int_0^{2\pi R(H_{\min}, \varphi, t)} \int_0^R r \omega(\pi)(1 - p_n) \rho_i \, dr d\varphi \quad (60)$$

gdzie:

$\bar{A}(H_{\min}(t), t)$  -powierzchniowa gęstość dopływu soli w efekcie ługowania stropu komory [kg/s]

$H_{\min}(t)$  – głębokość stropu w chwili  $t$ .

Jak już powiedziano, siły grawitacyjne mają dominujący wpływ na hydrodynamiczne warunki w komorze, w efekcie czego gradient stężenia musi być skierowany pionowo w dół. Jakkolwiek inna sytuacja wytwarza silną dyfuzję turbulentną doprowadzającą do wymieszania się solanki w strefie zaburzonej i ustaleniu się w niej stężenia średniego.

Warunek równowagi grawitacyjnej ma postać:

$$\frac{\partial C(h, t)}{\partial h} \geq 0 \quad (61)$$

Jeśli układ równań (40), (53), z podstawieniami (41), (43), (48), (49), (50), (54) i (55) prowadzi do naruszenia warunku (61), w chwili  $t$  stężenie należy uśrednić wg wzoru:

$$\bar{C}(t | H_1, H_2) = \frac{\int_{H_1}^{H_2} C(h, t) S(h, t) dh}{\int_{H_1}^{H_2} S(h, t) dh} \quad (62)$$

gdzie:

$H_2$  – dolna granica strefy inwersji; dla  $h > h_2$  warunek (61) jest zachowany

$H_1$  – największa głębokość zapewniająca likwidację inwersji, taka że:

$$\bar{C}(t | H_1, H_2) \leq C(h, t) \quad \forall h < H_1 \quad (63)$$

I w przedziale  $(H_1, H_2)$   $C(h, t)$  przybiera wartość  $\bar{C}(t | H_1, H_2)$

Podane w tej części równania, po odpowiedniej aproksymacji są wykorzystane m.in. w modelu WinUbro, z szybkością ługowania opisaną wzorami (14) i (17).

#### Podsumowanie:

W jednowymiarowym modelu równania znacznie się upraszczają. Istotne jest jedynie równanie transportu i rów-

nanie ciągłości. Równanie szybkości ługowania przestaje być warunkiem brzegowym (wyjąwszy ługowanie bez izolacji stropu), a staje się członem źródłowym. Równanie pędu jest bez znaczenia, turbulencja zastąpiona jest warunkiem równowagi grawitacyjnej.

#### WNIOSKI KOŃCOWE

Szybkość ługowania jest zależna od stężenia medium ługującego, co jest w miarę dobrze rozpoznane, oraz od kąta nachylenia ługowanej powierzchni i temperatury, co nie jest rozpoznane w stopniu dostatecznym.

Można odnieść wrażenie, że nowsi badacze nie uczą się na błędach poprzedników ani gdy idzie o metodykę badań, ani przy analizie ich wyników. Albo też brak im zrozumienia istoty procesu ługowania.

To samo dotyczy prób konstruowania „pełnego” modelu procesu ługowania. Głównym czynnikiem determinującym sytuację w kawernie jest turbulencja, fluktuacyjne zawirowania wywołane brakiem równowagi grawitacyjnej w związku ze zróżnicowaniem stężenia. Wymuszony przepływ przez kawernę odgrywa rolę jedynie przy lewym obiegu, w strefie pomiędzy butami rur.

Wszelkie modele ługowania z hydrodynamiką 2D lub 3D bez opisu turbulencji są nieadekwatne, a ich wyniki najprawdopodobniej są artefaktami.

Ponieważ stężenie jest praktycznie jedynie funkcją głębokości i czasu, stan wewnątrz kawerny może być przybliżony modelem jednowymiarowym, w którym równanie Naviera-Stokesa jest bez znaczenia, a turbulencja zastąpiona warunkiem równowagi grawitacyjnej.

Dysponując opisem matematyczno-fizycznym procesu można przystąpić do jego implementacji w postaci programu komputerowego. Programom takim poświęcony będzie jeden z kolejnych artykułów niniejszej serii.

#### SUMMARY

The leaching process of the salt caverns includes the following physical phenomena:

- Passing of salt from rock salt to the solution (dissolving). During dissolving, the cavern wall moves, depending on its inclination and on the dissolving brine concentration,
- Transport of salt from the cavern wall vicinity to the brine deeper inward the cavern. This is caused by the molecular and turbulent diffusion overlapping advection of salt by the average flow through the cavern.
- Flow through the cavern resulting from water injection and brine production overlapped by flow caused by the phenomena of convection and turbulence connected with a diversified distribution of the concentration.

