

dr inż. Barbara MAZUR-CHRZANOWSKA<sup>a</sup>, dr n. tech. Andrzej Antoni CZAJKOWSKI<sup>a</sup>,  
Rafał CHRZANOWSKI<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Wyższa Szkoła Techniczno-Ekonomiczna w Szczecinie, Wydział Transportu Samochodowego  
Higher School of Technology and Economics in Szczecin, Faculty of Motor Transport

<sup>b</sup> Uniwersytet Szczeciński, Wydział Matematyczno-Fizyczny, Katedra Edukacji Informatycznej i Technicznej (*absolwent*)  
University of Szczecin, Faculty of Mathematics & Physics, Department of Informatics & Technical Education (*graduate*)

## MODELOWANIE PARAMETRÓW PRACY BELKI WSPORNIKOWEJ OBCIĄŻONEJ SIŁĄ CIĄGLĄ I SIŁĄ SKUPIONĄ Z ZASTOSOWANIEM PROGRAMU MATHEMATICA

### Streszczenie

**Wstęp i cel:** W pracy pokazano modelowanie analityczno-numeryczne belki jednostronnie utwierdzonej o przekroju prostokąta i obciążonej równomiernie siłą ciągłą na całej jej długości oraz siłą skupioną na jej końcu. W pracy pokazano wyprowadzenie równania ugięcia belki oraz wzorów na kąt ugięcia i strzałkę ugięcia belki. Celem pracy jest analiza numeryczna i graficzna funkcji kąta ugięcia belki i funkcji strzałki ugięcia belki.

**Materiał i metody:** Wykorzystano model mechaniczny belki bazując na literaturze z wytrzymałości materiałów. Zastosowano metodę analityczną i numeryczną z programem *Mathematica*.

**Wyniki:** Wyprowadzone wzory analityczne umożliwiają przeprowadzenie analizy numerycznej funkcji opisujących kąt i strzałkę ugięcia belki dla parametrów: siła ciągła, siła skupiona, długość belki, moduł Younga materiału belki zestawionych w możliwe pary.

**Wniosek:** Przeprowadzona analiza numeryczna w programie *Mathematica* pozwala na obserwację przebiegu zmienności kąta i strzałki ugięcia belki w zależności od obserwowanych parametrów.

**Słowa kluczowe:** Belka wspornikowa, jednostronnie utwierdzona, przekrój prostokątny, obciążenie równomierne siłą ciągłą, obciążenie siłą skupioną, model teoretyczny, analiza numeryczna, *Mathematica*.

(Otrzymano: 01.06.2016; Zrecenzowano: 05.06.2016; Zaakceptowano: 10.06.2016)

## MODELLING OF WORKING PARAMETRES FOR ONE-SIDEDLY FIXED CANTILEVERED BEAM LOADED WITH A CONTINUOUS FORCE AND CONCENTRATED FORCE WITH INTERPRETATION IN MATHEMATICA PROGRAM

### Abstract

**Introduction and aim:** The study shows the analytical and numerical modeling of cantilevered beam with a rectangular cross section and loaded with a continuous force evenly in along beam length and a concentrated force placed on its end. The study shows the derivation of equations and formulas for beam deflection angle and deflection of the beam. The aim of the study is to numerical and graphical analysis for function of deflection angle of the beam and function of the beam deflection.

**Material and methods:** In this paper has been shown a beam mechanical model based on the literature of the strength of materials. The analytical and numerical method by using *Mathematica* program has been described in the paper.

**Results:** The derived analytical formulas allow to perform some numerical analysis of functions describing the angle and arrow of beam deflection for parameters: the continuous force, and concentrated, length of the beam, Young's modulus of beam material stacked in possible pairs.

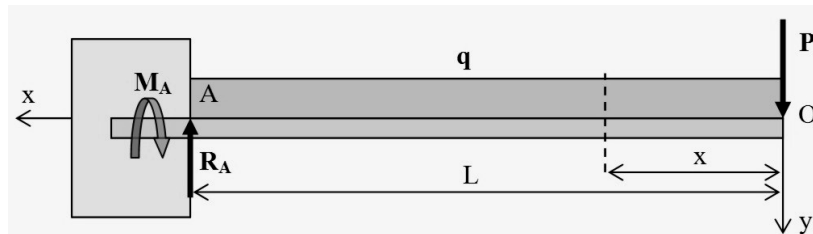
**Conclusion:** Numerical analysis made in *Mathematica* program allows to observe the variability progress of the angle and arrow of beam deflection depending on of used parameters.

**Keywords:** Cantilevered beam, one-sidedly fixed, rectangular cross-section, loaded evenly by a continuous force and concentrated force on its end, theoretical model, numerical analysis, *Mathematica*.

