MINUT 2021 (3), s. 142–152
ISSN 2719-3063

Katarzyna SAWICZ

Katedra Matematyki, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Obliczanie wyznaczników

Streszczenie. Artykuł ma na celu przedstawienie podstawowych metod obliczania wyznaczników. Jest przeznaczony głównie dla studentów pierwszego roku studiów licencjackich i inżynierskich na kierunkach technicznych. W artykule przedstawiono podstawowe definicje, własności wyznaczników oraz podano przykłady ilustrujące te zagadnienia. Na końcu artykułu zamieszczono zadania do samodzielnego rozwiązania.

Słowa kluczowe: wyznacznik, macierz, rozwinięcie Laplace'a.

1. Wstęp

Umiejętność obliczania wyznaczników przydaje się nam w wielu sytuacjach, np. w rozwiązywaniu układów równań liniowych, badaniach operacyjnych, wyznaczaniu macierzy odwrotnej, badaniu ekstremów funkcji wielu zmiennych, równaniach różniczkowych, metodach numerycznych, geometrii analitycznej, obliczaniu całek wielokrotnych. Jak widać, z wyznacznikami spotykamy się nie tylko w algebrze liniowej, ale również w wielu innych działach matematyki, z których korzystają, oprócz matematyków, inżynierowie, medycy, ekonomiści i inni.

W artykule przedstawimy dwa sposoby obliczania wyznaczników — bezpośrednio z definicji (metoda ta jest dobra dla macierzy małych wymiarów) oraz z zastosowaniem własności wyznaczników.

Na początku artykułu czytelnik znajdzie definicję wyznacznika oraz kilka przykładów obliczania wyznaczników bezpośrednio z definicji. W rozdziale drugim podamy podstawowe własności wyznaczników, z których będziemy korzystać w konkretnych przykładach. W rozdziale trzecim podamy zadania do samodzielnego rozwiązania oraz odpowiedzi do tych zadań.

Wyznaczniki są związane z macierzami. Najważniejsze wiadomości o macierzach są przystępnie przedstawione w [1]. Polecamy także bardziej zaawansowaną literaturę, np. [2] lub [4]. W tej pracy rozważane są tylko wyznaczniki macierzy o wyrazach zespolonych, w szczególności rzeczywistych.

Autor korespondencyjny: K. Sawicz (Katarzyna.Sawicz@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 11.09.2021.

2. Definicja wyznacznika

W matematyce funkcjonują trzy równoważne definicje wyznacznika. Jedna odwołuje się do permutacji (zob. [4], s. 69), druga jest definicją aksjomatyczną (zob. [7]), a trzecia jest definicją rekurencyjną. W tym artykule skupimy się na definicji rekurencyjnej.

Definicja 1. *Wyznacznikiem macierzy kwadratowej nazywamy funkcję, która każdej macierzy rzeczywistej (zespolonej) $A = [a_{ij}]$ przypisuje liczbę rzeczywistą (zespoloną) $\det A$. Funkcja ta określona jest wzorem indukcyjnym:*

1) jeżeli $A = [a]$ jest macierzą stopnia 1, to $\det A = a$,

2) jeżeli A jest macierzą kwadratową stopnia $n \geq 2$, to

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}A_{1i},$$

gdzie A_{ij} oznacza dopełnienie algebraiczne[1] elementu a_{ij}, czyli wyznacznik macierzy stopnia $n-1$ otrzymanej z macierzy A przez skreślenia i-tego wiersza i j-tej kolumny pomnożony przez $(-1)^{i+j}$.

Zauważmy, że wyznacznik to funkcja, której dziedziną jest zbiór wszystkich macierzy kwadratowych o wyrazach rzeczywistych (lub zespolonych), natomiast zbiorem wartości jest zbiór liczb rzeczywistych (lub zespolonych). Każda liczba x jest wyznacznikiem jakiejś macierzy, np. macierzy stopnia pierwszego $A = [x]$. Wyznacznik nie jest funkcją różnowartościową — nieskończenie wiele macierzy kwadratowych (nawet różnych stopni) może mieć ten sam wyznacznik. Wyznacznik macierzy A oznaczamy także przez $\det[a_{ij}]$ lub $|A|$, a w formie rozwiniętej jako

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Warto zapamiętać

Zauważmy, że stosujemy inne nawiasy do oznaczenia macierzy, a inne do oznaczenia wyznacznika.

