



Wyznaczanie opływu profilu i sił aerodynamicznych działających na profil poruszający się ruchem trzepoczącym metodą cząstek wirowych

Tomasz Kozłowski, Henryk Kudela

Politechnika Wroclawska, Wydział Mechaniczno-Energetyczny

Katedra Technologii Energetycznych, Turbin i Modelowania Procesów Ciepłno-Przepływowych

E-mail: tomasz.kozlowski@pwr.edu.pl

STRESZCZENIE

W pracy przedstawiono wyniki obliczeń numerycznych efektów aerodynamicznych, które powstają w ruchu trzepoczącym. Wybrano kinematykę właściwą dla małych owadów, które poruszają się w zakresie małych liczb Reynoldsa. Aby uchwycić zjawiska fizyczne decydujące o powstawaniu siły nośnej, model ruchu trzepoczącego został uproszczony. Zagadnienie zredukowano do dwóch wymiarów, natomiast skrzydło zastąpiono elipsą. W zakresie małych liczb Reynoldsa pole wirowości wokół profilu jest uporządkowane i wytwarzane w sposób okresowy. Do precyzyjnego śledzenia pola wirowego najwygodniej jest wykorzystać metody wirowe, dlatego w obecnej pracy zastosowano metodę cząstek wirowych typu „Wir w Komórce”. Metodę cząstek wirowych sformułowano dla zagadnień w obszarach o nieregularnych kształtach, wykorzystując technikę odwzorowania konforemnego.

SŁOWA KLUCZOWE: *metoda cząstek wirowych, ruch trzepoczący, siła nośna, dynamiczne przeciągnięcie, wir krawędzi natarcia*

1. WPROWADZENIE

Lot w którym skrzydło wykonuje ruch trzepoczący jest bardzo złożony z punktu widzenia mechaniki płynów i wytwarzania sił aerodynamicznych. Samolot nie porusza skrzydłami, przemieszcza się i utrzymuje w powietrzu na skutek odpowiedniej geometrii profilu skrzydeł i siły ciągu wytwarzanej przez silniki. Skrzydła ptaków i owadów mogą się obracać, poruszać przeciwnie do kierunku ruchu oraz w górę i w dół. Taki ruch nazywany jest w literaturze ruchem trzepoczącym (ang. *flapping motion*). Zróżnicowana trajektoria ruchu skrzydła [18], pióra, czy elastyczność skrzydeł sprawiają, że trójwymiarowy model matematyczny, precyzyjnie ujmujący zjawiska przepływowe

wywołane ruchem trzepoczącym jest niezwykle złożony. Aby lepiej zrozumieć mechanizmy generacji sił na ruchomym profilu zasadne wydaje się sprowadzić zagadnienia do dwóch wymiarów. Podejście dwuwymiarowe jest szeroko stosowane w pracach poświęconych aerodynamice ruchu trzepoczącego [4, 7, 13]. W obecnej pracy uproszczono również model skrzydła. Profil sprowadzono do cienkiej, nieodkształcalnej elipsy. Ponieważ badania dotyczyły aerodynamiki małych prędkości, przyjęto płyn nieściśliwy.

Mechanizmy powstawania siły nośnej i siły oporu na ruchomych skrzydłach ptaków i owadów zdeterminowane są przez ciągłe wytwarzanie struktur wirowych oraz ich transport i wzajemną interakcję. Takie zjawiska umownie nazywać będziemy efektami niestacjonarnymi. Typ ścieżki wirowej obserwowany za poruszającym się profilem decyduje o rozkładzie sił aerodynamicznych na profilu [8, 9, 16]. Wydaje się jednak, że o typie obserwowanej ścieżki wirowej decydować będzie dynamika pola wirowości w bliskim sąsiedztwie profilu. Wymienia się trzy podstawowe niestacjonarne efekty odpowiedzialne za powstawanie sił aerodynamicznych blisko ciała [13, 15, 18, 24]:

- Opóźnione oderwanie wiru krawędzi natarcia (LEV - ang. *Leading Edge Vortex*).
- Siła nośna wywołana obrotem skrzydła.
- Interakcja skrzydła ze śladem aerodynamicznym.

Wśród niestacjonarnych mechanizmów generacji siły nośnej podaje się również mechanizm *Clap-and-Flying*, który wprowadził po raz pierwszy Weis-Fogh [21]. Efekt ten nie jest właściwy wszystkim owadom, ponadto jest rzadko wykorzystywany w locie swobodnym, dlatego uważa się, że nie może stanowić podstawowego mechanizmu generacji siły nośnej [12, 15]. Dla skrzydła pracującego z ciągłą zmianą kąta natarcia szczególnie istotne jest niedopuszczenie do zjawiska dynamicznego przeciągnięcia. Zatrzymanie wiru (LEV) na górnej krawędzi profilu (opóźnione jego oderwanie z krawędzi natarcia) może być podstawowym zjawiskiem intensyfikującym siłę nośną na skrzydłach ptaków i owadów [3, 13]. Efekt ten może być dodatkowo wspierany przez obrót oraz interakcję ze śladem aerodynamicznym [3, 15, 18]. Wizualizacje eksperymentalne przeprowadzone w pracy [5] wskazują, że zjawiskiem odpowiedzialnym za opóźnione oderwanie może być mechanizm obserwowany w trzech wymiarach. Wyjaśnieniem mechanizmu opóźnienia dynamicznego przeciągnięcia w ruchu trzepoczącym może być także mała amplituda ruchu trzepoczącego [24]. Jeżeli amplituda ruchu będzie mała, wir krawędzi natarcia pozostanie przy ścianie, dlatego dodatkowe mechanizmy stabilizujące LEV nie będą wymagane.

W obecnej pracy wykorzystano dwa powszechnie znane opisy kinematyki ruchu trzepoczącego, właściwe małym owadom [22, 23]. Przyjęto, że ruch profilu jest zadany, a siły od płynu i siła grawitacji nie modyfikują ruchu profilu. Porównano pole wirowe oraz siły aerodynamiczne wytwarzane w zakresie liczb Reynoldsa: $75 < Re < 2000$. Przyjęto, że w zakresie małych liczb Reynoldsa obserwacja pola wirowego i separacji warstwy przyściennej na ścianie pozwoli uzupełnić informację o generacji sił na ruchomym profilu.

Do modelowania ruchu ciał w płynie zastosowano metodę cząstek wirowych typu „Wir w Komórce” sformułowaną dla płynu nieściśliwego, która na przestrzeni ostatnich lat osiągnęła stan dojrzałości i pod względem dokładności i szybkości w pełni konkuruje z innymi metodami numerycznego rozwiązywania równań ruchu cieczy [1, 2]. Metodę rozwinięto do badań w dwuwymiarowych obszarach nieregularnych, wykorzystując technikę odwzorowania konforemne. Przekształcenie konforemne pozwala za-

stąpić nieregularny fizyczny obszar przepływu, obszarem prostokątnym. W obszarze prostokątnym zastosować można szybkie bezpośrednio algorytmy rozwiązywania równania Poissona, które charakteryzują się oszczędnością czasu obliczeń i pamięci komputera. Opracowana metoda cząstek wirowych doskonale nadaje się do badań efektów aerodynamicznych generowanych w ruchu trzepoczącym dzięki bezpośredniej analizie pola wirowości i efektywności zastosowanego algorytmu rozwiązywania równań ruchu płynu.

2. RÓWNANIA RUCHU I OPIS METODY „WIR W KOMÓRCE”

Modelowanie niestacjonarnych zjawisk aerodynamicznych charakterystycznych dla ruchomych obiektów wymaga wyboru układu odniesienia, w którym prowadzi się obliczenia. W takich zagadnieniach wygodnie jest przyjąć układ związany z poruszającym się ciałem. Równania Naviera-Stokesa w zmiennych pierwotnych (\mathbf{u}, p), w układzie odniesienia związanym z poruszającym się ciałem (układ nieinercyjny), przy pominięciu siły grawitacji, można przedstawić w postaci [23]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}_p \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

gdzie $\mathbf{u} = (u, v)$ oznacza wektor prędkości, natomiast \mathbf{f}_p oznacza pozostałe człony wynikające z istnienia sił pozornych w układach nieinercyjnych:

$$\mathbf{f}_p = -\frac{d\mathbf{U}_0}{dt} - \left[\frac{d\boldsymbol{\Omega}_0}{dt} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega}_0 \times (\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{r}) \right] \quad (3)$$

gdzie: $\mathbf{r} = [x, y]$ oznacza wektor położenia, a \mathbf{U}_0 i $\boldsymbol{\Omega}_0$ – odpowiednio: wektor prędkości ruchu postępowego i wektor prędkości kątowej dla ciała poruszającego się w płynie.

Działając na równanie (1) operatorem rotacji, otrzymuje się równania ruchu płynu sformułowane dla funkcji prądu i wirowości:

$$\frac{\partial(\omega + 2\Omega_0)}{\partial t} + (\nabla \omega) \cdot \mathbf{u} = \nu \Delta \omega \quad (4)$$

$$\Delta \psi = -\omega \quad (5)$$

Ruch trzepoczący wygodnie jest badać wykorzystując równania ruchu płynu zapisane w postaci bezwymiarowej. Wykorzystano następujące wielkości bezwymiarowe:

$$x' = \frac{x}{c}, \quad u' = \frac{u}{U_0}, \quad t' = \frac{tU_0}{c}, \quad p' = \frac{p}{\rho U_0^2}, \quad \Omega'_0 = \frac{\Omega_0 c}{U_0}, \quad Re = \frac{U_0 c}{\nu} \quad (6)$$

gdzie c oznacza cięciwę (długość) profilu, ν – kinematyczny współczynnik lepkości, ρ – gęstość, U_0 – charakterystyczną prędkość i Ω_0 – prędkość kątową. Stosując relacje (6), równania ruchu płynu w zmiennych (ψ, ω), zapisane w nieinercyjnym układzie odniesienia, przy pominięciu siły grawitacji, można zapisać w postaci [7]:

$$\frac{\partial(\omega' + 2\Omega'_0)}{\partial t'} + (\nabla \omega) \cdot \mathbf{u}' = \frac{1}{Re} \Delta \omega' \quad (7)$$

$$\Delta \psi' = -\omega' \quad (8)$$

Ponieważ wszystkie równania poniżej będą zapisane w postaci bezwymiarowej, znak *prim* zostanie pominięty.