(Received: 01.06.2016; Revised: 05.06.2016; Accepted: 10.06.2016)

## 1. Model analityczny belki wspornikowej

Belka wspornikowa o długości  $L$  i o stałym przekroju w kształcie prostokąta o szerokości  $b$  i wysokości  $h$  jest obciążona siłą ciągłą  $q$  rozłożoną równomiernie na całej długości belki oraz siłą skupioną  $P$  na jej końcu (Rys. 1) [2]-[6].



Rys. 1. Belka wspornikowa obciążona równomiernie siłą ciągłą  $q$  na całej długości i na końcu siłą skupioną  $P$   
*Źródło: Opracowanie własne Autorów*

Fig. 1. The cantilevered beam loaded by a continuous force  $q$  on the full length and on the end by a concentrated force  $P$   
*Source: Elaboration of the Authors*

Przy obciążeniu belki wspornikowej siłą ciągłą  $q$  rozłożoną równomiernie na całej długości belki oraz siłą skupioną  $P$  działającą na końcu belki, moment  $M$  w przekroju o odciętej  $x$  wyraża się w postaci skalarnej wzorem [4], [9], [11]:

$$M = -Px - \frac{q}{2}x^2. \quad (1)$$

Zatem równanie różniczkowe linii ugięcia belki wspornikowej ma postać [11]:

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = Px + \frac{q}{2}x^2, \quad (2)$$

gdzie  $EJ$  to sztywność belki na zginanie. Równanie (2) obustronnie całkujemy względem  $x$ :

$$EJ \int \frac{d^2y}{dx^2} dx = P \int x dx + \frac{q}{2} \int x^2 dx. \quad (3)$$

Po wykonaniu całkowania otrzymujemy:

$$EJ \frac{dy}{dx} = \frac{P}{2}x^2 + \frac{q}{6}x^3 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Stałą  $C_1$  wyznaczymy z warunku doskonałego utwierdzenia belki w punkcie A. Warunek ten wyraża fakt, że przekrój belki w tym miejscu nie obraca się. Fakt ten oznacza, że zgięta oś belki pozostanie styczna do osi odciętych w punkcie A. Zatem warunek brzegowy ma postać:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=L} = 0. \quad (5)$$

Wykorzystując warunek brzegowy (5) w równaniu (4) i po uporządkowaniu mamy:

$$C_1 = -\frac{PL^2}{2} - \frac{qL^3}{6}. \quad (6)$$

Podstawiając wyznaczoną stałą  $C_1$  do równania (4) i po podzieleniu obu jego stron przez stałą  $EJ$  dostajemy następującą jego postać:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{2EJ}x^2 + \frac{q}{6EJ}x^3 - \frac{PL^2}{2EJ} - \frac{qL^3}{6EJ}. \quad (7)$$

Podstawiając  $x = 0$  w równaniu (7) znajdziemy wartość kąta  $\vartheta_0$  nachylenia stycznej na końcu belki (kąt ugięcia belki):

$$\vartheta_0 \equiv \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = -\frac{PL^2}{2EJ} - \frac{qL^3}{6EJ} = -\frac{L^2}{2EJ} \left( P + \frac{qL}{3} \right). \quad (8)$$

Równanie różniczkowe (7) obustronnie całkujemy względem zmiennej  $x$ :

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \frac{P}{2EJ} \int x^2 dx + \frac{q}{6EJ} \int x^3 dx - \frac{PL^2}{2EJ} \int dx - \frac{qL^3}{6EJ} \int dx. \quad (9)$$

Po wykonaniu całkowania otrzymujemy:

$$y(x) = \frac{P}{6EJ} x^3 + \frac{q}{24EJ} x^4 - \frac{PL^2}{2EJ} x - \frac{qL^3}{6EJ} x + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Stałą  $C_2$  wyznaczmy z drugiego warunku brzegowego, który zakłada, że ugięcie belki w miejscu utwierdzenia jest równe zeru. Zatem warunek ten ma postać:

$$y(x=L) = 0. \quad (11)$$

Wykorzystując warunek brzegowy (11) w równaniu (10) i po uporządkowaniu mamy:

$$C_2 = \frac{PL^3}{3EJ} + \frac{qL^4}{8EJ}. \quad (12)$$

Podstawiając wyznaczoną stałą  $C_2$  do równania (10) dostajemy następującą jego postać:

$$y(x) = \frac{P}{6EJ} x^3 + \frac{q}{24EJ} x^4 - \frac{PL^2}{2EJ} x - \frac{qL^3}{6EJ} x + \frac{PL^3}{3EJ} + \frac{qL^4}{8EJ}. \quad (13)$$