- Washing out, crushing up and peeling off insoluble additions to rock salt and filling the lower part of the cavern (sump) with them.

The first of the above processes is described by leaching rate formula. Both chemical kinetics and diffusion through turbulent boundary layer play some part in the dissolution, as leaching rate depends on inclination angle of leaching surface and on kind of the dissolved rock salt.

No common opinion about the shape of the leaching rate formula is achieved amongst different research groups. Dependence on concentration is well recognized. Fig. 1. presents different proposals to describe this dependence. Formula (11) developed by Saberian (Saberian 1984) and formula (14) developed in Chemkop (Urbańczyk 1990) fit the empirical results quite good.

Influence of inclination angle is indisputable, but its shape is hypothetical only. Fig. 2. shows results of tests performed in Chemkop, but fitted relation (16) describes probably nothing more but the laboratory results. Formula (15) of Saberian (Saberian 1984) has also some deficiencies, e.g. relation roof leaching rate to wall leaching rate is constant – 1.44, while it depends on the kind of the rock salt (Urbańczyk 1990, Charnaval et al. 2013b)

Formula applied at Chemkop (17) has three independent parameters – roof leaching rate, wall leaching rate and limiting dissolution angle. Fig. 3. presents variants of Chemkop formula for angular dependency of leaching rate coefficient compared with formulae of Saberian (15) and of Kulle and Korolev (12).

Temperature impact on leaching rate also is differently evaluated by different authors as it is presented on Fig. 4. Maybe it also depends on the kind of the rock salt.

It is unclear which part of variability is caused by true behavior of salt and which by differences in the research methodics. More research should be performed. It is important to keep the appropriate methodics, as described in (Urbańczyk 2015).

Transport of dissolved salt from the cavern wall inward the cavern is dominated by turbulent diffusion. It is caused by gravity forces everywhere where concentration gradient has other direction than gravitation. Turbulent diffusion must be strong if turbulent Peclet number is to balance Strouhal number. Numerical experiments showed that in the case of reduced gravitation enough to become flow within the cavern laminar, concentration inside the cavern drops to  $10^{-8}$  kg/m<sup>3</sup>. It is obvious, regarding the streamlines on Fig. 5. that without turbulent diffusion, there is no mechanism to transport salt crosswise the streamlines and brine concentration would be close to zero.

The flow through the cavern is dominated by turbulence effects. Any simplification of the flow equations e.g. linear-

ization, assumption of irrotational flow or sourceless flow would lead to spurious results if proper turbulence model was not included. Pressure distribution in the cavern is similar to static conditions. Concentration and density gradient is oriented towards the gravitation. The flow forced by water injection and brine uptake provides only a small correction to this distribution. Those are the reasons why correct complete mathematical and physical description of the leaching process is still ahead.

It is possible to distinguish several zones in the cavern zones, connected with the position of blanket and the tubing shoes as shown on Fig. 6.

① – zone protected by blanket, no leaching is possible here. ② – zone of turbulent mixing, above the injection level, brine concentration is nearly uniform and the lowest in the cavern, intensive leaching has place here, ③ – zone of brine stratification, only in reverse circulation between the tubing shoes, the deeper the higher brine concentration and slower leaching, brine layers are pushed down, to the production level, ④ – stagnation zone, brine concentration becomes close to saturated here, slight leaching is possible during saturating, falling down of the insolubles onto the cavern bottom causes slow brine flow upwards in this zone ⑤ – sump filled by insolubles, no leaching is possible here, the sump level (bottom of the empty space) goes up while insolubles settle.

In the above pattern, the concentration and the mean flow velocity are functions of single space variable, i.e. depth. Thus, it is possible to construct very simple model with transport and continuity equations. Leaching rate equation is source term here; turbulence is replaced by gravity equilibrium condition.

One can get the impression that younger researchers do not learn from mistakes of their predecessors. It concerns both methodic of leaching tests and interpretation of results. Essence of the leaching process is poorly understood. Contradictory equations or incorrect boundary conditions can be found in the published process descriptions.

With a physical and mathematical description of the process one can proceed to its implementation in the form of computer program.

#### LITERATURA/REFERENCES

- BENNEMA P. GILMER G.H., 1973. Kinetics of Crystal Growth. W zbiorze: *Crystal Growth: an Introduction*. Edit. by P. Hartman, North-Holland, Amsterdam, 1973.
- CHARNAVEL I., MEYBECK I., BUISSARD H., HERTZ E., 2006a. Variation of Salt Dissolution Rate with Temperature – Experimental Procedure and First Results, SMRI Technical Conference Paper, Brussels, May 2006.
- CHARNAVEL I., BUISSARD H., HERTZ E., 2006b. Variation of Dissolution Rate with Temperature – from Horizontal to Vertical, SMRI Technical Conference Paper, Rapid City, October 2006.