Funkcję prądu daleko od ciała, która uwzględnia ruch obrotowy Ω_0 i ruch postępowy U_0 można przedstawić w następujący sposób [7]:

$$\psi_\infty = U_0(y \cos(\alpha) - x \sin(\alpha)) - \frac{\Omega_0}{2}(x^2 + y^2) \quad (9)$$

Wprowadzając zamianę zmiennych:

$$\omega^* = \omega + 2\Omega_0 \quad \text{i} \quad \psi^* = \psi - \psi_\infty \quad (10)$$

otrzymuje się obraz efektów ruchu ciała w płynie, postrzegany przez nieruchomego obserwatora.

2.1. Metoda cząstek wirowych we współrzędnych konforemnych

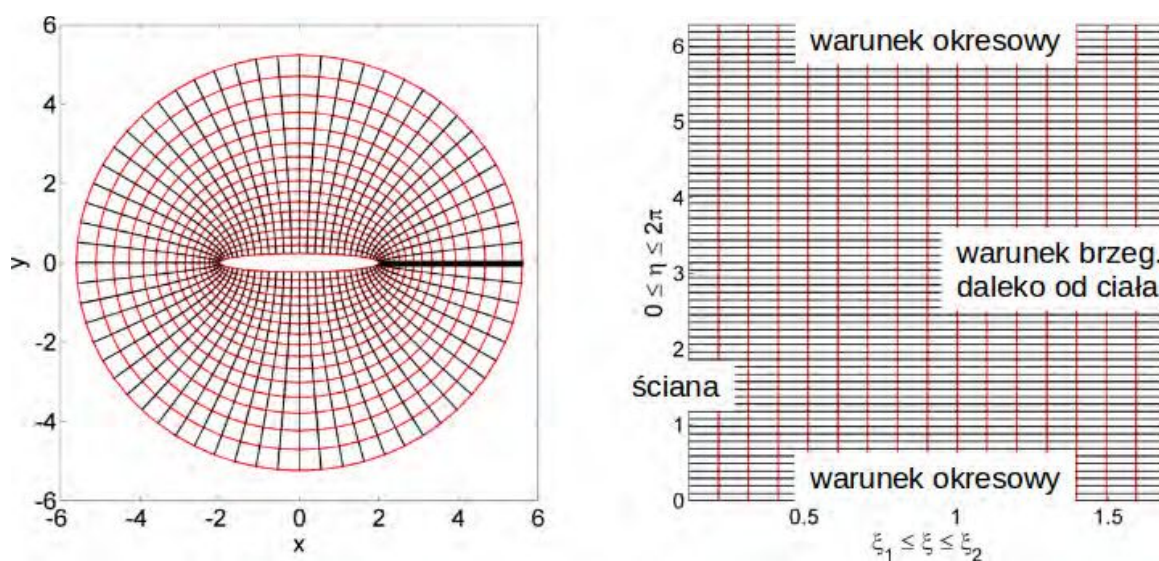
Aby lepiej dopasować siatkę numeryczną do brzegu ciała wykorzystaliśmy przekształcenie konforemne. Nieregularny, fizyczny obszar we współrzędnych (x, y) zastąpiony został obliczeniowym obszarem prostokątnym (ξ, η) , w którym zastosować można szybkie algorytmy do rozwiązywania równania Poissona. W pracy wykorzystano przekształcenie konforemne dla elipsy (rys. 1):

$$x + iy = \cosh(\xi + i\eta) \quad (11)$$

W nowych zmiennych (ξ, η) , po uwzględnieniu równań (10), równania ruchu (7), (8) są postaci (symbol * został pominięty):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\nabla \omega) \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{Re \cdot J} \Delta \omega \quad (12)$$

$$\Delta \psi = -J\omega \quad (13)$$



Rys. 1: Eliptyczna siatka numeryczna po stronie lewej i równomierny obszar obliczeniowy po stronie prawej. Warunek zszycia obszaru (okresowości) zrealizowany jest na pogrubionej linii, rysunek po lewej

gdzie J oznacza Jakobian transformacji układu współrzędnych. Fizyczne składowe pola prędkości $\mathbf{u}(u, v)$ wiąże się z funkcją prądu w następujący sposób:

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad v(\xi, \eta) = -\frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad (14)$$

Zerowanie składowej normalnej prędkości na ścianie jest realizowane przez przyjęcie stałej funkcji prądu $\psi = \text{const}$. Warunek braku poślizgu uzyskuje się wprowadzając odpowiednią porcję wirowości [1, 26], która zapewnia zerowanie składowej stycznej prędkości $\mathbf{u} \cdot \mathbf{s}^0 = 0$, gdzie \mathbf{s}^0 oznacza wektor styczny do brzegu.

W metodach cząstek wirowych ciągle pole wirowe zastępowane jest dyskretnym rozkładem cząstek. Obszar przepływu pokrywa się regularną siatką: $h = \Delta\eta = \Delta\xi$. W każdym oczku siatki umieszcza się cząstkę wirową o cyrkulacji:

$$\Gamma_p = \int_A \omega d\xi d\eta \quad (15)$$

gdzie $A = h^2$, przy czym:

$$\omega(\xi, \eta) = \sum_p \Gamma_p \delta(\xi - \xi_p) \delta(\eta - \eta_p) \quad (16)$$

2.2. Algorytm metody wirowej typu „wir w komórce”

Do rozwiązania równań (12), (13) wykorzystano algorytm dekompozycji lepkościowej. Na początku rozwiązuje się równanie nielepkie:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\nabla \omega) \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (17)$$

Z równania (17) wynika, że wzdłuż trajektorii cząstki płynu wirowość jest stała. Zgodnie z twierdzeniami Helmholtza, cząstki wirowe poruszają się jak materialne cząstki płynu [26]. Równanie różniczkowe cząstkowe (17) zastąpić można nieskończonym układem równań zwyczajnych:

$$\frac{d\xi_p}{dt} = u_p, \quad \frac{d\eta_p}{dt} = v_p, \quad \xi_p(0) = \alpha_1, \quad \eta_p(0) = \alpha_2 \quad (18)$$

gdzie $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ oznacza początkowe współrzędne położenia cząstek płynu. W obliczeniach numerycznych nieskończoną liczbę cząstek zastępujemy skończoną, umieszczając cząstki w węzłach siatki. Liczba cząstek jest równa liczbie oczek siatki. Układ równań (18) rozwiązano metodą Rungego-Kutty rzędu czwartego. Pole prędkości wyznaczono przez rozwiązanie równania Poissona (13) na siatce numerycznej i uwzględniając równania (14). Wartości prędkości dla cząstek położonych między węzłami, obliczono przez interpolację z węzłów na chwilowe położenia cząstek:

$$u(\xi_p, \eta_p) = \sum_{ij} l_{ij}(\xi_p, \eta_p) u_{ij} \quad (19)$$

gdzie ij odnosi się do numeru węzła siatki, a l_{ij} oznacza dwuwymiarową bazę interpolacyjną wielomianów Lagrange’a.

Ponieważ cząstki wirowe mają tendencję do koncentracji w obszarach o znacznych gradientach prędkości, w każdym kroku czasowym wykonano proces redystrybucji. Informacja o wirowości z cząstek została przeniesiona na oczka siatki numerycznej (i, j) przez interpolację:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{h^2} \sum_p \Gamma_p \varphi_{hi}(\xi) \varphi_{hj}(\eta) \quad (20)$$

gdzie:

$$\varphi_{hi}(\xi) = \varphi\left(\frac{\xi - \xi_i}{h}\right), \quad \varphi_{hj}(\eta) = \varphi\left(\frac{\eta - \eta_j}{h}\right) \quad (21)$$

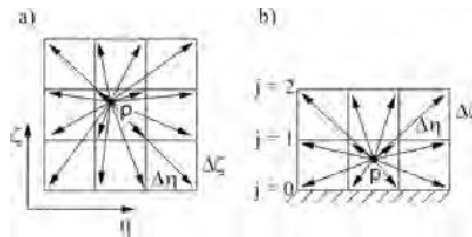
gdzie indeks p oznacza numer cząstki, a $\varphi(\cdot)$ – jądro interpolacyjne. Sposób przekazywania informacji o wirowości z cząstek na węzły siatki numerycznej pełni fundamentalną rolę dla dokładności metod cząstek wirowych. W pracy redystrybucję zrealizowano wykorzystując interpolacyjne funkcje Z -sklejane [14]. Podstawową zaletą funkcji Z -sklejanych jest łatwa konstrukcja formuł wysokiego rzędu i formuł jednostronnych do zastosowania w pobliżu brzegu. Formuła czwartego rzędu wykorzystana w obecnej pracy jest postaci:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}|x|^3 & \text{dla } |x| < 1 \\ \frac{1}{2}(2 - |x|)^2(1 - |x|) & \text{dla } 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & \text{dla } |x| > 2 \end{cases} \quad (22)$$

Dla cząstek w bliskim sąsiedztwie ściany wykorzystano formuły jednostronne, które wprowadzone zostały zgodnie z przepisem podanym w pracy [14]:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}|x| & \text{dla } j = 0, |x| \leq 1 \\ -x^2 + 2|x| & \text{dla } j = 1, |x| \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}|x| & \text{dla } j = 2, |x| \leq 1 \end{cases} \quad (23)$$

Schemat procesu redystrybucji przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2: Redystrybucja wirowości z cząstek na węzły siatki numerycznej. a) dla cząstek, które znajdują się w odległości większej niż jedna komórka od brzegu, b) dla cząstek w sąsiedztwie ścianki

Oba jądra interpolacyjne zachowują trzy pierwsze momenty funkcji interpolującej:

$$\sum_p x_p^\alpha \varphi\left(\frac{x_p - x}{h}\right) = x^\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2 \quad (24)$$

co zapewnia, że interpolacja jest dokładna dla wielomianów stopnia drugiego [1].