Równanie (13) jest równaniem linii ugięcia belki wspornikowej o długości  $L$  oraz sztywności  $EJ$  obciążonej siłą ciągłą  $q$  rozłożoną równomiernie na całej długości belki oraz na końcu siłą skupioną  $P$ . Największe ugięcie belki czyli wartość strzałki ugięcia  $f$  jaka powstaje na swobodnym końcu belki wspornikowej otrzymamy, gdy w równaniu (13) położymy  $x = 0$ :

$$f \equiv y(x=0) = \frac{PL^3}{3EJ} + \frac{qL^4}{8EJ}. \quad (14)$$

Rozwiązując równanie (14) względem  $EJ$  otrzymujemy:

$$EJ = \frac{1}{f} \left( \frac{PL^3}{3} + \frac{qL^4}{8} \right). \quad (15)$$

Zależność (15) oznacza, że sztywność zginania belki przy tych samych warunkach obciążenia i podparcia jest odwrotnie proporcjonalna do strzałki ugięcia sprężystego. Po wprowadzeniu momentu bezwładności do wzorów (8) i (14) otrzymujemy wygodny w obliczeniach numerycznych wzór na kąt ugięcia belki

$$\vartheta_0 = -\frac{6L^2}{E \cdot bh^3} \left( P + \frac{qL}{3} \right) \quad (16)$$

i strzałkę ugięcia belki:

$$f = \frac{4P}{E \cdot b} \left( \frac{L}{h} \right)^3 + \frac{3qL}{2E \cdot b} \left( \frac{L}{h} \right)^3. \quad (17)$$

## 2. Analiza numeryczna belki wspornikowej w programie

Do analizy numerycznej przyjmuje się następujące wartości parametrów :

Oznaczenie:	Parametr:	Wartość:	
P	Siła skupiona	0,5 – 4,0 kg	4,9 – 39,2 N
q	Siła ciągła		2 – 4 N
L	Długość belki wspornikowej	50 – 100 cm	0,5 – 1,0 m
b	Szerokość belki wspornikowej	4,0 cm	0,04 m
h	Wysokość belki wspornikowej	0,6 cm	0,006 m
E	Moduł Younga ( <i>stal węglowa pospolita</i> ) [10]	$2,1 \times 10^5 - 2,2 \times 10^5$	MPa

### • Algorytmy numeryczne dla wyznaczania kąta ugięcia belki

Obliczenia numeryczne wykonano w programie *Mathematica* [1], [7], [8]

*Algorytm 1.*  $E:=2.1 \cdot 10^5$ ;  $b:40$ ;  $h:=6$ ;  $q:=2$   
`Plot3D[ ((-6*L^2)*(P+q*L/3))/(E*b*h^3),`  
`{P,4,20}, {L,0.5,1}, ColorFunction->Hue]`

*Algorytm 2.*  $E:=2.1 \cdot 10^5$ ;  $b:40$ ;  $h:=6$ ;  $P:=4$   
`Plot3D[ ((-6*L^2)*(P+q*L/3))/(E*b*h^3),`  
`{q,2,4}, {L,0.5,1}, ColorFunction->Hue]`

*Algorytm 3.*  $E:=2.1 \cdot 10^5$ ;  $b:40$ ;  $h:=6$ ;  $L:=0.5$ ;  
`Plot3D[ ((-6*L^2)*(P+q*L/3))/(E*b*h^3),`  
`{q,2,4}, {P,4,20}, ColorFunction->Hue]`

*Algorytm 4.*  $L:=0,5$ ;  $b:40$ ;  $h:=6$ ;  $q:=2$   
`Plot3D[ ((-6*L^2)*(P+q*L/3))/(E*b*h^3),`  
`{E,2.1*10^5,2.5*10^5}, {P,4,20}, ColorFunction->Hue]`

*Algorytm 5.*  $L:=0,5$ ;  $b:40$ ;  $h:=6$ ;  $P:=4$   
`Plot3D[ ((-6*L^2)*(P+q*L/3))/(E*b*h^3),`  
`{E,2.1*10^5,2.5*10^5}, {q,2,4}, ColorFunction->Hue]`

*Algorytm 6.*  $b:40$ ;  $h:=6$ ;  $P:=4$ ;  $q:=2$   
`Plot3D[ ((-6*L^2)*(P+q*L/3))/(E*b*h^3),`  
`{E,2.1*10^5,2.5*10^5}, {L,0.5,1}, ColorFunction->Hue]`

*Algorytm 7.*  $E:=2.1 \cdot 10^5$ ;  $b:40$ ;  $h:=6$ ;  $q:=2$   
`Plot3D[ (4*P*L^3)/(E*b*h^3)+(3*q*L^4)/(2*E*E*b*`  
`h^3), {P,4,20}, {L,0.5,1}, ColorFunction->Hue]`

*Algorytm 8.*  $E:=2.1 \cdot 10^5$ ;  $b:40$ ;  $h:=6$ ;  $P:=4$   
`Plot3D[ (4*P*L^3)/(E*b*h^3)+(3*q*L^4)/(2*E*E*b*`  
`h^3), {q,2,4}, {L,0.5,1}, ColorFunction->Hue]`