- DURIE R.W., JESSEN F.W., 1964. Mechanism of the Dissolution of Salt in the Formation of Underground Salt Cavities. *SPEJ* 4 (VI 1964): 183-190
- ENGVALL L., O'HERN T., LORD D., 2013. Experimental Characterization of Temperature Dependence of Salt Dissolution Rate. SMRI Technical Conference Paper, Lafayette, April 2013.
- HIEBLINGER J., KLEINITZ W., 1978. Die Numerische Simulation des Solprozesses – Erfahrungen und Möglichkeiten. *Fifth International Symposium on Salt*, Hannover, 1978, 2:2143
- КАРАТЫГИН Е.П., КУБЛАНОВ А.В., ПУСТЫЛЬНИКОВ Л.М., ЧАНЦЕВ В.П., 1994. Подземное растворение соляных залежей (проблемы, моделирование, управление). Санкт-Петербург, Гидрометеоиздат.
- KRETZSCHMAR H.-J., HEIDENREICH H., 1978. Stromungsmechanisch-matematischen Solmodell für untertagige Lösungsprozesse. *Neue Bergbautechnik* 11 (1978): 94-99
- КУУЛЛЕ П. А., 1949. Разработка месторождений соли подземным выщелачиванием. Труды ВНИИГ в. 20.
- KUNSTMAN A., POBORSKA-MŁYNARSKA K., URBAŃCZYK K., 2004. Zarys otworowego górnictwa solnego. Wyd. AGH, Kraków
- KUNSTMAN A., POBORSKA-MŁYNARSKA K., URBAŃCZYK K., 2007. Solution mining in Salt Deposits. Wyd. AGH, Kraków.
- KUNSTMAN A.S., URBAŃCZYK K.M., 1990. Ubro – a Computer Model for Designing Salt Cavern Leaching Process – Developed at Chemkop, SMRI Meeting Paper, Paris October 1990.
- MANUALUL, 1956. Metode de exploatare a sari geme. *Manualul Inginerului de Mine*, IV Sect. XXIV. IV. Editura Technica, București.
- MEISTER S., HIEBLINGER J., KLEINITZ W., NOLEN J.S., VON HANTLEMAN G., 1978. Die numerische Simulation des Solprozesse. 24 DGMK Happtagung, 3 IX – 3 X 1978, Hamburg.
- NOLEN J.S., VON HANTLEMAN G., MEISTER S., KLEINITZ W., HIEBLINGER J., 1974. Numerical Simulation of the Solution Mining Process. European Spring Meeting of SPE(AIME) Amsterdam, May 1974.
- OLANDER D. R., MACHIELS A. J., BALOOCH M., YAGNIK S. K., 1982. Thermal Gradient Migration of Brine Inclusion in Synthetic Halite Single Crystals. *J. Appl. Phys.* 53, (1982), 669-681.
- RUSSO A. J., 1981. A solution mining code for studying axisymmetric salt cavern formation. Sandia Report SAND81-1231: 1-32
- RUSSO A. J., 1983. Solution Mining Calculations for Strategic Petroleum Reserve Caverns. *Proc. Sixth Salt Symposium Toronto 1983*, Vol. II, 101-109.
- SABERIAN A., 1983. A Dissolution/Temperature Relation for Vertical Salt Surfaces Dissolved in Saline Solutions. SMRI Research Report No: 83-0002-SMRI July 1983.
- SABERIAN A., 1984. SALGAS User's Manual, Volume 1 – Theories, Formulas & Program Description. SMRI Research Project Report No. 84-003-SMRI, 1984.
- SHARMA D., PRALONG P.-J., 1982. Prediction of Turbulent Mixed Convection Flows within Dissolution Generated Caverns. SMRI Meeting Paper, Manchester, October 1982
- SHTILKIND S., 2007. Computer simulation of salt cavern leaching process. *Annual of the University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski"*, 50, Part II, Mining and Mineral processing.
- TRZASKA A., 1976. The Process of Borehole Mining of Salt. *Archiwum Górnictwa* 21 (4):24-38
- TRZASKA A., 1977. Formation of Chambers with Arbitrary Shapes in the Process of Borehole Mining of Salt. *Archiwum Górnictwa* 22 (2): 5-16
- URBAŃCZYK K.M., 1990. Szybkość ługowania soli kamiennej w funkcji stężenia roztworu ługującego, kąta nachylenia ługowanej powierzchni i temperatury procesu. *Górnictwo*, 14 (1):25–39.
- URBAŃCZYK K., 2015. Źródła wiedzy o procesie ługowania kavern solnych (Proces ługowania kavern solnych cz. I). *Przegląd Solny / Salt Review*, 2015, 11:32-43