Po procesie redystrybucji uwzględnia się lepkość przez rozwiązanie równania dyfuzji na siatce numerycznej:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{Re \cdot J} \Delta \omega \quad (25)$$

$$\omega(\xi_i, \eta_j, t_n) = \omega_0, \quad \omega|_{wall} = \omega_{(0,j)s} \quad (26)$$

gdzie $\omega_{(0,j)s}$ oznacza wirowość na ścianie, a t_n : n -tą warstwę czasową. Warunek braku poślizgu: $u = 0$, uzyskuje się wprowadzając wirowość na ścianie: $\omega_{(0,j)s} = -\psi_{\eta\eta}/J$. Wartość $\psi_{\eta\eta}$ wyznaczono z wzoru Briley'a, [25]:

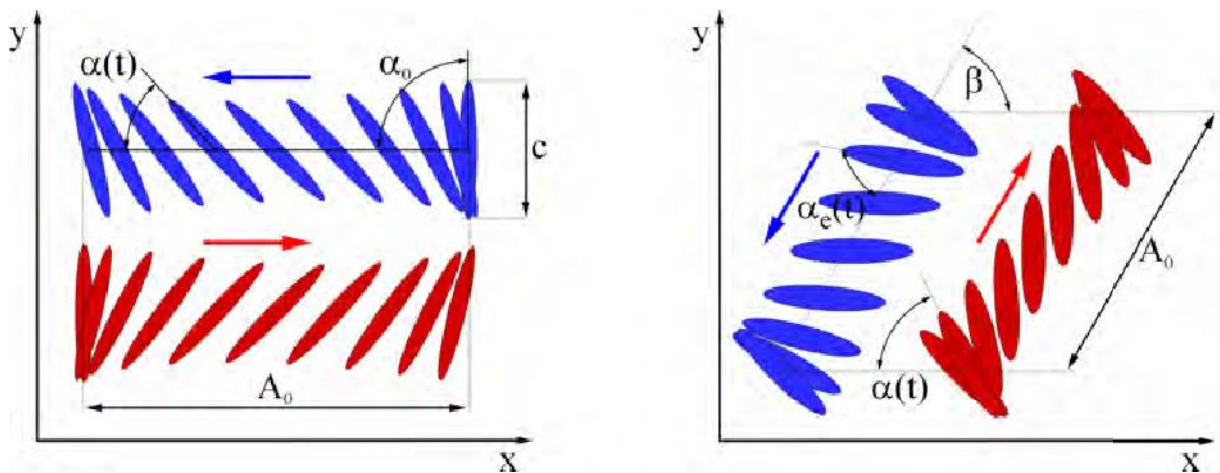
$$\omega_{(0,j)s} = \frac{1}{J} \frac{108\psi_{1,j} - 27\psi_{2,j} + 4\psi_{3,j}}{18h^2} + O(h^4) \quad (27)$$

gdzie h oznacza wymiar oczka siatki, indeks $i = 0$ odnosi się do ścianki, a indeksy $j = 1, 2, 3$ do kolejnych oczek siatki (jh) od brzegu. Do rozwiązania równania dyfuzji, wykorzystano metodę naprzemiennych kierunków (ang. *ADI – Alternating Direction Implicit*). Rozwiązanie równania dyfuzji kończy n -ty krok czasowy metody cząstek wirowych.

Metoda typu „wir w komórce” została bardzo dokładnie przetestowana zarówno dla zagadnień ze znanym rozwiązaniem analitycznym, jak również dla zagadnień z dobrze udokumentowanymi wynikami eksperymentalnymi [10, 11].

3. MODELOWANIE RUCHU TRZEPOCZĄCEGO

W pracy przeprowadzono badania numeryczne dla dwóch znanych modeli ruchu trzepoczącego, rys. 3. Oba modele właściwe są dla małych owadów poruszających się w zakresie niewielkich liczb Reynoldsa. W pracach dotyczących aerodynamiki małych prędkości, ruch trzepoczący dzieli się zwykle na cykle [18, 24]. Na jeden cykl składa się ruch skrzydła w przód i ruch wstecz (przyjęto, że ruch w przód, to ruch w prawo), lub w dół i w górę. Skrzydło sprowadzono do cieniejszy elipsy o długości cięciwy c , które porusza się z amplitudą A_0 , pod kątem β , mierzonym od osi x przy kącie natarcia $\alpha(t)$, patrz rys. 3.



Rys. 3: Dwuwymiarowy model ruchu trzepoczącego; a) trzepotanie wzdłuż osi x , b) trzepotanie w kierunku nachylonym do osi x , pod kątem β

3.1. Podstawowe parametry ruchu trzepoczącego

Ruch trzepoczący wygodnie jest analizować posługując się pewnymi charakterystycznymi liczbami bezwymiarowymi. Podstawową liczbą wykorzystywaną w badaniach ruchu ciał w płynie jest częstotliwość zredukowana [16, 18]:

$$k = \frac{fc}{U_0} \quad (28)$$

gdzie f oznacza częstotliwość trzepotania, c – cięciwę profilu i U_0 – charakterystyczną prędkość. Wykorzystując relację $t' = tU_0/c$ (formuły (6)), definicję częstotliwości zredukowanej k oraz bezwymiarową amplitudę przemieszczenia $A_C = A_0/c$, równania ruchu profilu (rys. 3) przedstawić można w postaci bezwymiarowej:

$$A(t) = \frac{A_C}{2} \cos(2\pi kt) \quad (29)$$

$$[x(t), y(t)] = A_C [\cos(\beta), \sin(\beta)] \quad (30)$$

przy czym pominięto indeks górny *prim* dla zmiennej t . Prędkość obliczono różniczkując składowe wektora przemieszczenia profilu

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \Omega_0 \times \mathbf{r}$$

Oś obrotu umieszczono w środku ciężkości profilu. Zmianę kąta natarcia opisuje się wzorem:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_A \cos(2\pi kt), \quad \Omega_0 = \frac{d\alpha}{dt} \quad (31)$$

gdzie α_0 oznacza początkowy kąt natarcia, α_A amplitudę kątową i Ω_0 prędkość kątową profilu. Niekiedy określa się również efektywny kąt natarcia α_e , mierzony w odniesieniu do kierunku ruchu $\alpha_e(t) = \alpha(t) + \beta$. Jeden pełny cykl ruchu trzepoczącego, na który składa się ruch w przód i ruch wstecz, odpowiada pełnemu okresowi w równaniach (29)-(31), w bezwymiarowym czasie: $kt = 1$.

Liczbę Reynoldsa w ruchu trzepoczącym obliczono w relacji do prędkości maksymalnej środka ciężkości profilu $U_{ref} = A_C \pi k$, [18, 19, 24]:

$$Re = \frac{U_{ref} c}{\nu} = \frac{\pi f A_0 c}{\nu} \quad (32)$$

Typowe parametry opisujące omawiany dwuwymiarowy ruch trzepoczący, które przyjęto w obecnej pracy, przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1: Przyjęte parametry ruchu trzepoczącego dla modeli zamieszczonych na rys. 3, [22, 24].
Parametr k zdefiniowano za pomocą wzoru (28)

ruch skrzydła	β	α_0	α_A	A_C	k
a) wzdłuż osi x	0	$\pi/2$	$\pi/4$	2.8	0.114
b) w kierunku nachylonym do osi x	$\pi/3$	$\pi/4$	$-\pi/4$	2.5	0.127

3.2. Współczynniki sił aerodynamicznych

Siły aerodynamiczne działające na profil wyznaczone zostały z równania:

$$\mathbf{F} = \int_S (-p \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}) dS \quad (33)$$

gdzie $\boldsymbol{\tau}$ oznacza naprężenia styczne na ścianie. Całkowitzą siłę \mathbf{F} rozłożono następnie na składową pionową F_y i poziomą F_x . Siła pionowa skierowana w górę i w dół będzie nazywana odpowiednio: dodatnią i ujemną siłą nośną. Współczynniki sił aerodynamicznych obliczano z zależności:

$$C_D = F_x / \frac{\rho}{2} U_{ref}^2 cb, \quad C_L = F_y / \frac{\rho}{2} U_{ref}^2 cb \quad (34)$$

przy czym U_{ref} opisuje maksymalną prędkość skrzydła w jednym cyklu, b oznacza umowną rozpiętość skrzydła ($b = 1$). Przyjeliśmy także: $\rho = 1$.

4. WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

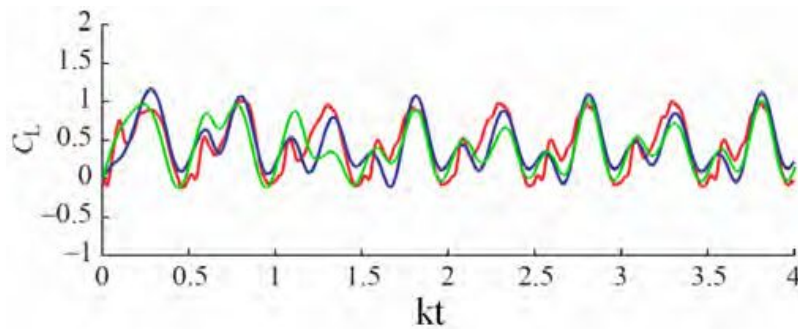
Do obliczeń wybrano współrzędne eliptyczne, rys. 1, które odwzorowano następnie na równomierną siatkę prostokątną stosując przekształcenie konforemne. Eliptyczny profil porusza się ruchem opisanym przez równania (29) i (30), z kątem natarcia danym wzorem (31). Typowe parametry kinematyki ruchu trzepoczącego wykorzystane w pracy, zamieszczono w tabeli 1. Obliczenia rozpoczynano przyjmując za warunek początkowy prędkość skrzydła i kąt natarcia dany wzorami (29), (30), (31), dla $t = 0$ oraz płyn w spoczynku. Fizyczny obszar przepływu przetransformowano na równomierną siatkę prostokątną o rozmiarze $n_\xi \times n_\eta = 256 \times 256$ dla $Re \leq 125$ i 512×512 dla wyższych liczb Reynoldsa. Przyjęto obszar obliczeniowy $\{\xi_1 \leq \xi \leq \xi_1 + 2\pi, 0 \leq \eta \leq 2\pi\}$, przy czym założono, że $\xi_1 = 0, 125$ i $0, 2$, co odpowiada grubości elipsy $b/c \approx 0.125$ i $0, 20$. Krok czasowy zmniejszano wraz z liczbą Re . Wybrano $\Delta t = 0, 01$ dla $Re \leq 125$, następnie $\Delta t = 0, 005$ przy $Re = 500$ i $\Delta t = 0, 0025$ dla $Re = 1000$. Ilość oczek siatki numerycznej dobrano w taki sposób, że dalsze zwiększanie rozdzielczości siatki nie miało wpływu na wynik obliczeń.