*Algorytm 9.*  $E:=2.1 \cdot 10^5$ ;  $b:40$ ;  $h:=6$ ;  $L:=0.5$   
`Plot3D[ (4*P*L^3)/(E*b*h^3)+(3*q*L^4)/(2*E*E*b*`  
`h^3), {q,2,4}, {P,4,20}, ColorFunction->Hue]`

*Algorytm 10.*  $L:=0,5$ ;  $b:40$ ;  $h:=6$ ;  $q:=2$   
`Plot3D[ (4*P*L^3)/(E*b*h^3)+(3*q*L^4)/(2*E*E*b*`  
`h^3), {E,2.1*10^5,2.5*10^5}, {P,4,20}, ColorFunction->Hue]`

*Algorytm 11.*  $L:=0,5$ ;  $b:40$ ;  $h:=6$ ;  $P:=4$   
`Plot3D[ (4*P*L^3)/(E*b*h^3)+(3*q*L^4)/(2*E*E*b*`  
`h^3), {E,2.1*10^5,2.5*10^5}, {q,2,4}, ColorFunction->Hue]`

*Algorytm 12.*  $b:40$ ;  $h:=6$ ;  $P:=4$ ;  $q:=2$   
`Plot3D[ (4*P*L^3)/(E*b*h^3)+(3*q*L^4)/(2*E*E*b*`  
`h^3), {E,2.1*10^5,2.5*10^5}, {L,0.5,1}, ColorFunction->Hue]`

*Moduł, szerokość i wysokość belki, siła ciągła*  
*Wykres przestrzenny 3D funkcji*

$\vartheta_0 = \vartheta_0(P, L)$ , (Rys. 2)

*Moduł, szerokość i wysokość belki, siła skupiona*  
*Wykres przestrzenny 3D funkcji*

$\vartheta_0 = \vartheta_0(q, L)$ , (Rys. 3)

*Moduł, długość, szerokość i wysokość belki*  
*Wykres przestrzenny 3D funkcji*

$\vartheta_0 = \vartheta_0(q, P)$ , (Rys. 4)

*Długość, szerokość i wysokość belki, siła ciągła*  
*Wykres przestrzenny 3D funkcji*

$\vartheta_0 = \vartheta_0(P, E)$ , (Rys. 5)

*Długość, szerokość i wysokość belki, siła skupiona*  
*Wykres przestrzenny 3D funkcji*

$\vartheta_0 = \vartheta_0(q, E)$ , (Rys. 6)

*Szerokość i wysokość belki, siły skupiona i ciągła*  
*Wykres przestrzenny 3D funkcji*

$\vartheta_0 = \vartheta_0(L, E)$ , (Rys. 7)

*Moduł, szerokość i wysokość belki, siła ciągła*  
*Wykres przestrzenny 3D funkcji*

$f = f(P, L)$ , (Rys. 8)

*Moduł, szerokość i wysokość belki, siła skupiona*  
*Wykres przestrzenny 3D funkcji*

$f = f(q, L)$ , (Rys. 9)

*Moduł, długość, szerokość i wysokość belki*  
*Wykres przestrzenny 3D funkcji*

$f = f(q, P)$ , (Rys. 10)

*Długość, szerokość i wysokość belki, siła ciągła*  
*Wykres przestrzenny 3D funkcji*

$f = f(P, E)$ , (Rys. 11)

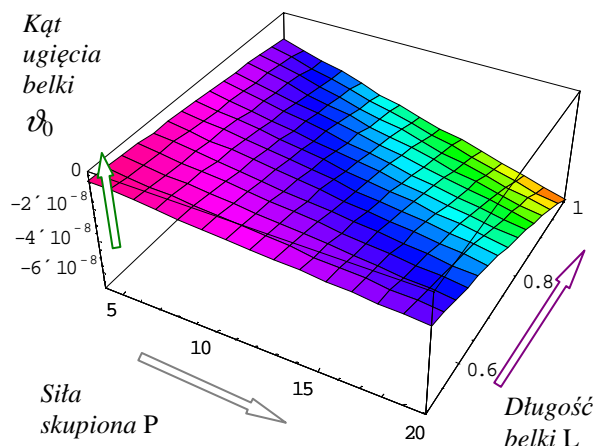
*Długość, szerokość i wysokość belki, siła skupiona*  
*Wykres przestrzenny 3D funkcji*

$f = f(q, E)$ , (Rys. 12)

*Szerokość i wysokość belki, siły skupiona i ciągła*  
*Wykres przestrzenny 3D funkcji*

$f = f(L, E)$ , (Rys. 13)

• Analiza numeryczna funkcji  $\vartheta_0 = \vartheta_0(P, L)$  i  $\vartheta_0 = \vartheta_0(q, L)$  dla kąta ugięcia belki  $\vartheta_0$