4.1. Ruch wzdłuż osi x – weryfikacja wyników

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla pierwszych pięciu cykli ruchu trzepoczącego dla liczby Reynoldsa $Re = 75$, na przedziale czasu bezwymiarowego $kt = (0, 5)$. Na rysunku 4, przedstawiono porównanie obliczonego współczynnika siły nośnej C_L (kolor zielony), przy ruchu wzdłuż osi x (rys. 3, tabela 1), z wynikami eksperymentalnymi (kolor czerwony) i wynikami obliczeń numerycznych (kolor niebieski) opublikowanymi w pracy [24]. W eksperymencie zamieszczonym w cytowanej pracy siłę nośną mierzono w odległości 70% rozpiętości skrzydła od miejsca zamocowania do sztucznego tułowia. Po dwóch cyklach ruchu trzepoczącego otrzymano bardzo dobrą zgodność z wynikami eksperymentalnymi, co potwierdza zasadność uproszczenia zagadnienia do dwóch wymiarów.

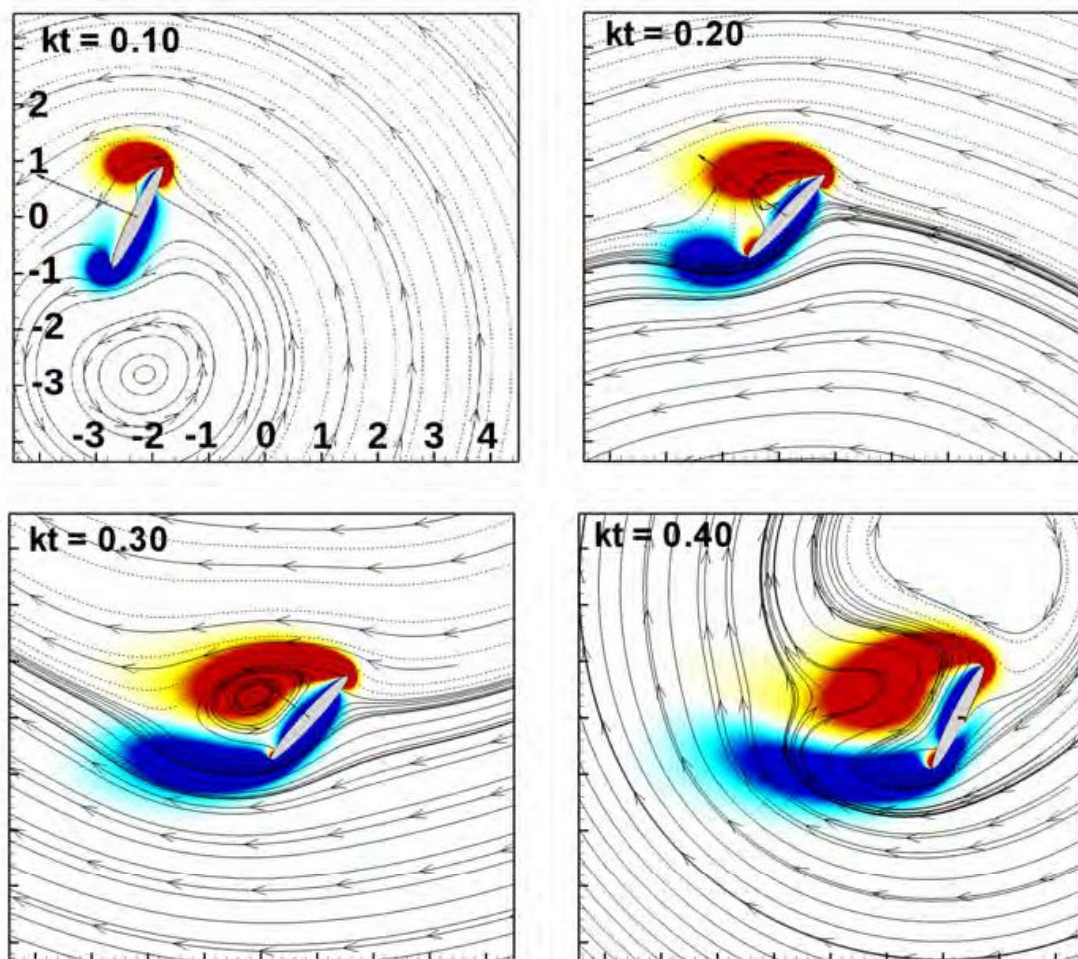
4.2. Rozkłady linii prądu i wirowości

Dla liczb Reynoldsa w zakresie $10 < Re < 100$, wytwarzana wirowość jest niewielka i na skutek dużej lepkości szybko dyfunduje w obszarze przepływu. Rozkład

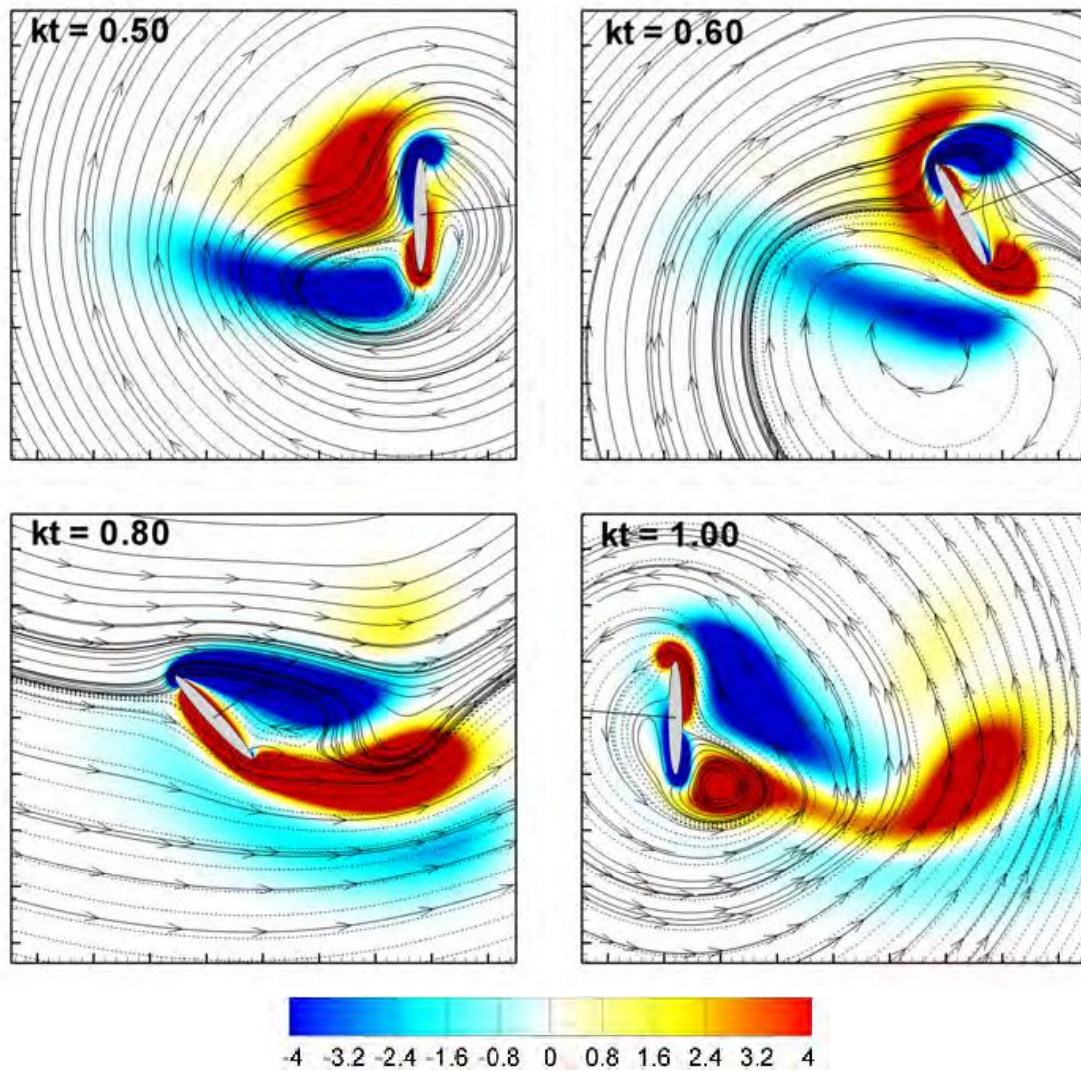


Rys. 4: Porównanie współczynnika siły nośnej w pierwszych czterech cyklach trzepotania, obliczonego dla parametrów przedstawionych w tabeli 1a. Kolorem zielonym oznaczono wynik niniejszej pracy, kolorem czerwonym wyniki eksperymentalne i kolorem niebieskim wyniki obliczeń numerycznych 2D zamieszczone w pracy [24]. Na wykresie przedstawiono współczynnik siły nośnej obliczony dla średniej kwadratowej prędkości ruchu trzepoczącego U_{RMS}

wirowości może jedynie zakrzywiać linie prądu, nie tworząc zamkniętych linii prądu obszarów, w których wiruje płyn. Linie prądu wykreślono w układzie odniesienia związanym z ciałem (płyn porusza się względem nieruchomego ciała), w którym na brzegu jest: $\psi = \text{const}$. W takim układzie odniesienia wygodnie jest obserwować efekt odrywania warstwy przyściennej i separacji wiru z krawędzi grzbietowej profilu. Na ry-



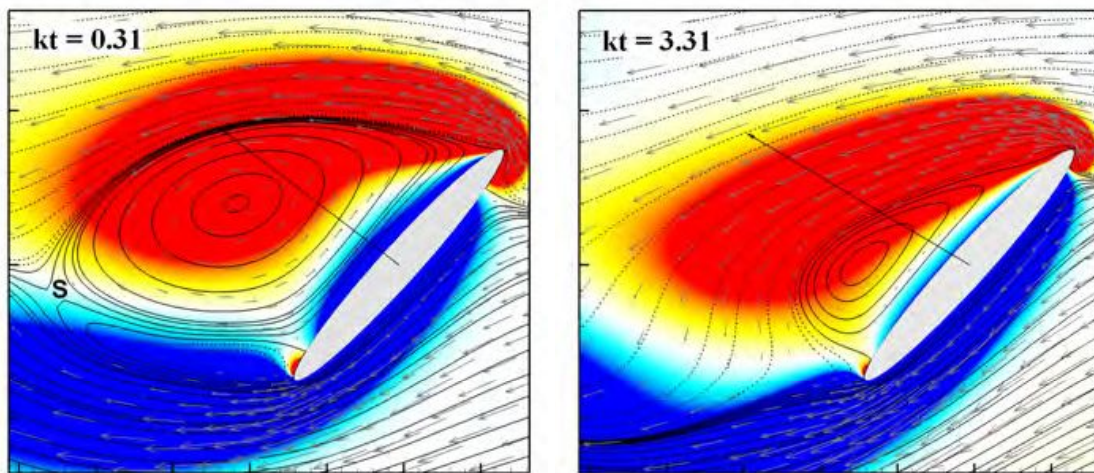
Rys. 5: Ruch w przód w pierwszym cyklu, obraz pola wirowego i funkcji prądu, $Re = 75$



Rys. 6: Ruch wstecz w pierwszym cyklu, obraz pola wirowego i funkcji prądu dla ruchu trzepoczącego, $Re = 75$

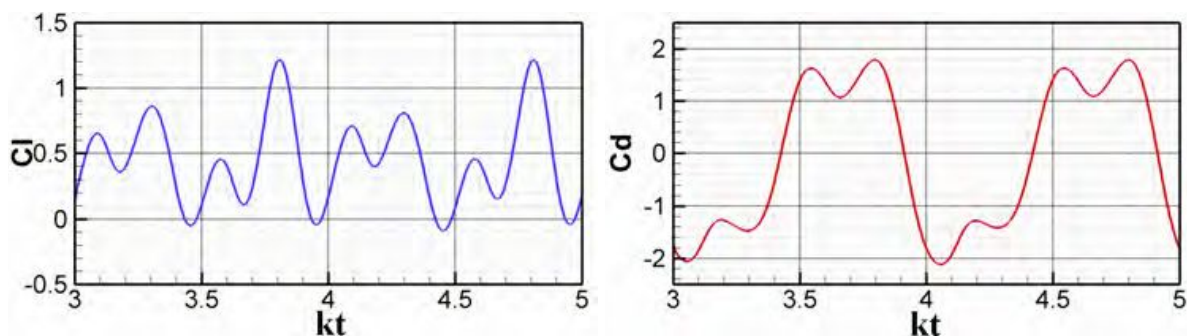
sunku 5 przedstawiono ruch w przód, w cyklu pierwszym. Strzałką umieszczoną na profilu oznaczono chwilową siłę aerodynamiczną, z którą płyn działa na profil. Długość strzałki jest proporcjonalna do wielkości modułu siły. W cyklu pierwszym nie zachodzi interakcja skrzydła z wytworzonym wcześniej polem wirowym. Pęcherz wirowy wzdłuż górnej krawędzi profilu (wir krawędzi natarcia – LEV) intensyfikowany jest obrotem skrzydła (ramka dla $kt = 0, 1$) i powiększa się, obejmując całą górną powierzchnię profilu (ramka $kt = 0, 3$). Następnie dochodzi do oderwania wiru z grzbietowej krawędzi i spadku siły nośnej (ramka $kt = 0, 4$). Ruch wstecz w cyklu pierwszym pokazano na rys. 6. Obraz pola wirowego jest inny niż w ruchu w przód, ze względu na oddziaływanie profilu z wytworzonym wcześniej śladem aerodynamicznym.

Ruch w przód w pierwszym cyklu jest podobny do typowego zagadnienia opływu, w którym zachodzi separacja wiru z krawędzi grzbietowej profilu i nagły spadek siły nośnej. Separacji wiru, który tworzy się na krawędzi natarcia (LEV – Leading edge vortex) towarzyszy pojawienie się punktu siodłowego **S**, rys. 7, $kt=0,31$. Przez punkt siodłowy rozumiemy punkt, w którym część linii prądu „wchodzi” do tego punktu (strzałki są do punktu) i są linie które „wychodzą” z tego punktu (strzałki na liniach prądu są skierowane od punktu).



Rys. 7: Separacja wiru z górnej krawędzi eliptycznego profilu, ruch w przód w cyklu pierwszym po stronie lewej i w cyklu trzecim, po stronie prawej. Na rysunku widoczny punkt siodłowy oznaczony literą **S**, $Re = 75$

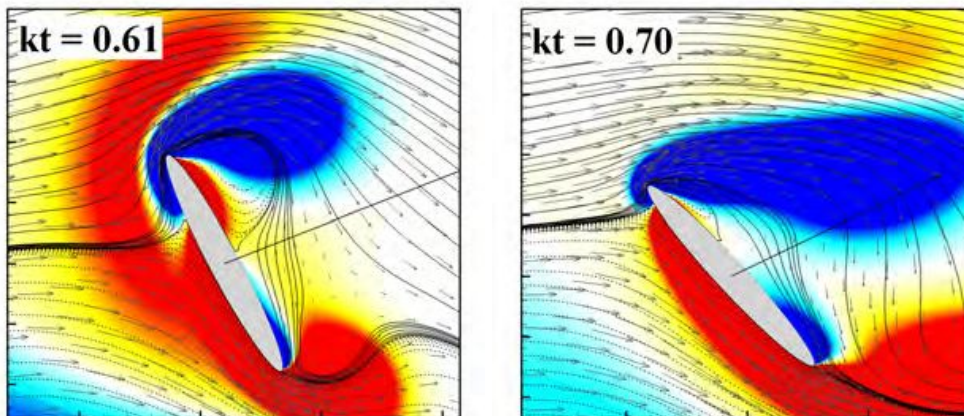
Po wykonaniu dwóch cykli, siły aerodynamiczne i pole wirowe generowane są okresowo, rys. 8. Pole wirowe wytworzone w cyklu drugim, oddziałuje z ruchomym profilem i polem wirowym wytworzonym w cyklu pierwszym. Powoduje to zmianę w procesie formowania i zmianę kształtu wiru krawędzi natarcia, rys. 7, ramka $kt=3,31$. W pęcherzu wirowym, który jest związany z profilem, prędkość jest bliska zero ($u \approx 0, 1$). Punkt siodłowy powstaje później niż w cyklu pierwszym, rys. 7. Pęcherz wirowy jest zaczepiony na górnej krawędzi profilu i otoczony linią prądu, która wraz z brzegiem tworzy zamkniętą przestrzeń. Przez linię prądu płyn nie przepływa, dlatego taką zamkniętą przestrzeń razem z profilem interpretować można jako nowy profil, o większej powierzchni. Pojawienie się punktu separacji skutkuje otwarciem linii prądu i oderwaniem wiru krawędzi natarcia (LEV).



Rys. 8: Współczynnik siły nośnej (pionowej) i siły oporu zmierzony w ruchu trzepoczącym $Re = 75$

Pole wirowe wytworzone w jednym cyklu, wpływa na generację sił w cyklu następnym. W literaturze poświęconej aerodynamice małych obiektów latających, taki mechanizm nazywa się interakcją skrzydła ze śladem aerodynamicznym [13, 15, 18, 24]. W ruchu wstecz, oddziaływanie skrzydła ze śladem aerodynamicznym wywołuje dużą siłę oporu (ramka dla $kt=0,5$, rys. 6). Nad profilem powstaje struktura złożona z pola wirowości o cyrkulacji dodatniej (na rys. 9, ramka $kt=0,61$, kolor czerwony) i pola wirowego o cyrkulacji ujemnej (na rys. 9, $kt = 0,61$, kolor niebieski). Taka struktura

wywołuje zwiększenie prędkości nad profilem i sprzyja rozwojowi wiru wzdłuż krawędzi natarcia (porównaj ramka $kt=0,1$ i $kt=0,6$ na rys. 5 i 6).