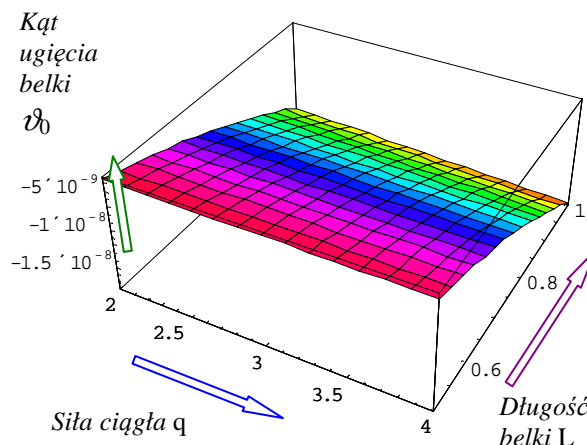


Rys. 2. Wykres przestrzenny 3D funkcji kąta ugięcia belki  $\vartheta_0 = \vartheta_0(P, L)$  zależnej od siły skupionej  $P$  i długości belki  $L$

Źródło: Opracowanie własne Autora

Fig. 2. The graph 3D of function of deflection angle of the beam  $\vartheta_0 = \vartheta_0(P, L)$  dependent of a concentrated force  $P$  and beam length  $L$

Source: Elaboration of the Authors



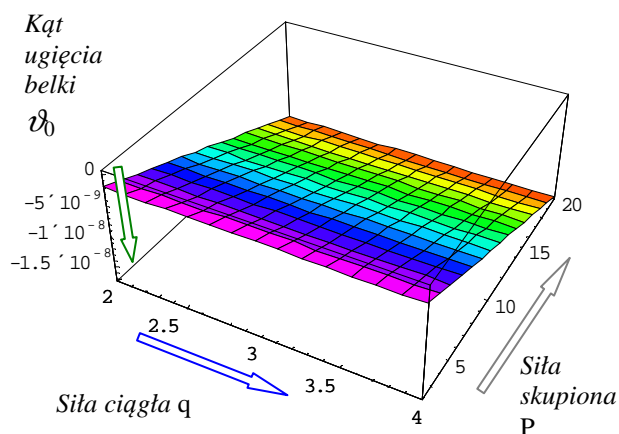
Rys. 3. Wykres przestrzenny 3D funkcji kąta ugięcia belki  $\vartheta_0 = \vartheta_0(q, L)$  zależnej od siły ciągłej  $q$  i długości belki  $L$

Źródło: Opracowanie własne Autora

Fig. 3. The graph 3D of function of deflection angle of the beam  $\vartheta_0 = \vartheta_0(q, L)$  dependent of a continuous force  $q$  and beam length  $L$

Source: Elaboration of the Authors

• Analiza numeryczna funkcji  $\vartheta_0 = \vartheta_0(q, P)$  i  $\vartheta_0 = \vartheta_0(P, E)$  dla kąta ugięcia belki  $\vartheta_0$

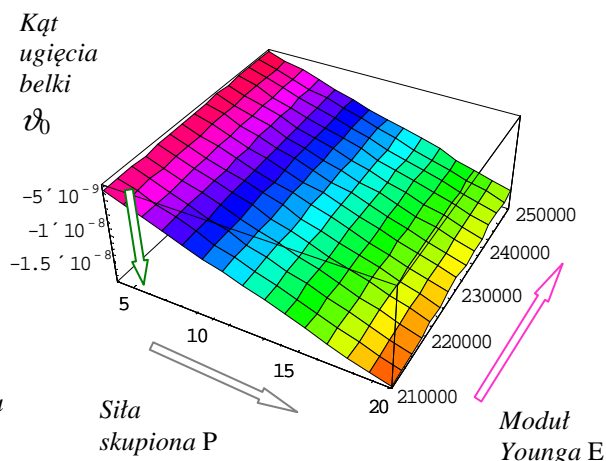


Rys. 4. Wykres przestrzenny 3D funkcji kąta ugięcia belki  $\vartheta_0 = \vartheta_0(q, P)$  zależnej od siły ciągłej  $q$  i siły skupionej  $P$

Źródło: Opracowanie własne Autora

Fig. 4. The graph 3D of function of deflection angle of the beam  $\vartheta_0 = \vartheta_0(q, P)$  dependent of a continuous force  $q$  and concentrated force  $P$

Source: Elaboration of the Authors



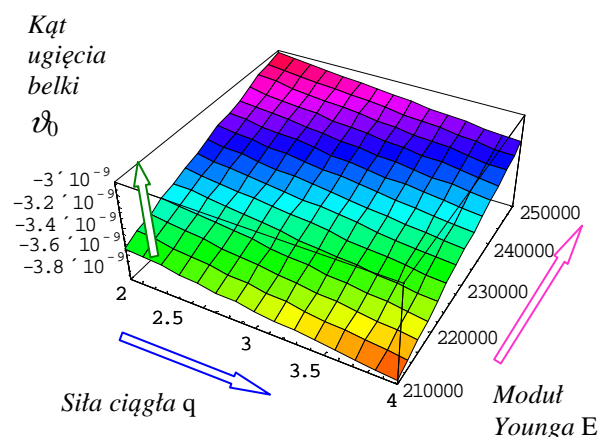
Rys. 5. Wykres przestrzenny 3D funkcji kąta ugięcia belki  $\vartheta_0 = \vartheta_0(P, E)$  zależnej od siły skupionej  $P$  i modułu Younga  $E$

Źródło: Opracowanie własne Autora

Fig. 5. The graph 3D of function of deflection angle of the beam  $\vartheta_0 = \vartheta_0(P, E)$  dependent of concentrated force  $P$  and Young modulus  $E$

Source: Elaboration of the Authors

• Analiza numeryczna funkcji  $\vartheta_0 = \vartheta_0(q, E)$  i  $\vartheta_0 = \vartheta_0(L, E)$  dla kąta ugięcia belki  $\vartheta$

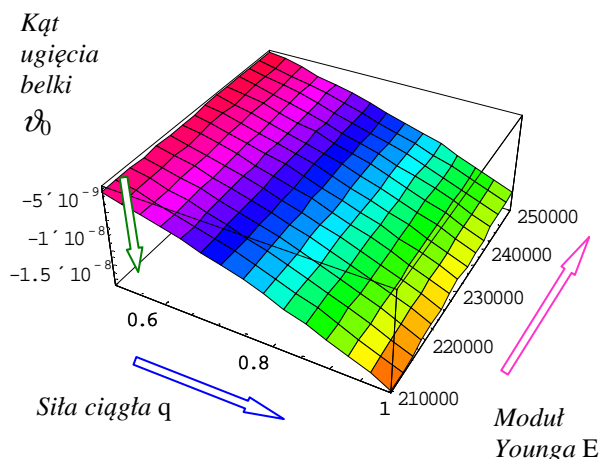


Rys. 6. Wykres przestrzenny 3D funkcji kąta ugięcia belki  $\vartheta_0 = \vartheta_0(q, E)$  zależnej od siły ciągłej  $q$  i modułu Younga  $E$

Źródło: Opracowanie własne Autora

Fig. 6. The graph 3D of function of deflection angle of the beam  $\vartheta_0 = \vartheta_0(q, E)$  dependent of a continuous force  $P$  and Young modulus  $E$

Source: Elaboration of the Authors



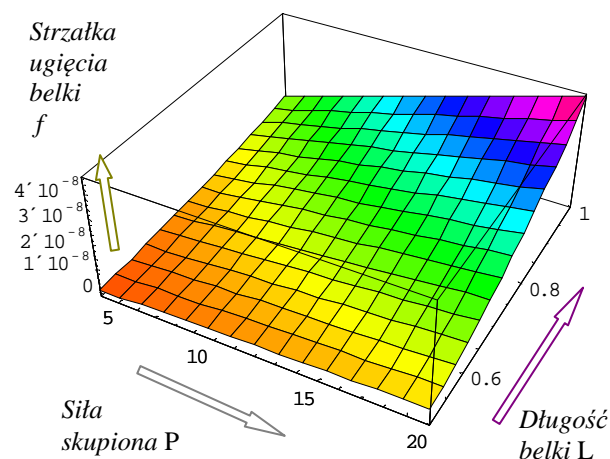
Rys. 7. Wykres przestrzenny 3D funkcji kąta ugięcia belki  $\vartheta_0 = \vartheta_0(L, E)$  zależnej od długości belki  $L$  i modułu Younga  $E$

Źródło: Opracowanie własne Autora

Fig. 7. The graph 3D of function of deflection angle of the beam  $\vartheta_0 = \vartheta_0(q, L)$  dependent of a beam length  $L$  and Young modulus  $E$

Source: Elaboration of the Authors

• Analiza numeryczna funkcji  $f = f(P, L)$  i  $f = f(q, L)$  dla strzałki ugięcia belki  $f$

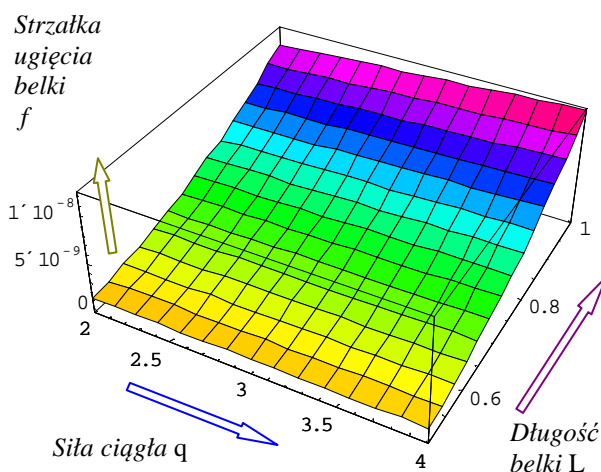


Rys. 8. Wykres przestrzenny 3D funkcji strzałki ugięcia belki  $f = f(P, L)$  zależnej od siły skupionej  $P$  i długości belki  $L$