Rys. 9: Rozwój pęcherza wirowego związanego z górną krawędzią profilu, wspomagany jest występowaniem nad profilem struktury złożonej z wirowości o przeciwnych znakach

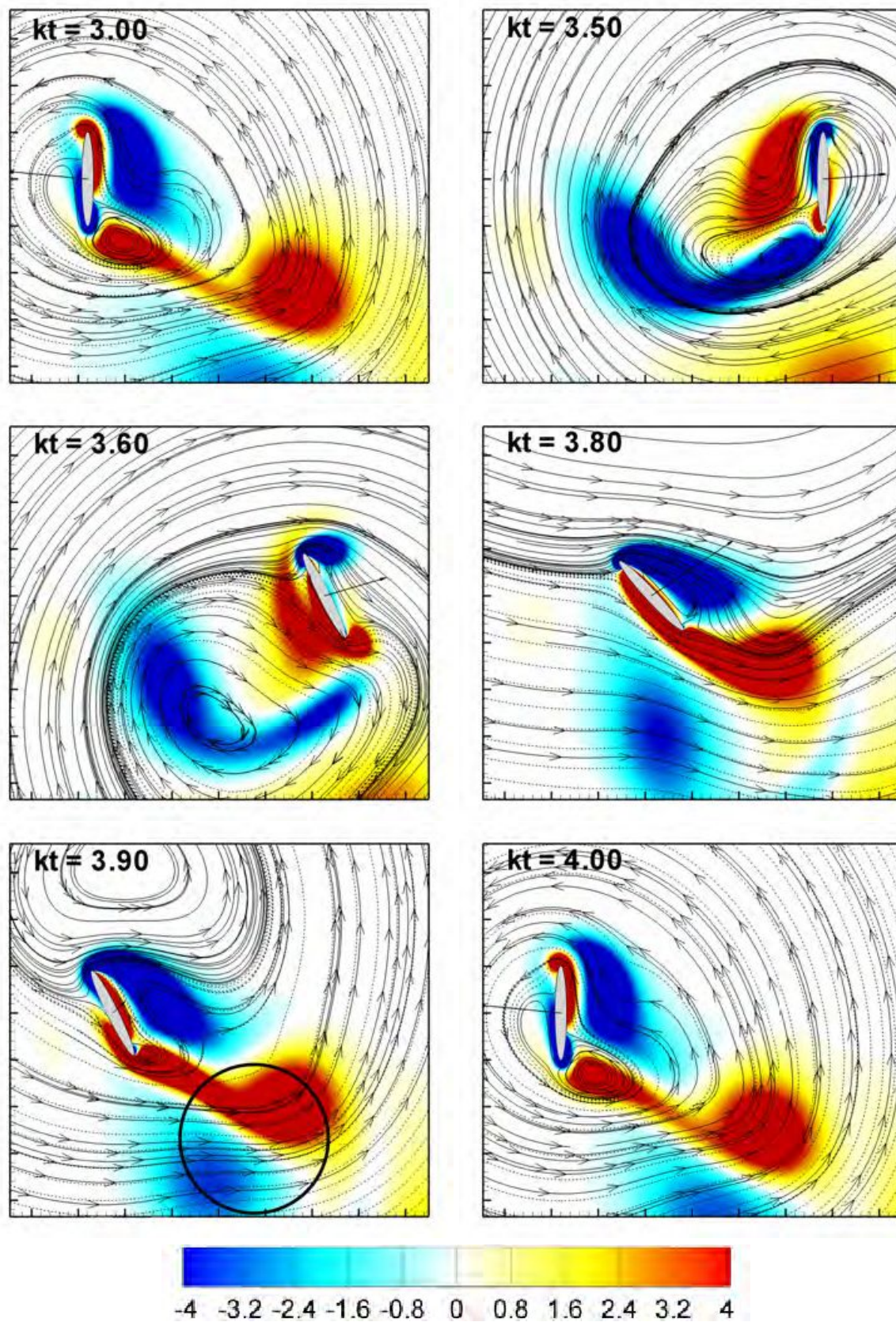
Formowaniu wiru nad górną powierzchnią profilu towarzyszy maksimum lokalne współczynnika siły nośnej (rys. 8). Pęcherz wirowy wzdłuż górnej krawędzi profilu (LEV) nie rozwija się jak w ruchu w przód. Pęcherz zmniejsza się i pozostaje związany z profilem (rys. 9). Występuje jedynie nieznaczny spadek siły nośnej. Efekt ten jest odpowiedzialny za opóźnienie zjawiska dynamicznego przeciągnięcia. Dalszy ruch powoduje ponowne utworzenie wiru na krawędzi grzbietowej profilu, współczynnik siły nośnej znowu osiąga maksimum lokalne. Tuż przed rozpoczęciem następnego cyklu, dochodzi do otwarcia linii prądu i separacji wiru z górnej krawędzi (ramka $kt=0,8$, rys. 6).

Po dwóch cyklach ruchu, siły aerodynamiczne na profilu (rys. 8) oraz pole wirowe (rys. 10, porównaj ramkę dla $kt=3,0$ i $kt=4,0$) wytwarzane są w sposób okresowy. Efekty aerodynamiczne ruchu trzepoczącego są podobne do siebie w każdym cyklu. Interakcja z wcześniej wytworzonym śladem wirowym powoduje, że strefa recyrkulacji na grzbietowej krawędzi profilu znika, nie dochodzi do zjawiska dynamicznego przeciągnięcia i nagłego spadku siły nośnej. W literaturze zjawisko to nazywa się przechwyceniem śladu aerodynamicznego [15, 18]. Opisany efekt odpowiada obrazom pola wirowości, które przedstawione są na rys. 10. W każdym cyklu, podczas ruchu wstecz, profil wytwarza strukturę złożoną z dwóch obszarów wirowości o przeciwnej cyrkulacji (zaznaczono czarnym kółkiem na rys. 10, ramka $kt=3,9$). Formowaniu takiej struktury towarzyszy znaczny wzrost siły nośnej, $C_L \sim 1,2$ dla $kt \sim 3,8$, patrz rys. 8 i 10. W rozważanym przypadku, najkorzystniejszy rozkład wirowości z punktu widzenia maksimum siły nośnej występuje właśnie dla pola wirowego przedstawionego w ramce dla $kt=3,8$.

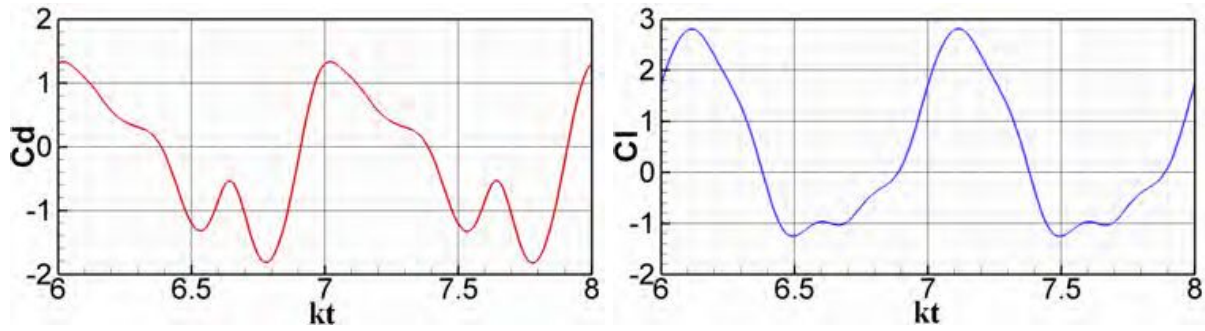
4.3. Ruch w kierunku nachylnym do osi x

Obliczenia numeryczne przepływu wywołanego przez ruch profilu w kierunku nachylnym do osi x , przeprowadzono dla liczby Reynoldsa zdefiniowanej na podstawie maksymalnej prędkości środka ciężkości profilu: $Re = u_{max}c/\nu$ (patrz równania ruchu (29), (30) i tabela 1), w zakresie liczb Reynoldsa Re od 5 do 1000 i dla bezwymiarowego czasu kt od 0 do 8.

Na rysunku 12 przedstawiono jeden cykl ruchu trzepoczącego, pod kątem $\beta = 60^\circ$ i przy liczbie $Re = 125$. Dla zadanej liczby Re , po trzech cyklach, wirowość oraz siły

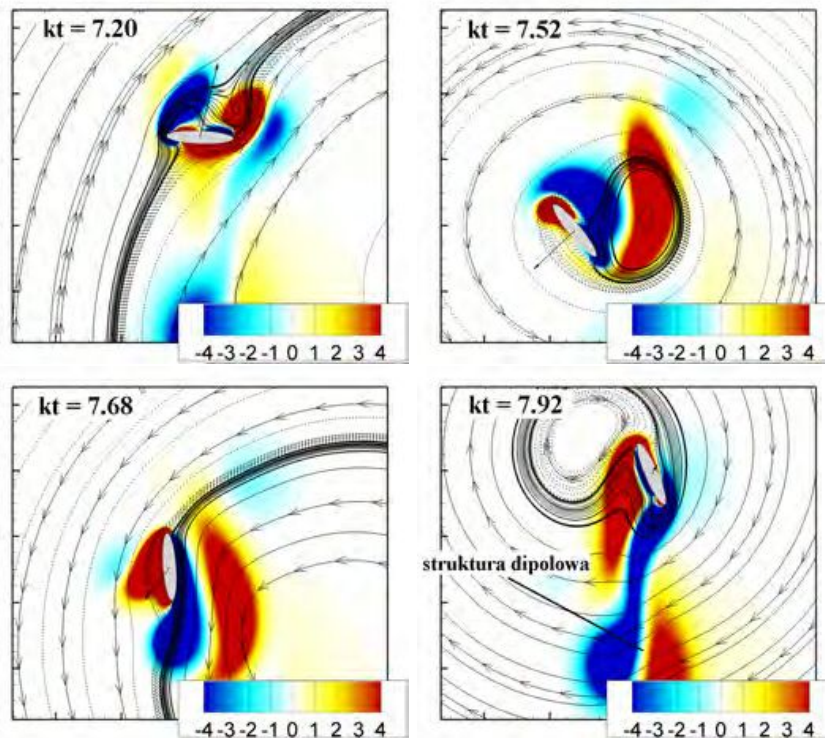


Rys. 10: Ruch wstecz w cyklu czwartym, obraz pola wirowego i funkcji prądu dla ruchu trzepoczącego, $Re = 75$. W ramce dla $kt = 3.9$, czarnym kółkiem oznaczono strukturę wirową złożoną z pola wirowości o cyrkulacji dodatniej (kolor czerwony) i pola wirowego o cyrkulacji ujemnej (kolor niebieski)



Rys. 11: Współczynnik siły oporu C_D (po lewej) i siły nośnej C_L (po prawej) zmierzony w ruchu trzepoczącym, kąt nachylenia do osi x : $\beta = 60^\circ$, $Re = 125$

aerodynamiczne wytwarzane są w sposób okresowy. Maksimum siły nośnej obserwuje się na początku każdego cyklu (rys. 11). W cyklu ósmym, który przedstawiony został na rys. 12, maksymalna wartość siły nośnej występuje dla $kt=7,12$, patrz rys. 11 i 13.