Źródło: Opracowanie własne Autora

Fig. 8. The graph 3D of function of arrow of beam deflection  $f = f(P, L)$  dependent of a concentrated force  $P$  and beam length  $L$

Source: Elaboration of the Authors



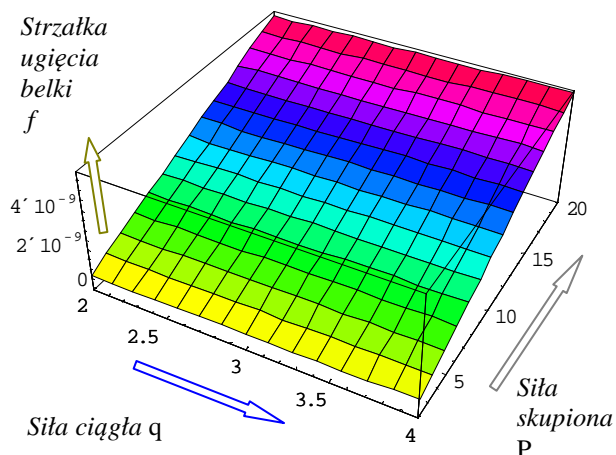
Rys. 9. Wykres przestrzenny 3D funkcji strzałki ugięcia belki  $f = f(q, L)$  zależnej od siły ciągłej  $q$  i długości belki  $L$

Źródło: Opracowanie własne Autora

Fig. 9. The graph 3D of function of deflection angle of the beam  $f = f(q, L)$  dependent of a continuous force  $q$  and beam length  $L$

Source: Elaboration of the Authors

• Analiza numeryczna funkcji  $f = f(q, P)$  i  $f = f(P, E)$  dla strzałki ugięcia belki  $f$

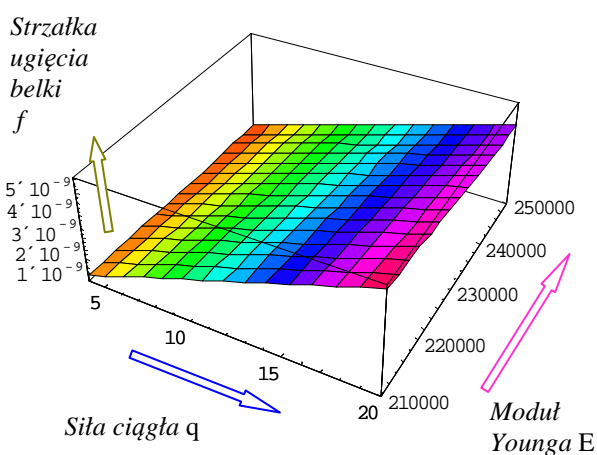


Rys. 10. Wykres przestrzenny 3D funkcji strzałki ugięcia belki  $f = f(q, P)$  zależnej od siły ciągłej  $q$  i siły skupionej  $P$ .

Źródło: Opracowanie własne Autora

Fig. 10. The graph 3D of function of beam deflection arrow  $f = f(q, P)$  dependent of a continuous force  $q$  and concentrated force  $P$

Source: Elaboration of the Authors



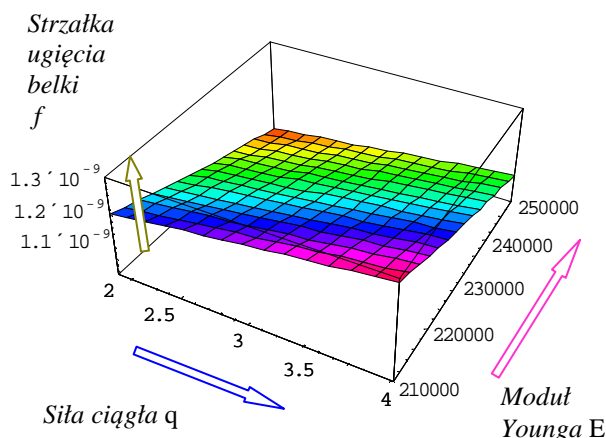
Rys. 11. Wykres przestrzenny 3D funkcji strzałki ugięcia belki  $f = f(P, E)$  zależnej od siły skupionej  $P$  i modułu Younga  $E$ .

Źródło: Opracowanie własne Autora

Fig. 11. The graph 3D of function of beam deflection arrow  $f = f(P, E)$  dependent of a concentrated force  $P$  and Young modulus  $E$

Source: Elaboration of the Authors

• Analiza numeryczna funkcji  $f = f(q, E)$  i  $f = f(L, E)$  dla strzałki ugięcia belki  $f$

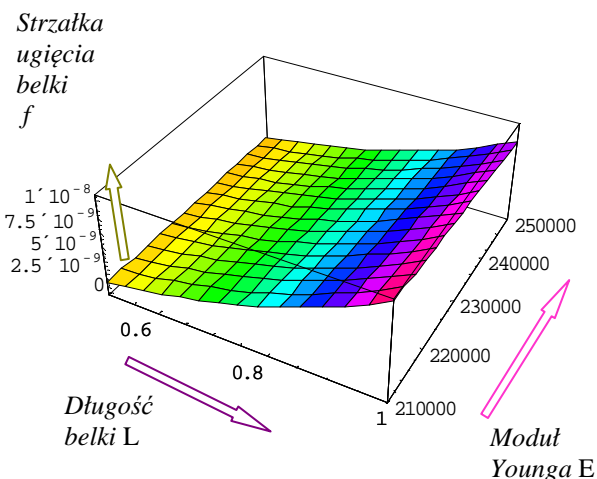


Rys. 12. Wykres przestrzenny 3D funkcji strzałki ugięcia belki  $f = f(q, E)$  zależnej od siły ciągłej  $q$  i modułu Younga  $E$

Źródło: Opracowanie własne Autora

Fig. 12. The graph 3D of function of beam deflection arrow  $f = f(q, E)$  dependent of a continuous force  $q$  and Young modulus  $E$

Source: Elaboration of the Authors



Rys. 13. Wykres przestrzenny 3D funkcji strzałki ugięcia belki  $f = f(L, E)$  zależnej od długości belki  $L$  i modułu Younga  $E$

Źródło: Opracowanie własne Autora

Fig. 14. The graph 3D of function of beam deflection arrow  $f = f(L, E)$  dependent of a beam length  $L$  and Young modulus  $E$

Source: Elaboration of the Authors

### 3. Wnioski

- Modelowanie analityczne belki o danej długości, jednostronnie utwierdzonej o przekroju prostokąta, obciążonej siłą ciągłą równomiernie rozłożoną na całej jej długości oraz siłą skupioną na działającą na jej nieutwierdzonym końcu i danym module Younga pozwala wyprowadzić nie tylko równanie ugięcia belki, ale również wzory na strzałkę i kąt ugięcia belki. Wyprowadzone wzory analityczne umożliwiają przeprowadzenie analizy numerycznej kilkunastu funkcji opisujących kąt i strzałkę ugięcia belki.
- Analiza numeryczna w programie *Mathematica* belki o przekroju prostokąta i o danej długości, jednostronnie utwierdzonej, obciążonej siłą ciągłą równomiernie rozłożoną na całej jej długości oraz siłą skupioną na działającą na jej nieutwierdzonym końcu pozwala na interpretację numeryczną i graficzną dla funkcji kąta ugięcia belki  $\vartheta(P,L)$ ,  $\vartheta(q,L)$ ,  $\vartheta(q,P)$ ,  $\vartheta(P,E)$ ,  $\vartheta(q,E)$ ,  $\vartheta(L,E)$  oraz dla funkcji strzałki ugięcia belki  $f(P,L)$ ,  $f(q,L)$ ,  $f(q,P)$ ,  $f(P,E)$ ,  $f(q,E)$ ,  $f(L,E)$ , gdzie  $q$  to siła ciągła,  $P$  - siła skupiona,  $L$  - długość belki,  $E$  - moduł Younga materiału belki.

### Literatura

- [1] Drwal G., Grzymkowski R., Kapusta A., Słota D.: *Mathematica 4*. Wyd. Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 2000.
- [2] Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłowski Z.: *Wytrzymałość materiałów Tom 1*, WNT, Warszawa 1996.
- [3] Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłowski Z.: *Wytrzymałość materiałów Tom 2*, WNT, Warszawa 1997.
- [4] Grabowski Jan, Iwanczeska Anna: *Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1997, Rozdział 6, w. V, s. 169-188.
- [5] Huber Maksymilian Tytus: *Stereomechanika techniczna (Wytrzymałość materiałów) Część II*. PZWS, Warszawa 1951, Rozdział 10, s. 1-60.
- [6] Kubiak J., Mielniczuk J., Wilczyński A.: *Mechanika techniczna*, WNT, Warszawa 1983.
- [7] Trott M.: *The Mathematica for Graphics. Guide Book*. Springer Science+Business, Inc., 2004, USA.
- [8] Wolfram S.: *The Mathematica Book, 4<sup>th</sup> edition*. Wolfram Media and Cambridge University Press, Champaign and Cambridge 1999.
- [9] Wolny A., Siemieniec A.: *Wytrzymałość materiałów, Część 1 Teoria – Zastosowanie*. Wyd. AGH, Kraków 2000.
- [10] Wolny A., Siemieniec A.: *Wytrzymałość materiałów, Część 2 Wybrane zagadnienia wytrzymałości materiałów*. Wyd. AGH, Kraków 2004.
- [11] Zielnica J.: *Wytrzymałość materiałów*. Wyd. Pol. Poznańskiej, Poznań 1998.