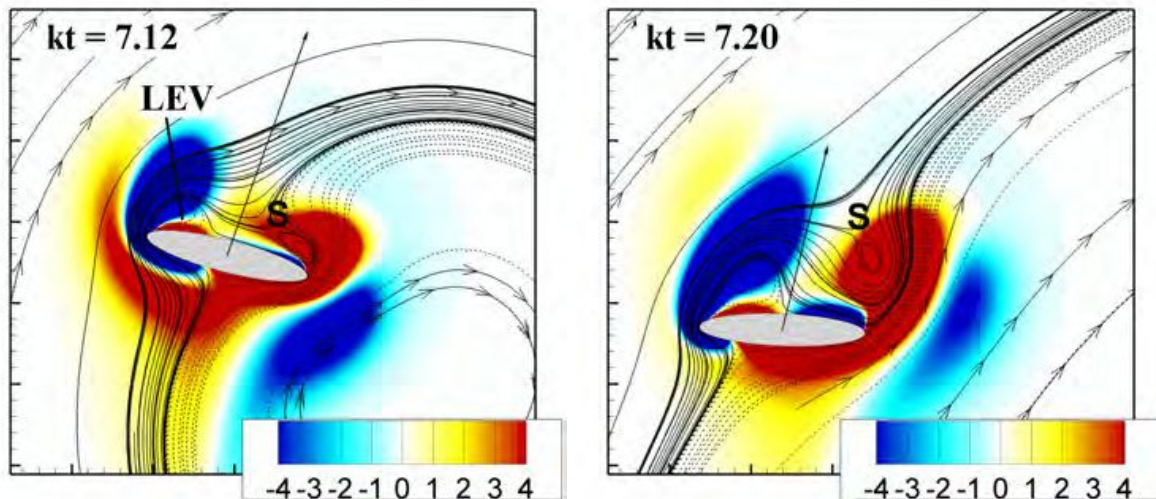


Rys. 12: Obraz pola wirowego i funkcji prądu dla ruchu trzepoczącego, $Re = 125$, cykl ósmy. Strzałka na profilu oznacza chwilową siłę aerodynamiczną. Wirowość przedstawiono w układzie laboratoryjnym, funkcja prądu jest wykreślona w układzie odniesienia poruszającym się wraz z ciałem

Charakterystyczną cechą ruchu trzepoczącego w kierunku nachylnym do osi x , jest wykorzystywanie siły oporu do wspomaganie siły pionowej (dodatniej siły nośnej) [23]. Przez siłę oporu rozumie się siłę skierowaną przeciwnie do kierunku ruchu. Przy ruchu w dół, rys. 12, siła stawiająca opór poruszającemu się profilowi stanowi wkład do dodatniej siły pionowej (nośnej).

Podobnie jak przy ruchu profilu wzdłuż osi x , występowaniu najwyższej siły nośnej towarzyszy pojawienie się punktu siodłowego za profilem **S**. Na rysunku 13, przedstawiono sekwencję złożoną z dwóch klatek, dla bezwymiarowego czasu: $kt=7,1$ oraz $kt=7,20$. Punkt siodłowy (**S**) pojawia się daleko od wiru krawędzi natarcia (LEV) i nie

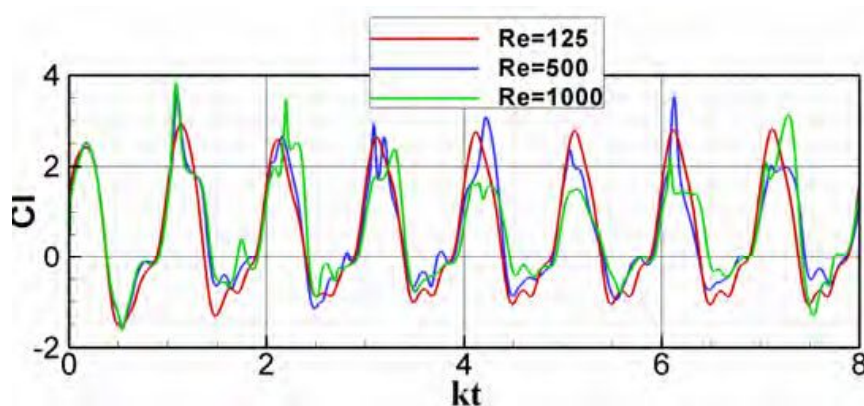
zwiastuje natychmiastowego oderwania. Kiedy profil zwalnia, chwilę przed ruchem w górę, punkt (S) „przemieszcza się” nad wir (LEV), dochodzi do separacji (ramka $kt = 7, 20$, na rys. 12). Tuż przed ruchem w górę, profil obraca się formując strukturę wirową złożoną z wirowości o przeciwnej cyrkulacji (ramka $kt=7,52$ i $kt=7,68$, rys. 12). W pracy [22] taką strukturę nazywa się dipolową strukturą wirową. Wytwarzanie dipolowych struktur wirowych jest charakterystycznym zjawiskiem towarzyszącym ruchowi trzepoczącemu.



Rys. 13: Ruch w dół w cyklu ósmym, obraz pola wirowego i funkcji prądu dla ruchu trzepoczącego, $Re = 125$

4.3.1. Wpływ liczby Reynoldsa

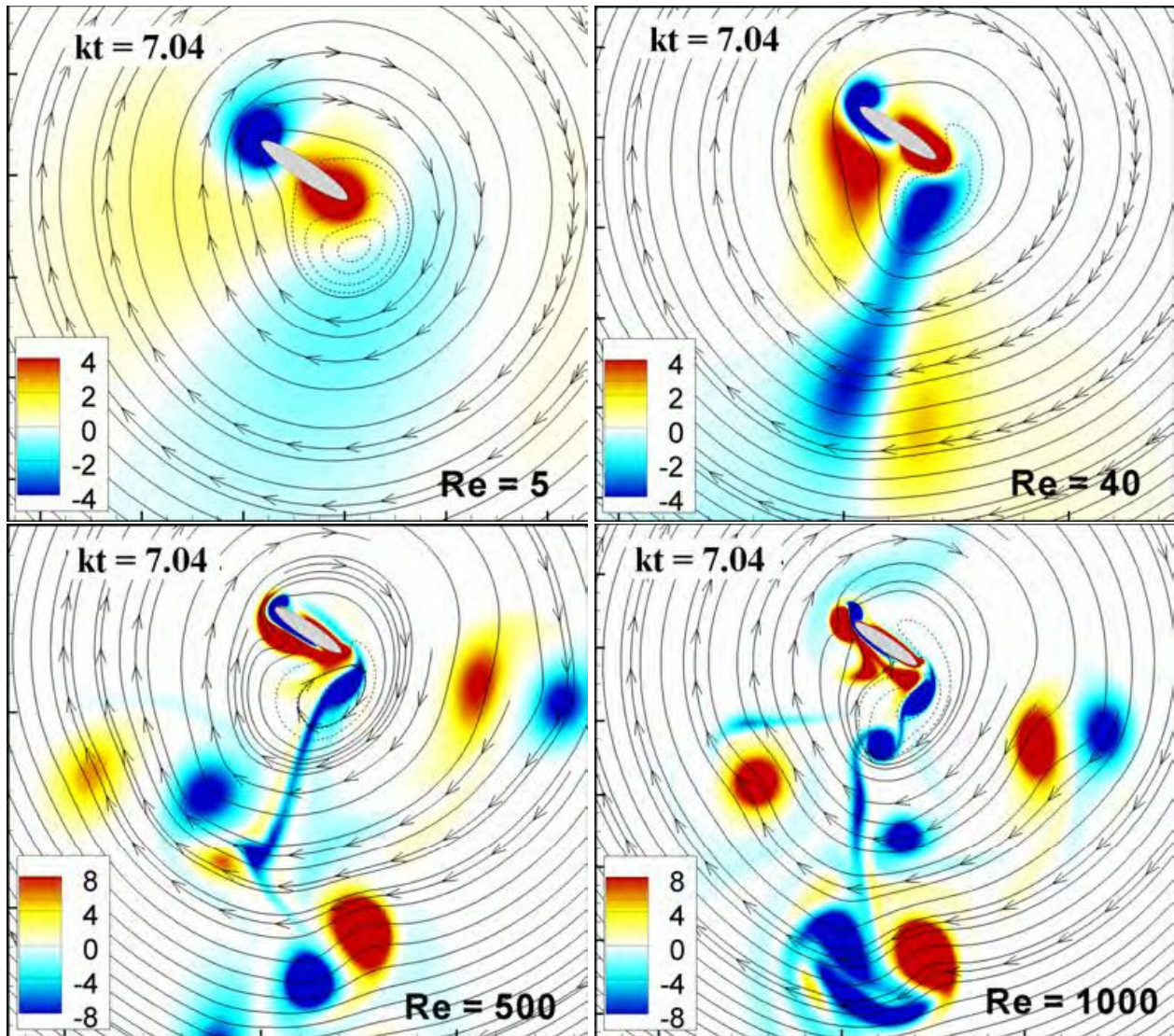
Na rysunku 14 przedstawiono porównanie współczynnika siły nośnej dla trzech liczb Reynoldsa: $Re=125$, $Re=500$ i $Re=1000$. W zadanym zakresie liczb Re nie obserwuje się jakościowych różnic w przebiegu krzywych współczynnika.



Rys. 14: Porównanie obliczonego współczynnika siły nośnej, dla trzech liczb Reynoldsa

Współczynnik siły nośnej jest miarą efektywności ruchu trzepoczącego. Wzrost liczby Reynoldsa w ruchu trzepoczącym będzie powodować zwiększenie wydatku energetycznego potrzebnego na pokonanie sił oporu. Brak znaczących różnic w przebiegu krzywych współczynnika siły nośnej wskazuje, że w badanym zakresie parametrów, efektywność ruchu trzepoczącego zmniejsza się wraz ze wzrostem liczby Reynoldsa. Dy-

namika pola wirowości w otoczeniu trzepoczącego profilu znacznie się komplikuje, rys. 15. Pole wirowe wokół profilu przestaje być wytwarzane w sposób okresowy i staje się nieuporządkowane.



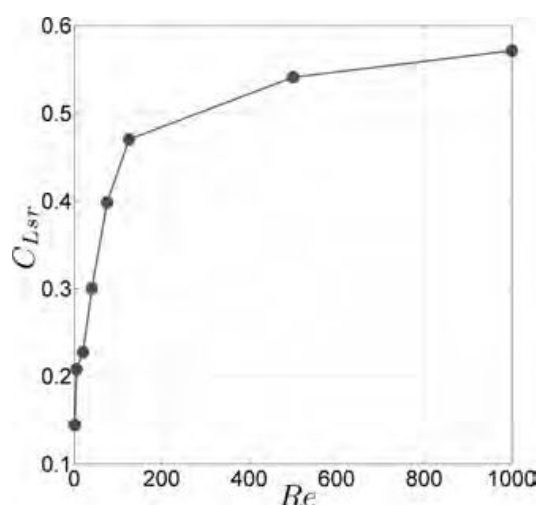
Rys. 15: Obraz pola wirowego i funkcji prądu dla trzepotania w kierunku nachylonym, $\beta = 60^\circ$, przy różnych liczbach Reynoldsa ($Re = 5$, $Re = 40$, $Re = 500$, $Re = 1000$). Formowanie dipola wirowego poniżej profilu następuje dla liczb $Re > 40$

Na rysunku 15 przedstawiono także ramki dla pola wirowego w zakresie małych liczb Reynoldsa: $Re=5$ i $Re=40$. Formowanie charakterystycznej dla ruchu trzepoczącego struktury złożonej z wirowości o przeciwnej cyrkulacji, występuje dla liczb $Re \geq 40$. W zakresie liczb $Re \leq 125$, omawiana struktura zapewnia usunięcie wirowości wytworzonej w cyklu poprzednim, z obszaru oddziaływania profilu w cyklu następnym (ramka $kt = 7.92$, rys. 12). Struktury dipolowe mogą być również odpowiedzialne za intensyfikację siły napędowej na profilu [6, 8, 9, 17]. Warto zauważyć, że utrata stabilności pęcherzy wirowych za walcem i formowanie ścieżki Karmana zachodzi przy porównywalnych liczbach Reynoldsa: $Re > 49$, [20]. W przypadku mniejszych liczb Reynoldsa dynamika wirowości w obszarze wokół profilu zdominowana jest przez pro-

ces dyfuzji. Wirowość skoncentrowana jest blisko ciała i szybko dyfunduje do obszaru przepływu (rys. 15, ramka dla $Re=5$ i $Re=40$). Na rysunku 16 przedstawiono uśredniony w czasie współczynnik siły nośnej, który obliczano ze wzoru:

$$C_{Lsr} = \frac{1}{T} \int_0^T C_L(t) dt \quad (35)$$

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że występuje znaczny przyrost średniego współczynnika siły nośnej w zakresie $5 < Re < 125$. Dla $Re \geq 125$, ośmiokrotne zwiększenie liczby Reynoldsa powoduje podniesienie średniego współczynnika siły nośnej tylko o około 18%. Krzywa współczynnika siły nośnej wraz ze wzrostem liczby Re nasycą się. Wzrost liczby Re (zwiększenie prędkości trzepotania) nie będzie więc powodować zwiększenia siły nośnej i tym samym możliwości manewrowe będą utrudnione.



Rys. 16: Zależność uśrednionego w czasie współczynnika siły nośnej, równanie (35) od liczby Re

5. PODSUMOWANIE

W artykule analizowano dynamikę nieustalonego pola prędkości i pola wirowości wokół profilu poruszającego się ruchem trzepoczącym. Wiadomo, że rozkład sił na profilu zdeterminowany jest dynamiką pola wirowości [26]. Mimo uproszczenia zagadnienia do dwóch wymiarów, aerodynamika ruchu trzepoczącego jest złożona i bogata w niestacjonarne zjawiska przepływowe. Zgodność z wynikami eksperymentalnymi (rys. 4) wskazuje, że uproszczenie zagadnienia do dwóch wymiarów wydaje się zasadne i pozwoli potwierdzić na drodze obliczeń istotne zjawiska przepływowe obserwowane w aerodynamice przyrody ożywionej. Przy małych liczbach Reynoldsa, charakterystycznych szczególnie dla owadów i małych ptaków, analiza pola wirowości jest bardzo ważna i ułatwia obserwację istotnych mechanizmów odpowiedzialnych za generację sił aerodynamicznych. Wykazano numerycznie ważne zjawiska odpowiedzialne za przyrost siły nośnej, zachodzące w bliskim sąsiedztwie profilu: mechanizm opóźnionego przeciągnięcia i interakcję profilu ze śladem aerodynamicznym. W porównaniu do klasycznego zagadnienia opływu, oddziaływanie profilu z własnym śladem wirowym zmienia dynamikę wytwarzania wiru na krawędzi natarcia. Po kilku cyklach ruchu trzepoczącego, wir krawędzi natarcia staje się mniejszy, prędkość w rdzeniu jest niższa, a punkt siodłowy towarzyszący separacji nie pojawia się.

Cechą charakterystyczną ruchu trzepoczącego jest wytwarzanie struktur złożonych z wirów o przeciwnej cyrkulacji, które poruszają się na skutek samoindukcji. W zakresie małych liczb Reynoldsa: $Re < 150$, pole wirowe wokół profilu jest uporządkowane i wytwarzane w sposób okresowy. Przy wyższych liczbach Reynoldsa, powstaje znacznie więcej struktur wirowych o mniejszej skali. Takie struktury utrudniają wytwarzanie okresowego pola wirowego wokół profilu i powodują spadek efektywności wytwarzania siły nośnej.

LITERATURA

- [1] Cottet G.H., Koumoutsakos P., *Vortex Methods Theory and Practice*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [2] Cottet G.H., Poncet P., *Advances in direct numerical simulations of 3d wall-bounded flows by vortex-in-cell methods*, J. Comput. Phys., **193**, 136–158, 2003.
- [3] Dickinson M.H., Gotz K.G., *Unsteady aerodynamics performance of model wings at low Reynolds number*, J. Exp. Biol., **174**, 45–64, 1992.
- [4] Eldredge J.D., *Efficient tools for the simulation of flapping wing flows*, AIAA Paper, **2005-0085**, 2005.
- [5] Ellington C.P., *The vortex wake of a hovering model hawkmoth*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London B, **352**, 317–328, 1997.
- [6] Godoy-Diana R., Marais C., Aider J.L., Wesfreid J.E., *A model for the symmetry breaking of the reverse Benard–von Karman vortex street produced by a flapping foil*, J. Fluid Mech., **622**, 23–32, 2009.
- [7] Gustafson K.E., Leben R., Freymuth P., *Visualization and computation of hovering mode*, Vortex methods and vortex motion, 143–169, 1991.
- [8] Jones K.D., Dohring C.M., Platzer M.F., *Wake structures behind plunging airfoils: A comparison of numerical and experimental results*, AIAA Paper, **1996-0078**, 1996.
- [9] Kozłowski T., Kudela H., *Transitions in the vortex wake behind the plunging profile*, Fluid Dyn. Res., **46**, No. 6, 2014.
- [10] Kudela H., Kozłowski T., *Vortex in cell method for exterior problems*, J. Theor. Appl. Mech., **47**, 779–796, 2009.
- [11] Kudela H., Malecha Z.M., *Viscous flow modelling using the vortex particle method*, TASK Quarterly, **13**, 15–32, 2009.
- [12] Marden J.H., *Maximum lift production during takeoff in flying animals*, J. Exp. Biol., **130**, 235–258, 1987.
- [13] Peskin Ch.S., Miller L.A., *When vortices stick: an aerodynamic transition in tiny insect flight*, J. Exp. Biol., **207**, 3073–88, 2004.
- [14] Sagredo B. *Moment conserving Cardinal Splines Interpolation of Compact Support for Arbitrarily Spaced Data*, Research Report No. 2003-10, Zurich Switzerland, 2003.
- [15] Sane S.P., *The aerodynamics of insect flight*, J. Exp. Biol., **206**, 4191–4208, 2003.
- [16] Schnipper T., Andersen A., Bohr T., *Vortex wakes of a flapping foil*, J. Fluid Mech., **633**, 411–423, 2009.

- [17] Sfakiotakis M., Lane D.M., Davies J.B.C., *Review of fish swimming modes for aquatic locomotion*, IEEE Journal of Oceanic Engineering, **24**, 1999.
- [18] Shyy W., Lian Y., Tang J., Viieru D., Liu H., *Aerodynamics of Low Reynolds Number Flyers*, Dover Publications, Cambridge University Press, 2008.
- [19] Tang J., Viieru D., Shyy W., *Effects of Reynolds number and flapping kinematics on hovering aerodynamics*, AIAA J., **46**, 967–976, 2007.
- [20] Tritton D.J., *Physical Fluid Dynamics*, Van Nostrand Reinhold, 1977.
- [21] Weis-Fogh T., *Quick estimates of flight fitness in hovering animals including novel mechanism for lift generation*, J. Exp. Biol., **59**, 169–230, 1973.
- [22] Wang Z.J., *Two dimensional mechanism for insect hovering*, Phys. Rev. Lett., **85**, 2216–9, 2000.
- [23] Wang Z.J., *The role of drag in insect hovering*, J. Exp. Biol., **200**, 4147–55, 2004.
- [24] Wang Z.J., Birch J.M., Dickinson M.H., *Unsteady forces and flows in low Reynolds number hovering flight: two-dimensional computations vs robotic wing experiments*, J. Exp. Biol., **207**, 449–460 2007.
- [25] E W., Liu J.G., *Vorticity boundary conditions and related issues for finite difference schemes*, J. Comp. Phys., **66**, 368–382, 1996.
- [26] Wu J.Z., Ma H., Zhou M., *Vorticity and Vortex Dynamics*, Springer, 2005.