Policzmy teraz kilka przykładów wyznaczników bezpośrednio z definicji.

Przykład 1. Obliczmy wyznacznik macierzy $X = [-12]$.

Jest to macierz stopnia 1. Z punktu 1 definicji wynika, że $\det X = \det[-12] = -12$.

Uwaga: można też napisać $\det[-12] = |-12| = -12$, ale trzeba pamiętać, że $|-12|$ oznacza tu wartość wyznacznika stopnia pierwszego, a nie wartość bezwzględną (moduł) liczby.

[1] Dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij} oznacza się też jako A_i^j.

Przykład 2. Obliczmy wyznacznik macierzy

$$Y = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Zgodnie z definicją (punkt 2) najpierw liczymy dopełnienia algebraiczne elementów stojących w pierwszym wierszu. Mamy

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det[10] = 10, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det[2] = -2.$$

Zatem

$$\det Y = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = 3 \cdot 10 + (-1) \cdot (-2) = 32.$$

Odp. $\det Y = 32$.

Wyznacznik macierzy stopnia drugiego

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

można obliczyć w następujący sposób:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot (-1)^{1+1} \det[d] + b \cdot (-1)^{1+2} \det[c] = ad - bc. \qquad (*)$$

Warto zapamiętać ten wzór, ponieważ skraca on obliczenia.

Przykład 3. Obliczmy wyznacznik macierzy

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik ten policzymy również z definicji (punkt 2). Mamy:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 1 \qquad A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 - (-2)) = 5 \\
a_{12} &= 2 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (0 - 2) = 2 \\
a_{13} &= 1 \qquad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0 - 1) = -1.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\det Z = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 5 + 4 - 1 = 8.$$

Odp. $\det Z = 8$.

Przy obliczaniu wyznacznika stopnia trzeciego można skorzystać z reguły Sarrusa, która nie wymaga obliczania dopełnień algebraicznych odpowiednich elementów i dlatego szybciej uzyskujemy wynik. Regułę Sarrusa możemy opisać w postaci krótkiego przepisu:

- do wyznacznika stopnia trzeciego dopisujemy poniżej wyznacznika wiersz pierwszy oraz drugi (albo z prawej strony wyznacznika dopisujemy kolumnę pierwszą oraz drugą),
- mnożymy odpowiednie elementy na trzech „przekątnych” nowej tablicy, ułożonych w kierunku $\searrow$ (zaznaczonych poniżej kolorem czerwonym),
- mnożymy odpowiednie elementy na trzech „przekątnych” nowej tablicy, ułożonych w kierunku $\nearrow$ (zaznaczonych poniżej kolorem zielonym),
- dodajemy iloczyny zaznaczone na czerwono i odejmujemy iloczyny zaznaczone na zielono (otrzymana liczba jest szukanym wyznacznikiem).

Zatem dla macierzy

$$Z = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix},$$

po dopisaniu poniżej wyznacznika dwóch pierwszych wierszy, mamy

$$\det Z = \begin{array}{c|ccc|c} & a & b & c & \\ & d & e & f & \\ - & g & h & i & + \\ \hline - & a & b & c & + \\ - & d & e & f & + \end{array} = aei + dhc + gbf - gec - ahf - dbi.$$

Dla tej samej macierzy Z, po dopisaniu za wyznacznikiem dwóch pierwszych kolumn, mamy

$$\det Z = \begin{array}{|ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \\ - & - & - + & + & + \end{array} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb.$$

Zauważmy, że w obu wypadkach otrzymaliśmy ten sam wynik.

Warto zapamiętać

Regułę Sarrusa stosujemy **tylko** do obliczania wyznaczników stopnia trzeciego.
Reguły tej **nie wolno** stosować do wyznaczników innych stopni.

Widzimy, że obliczając wyznacznik z definicji, zawsze używamy pierwszego wiersza. Jeżeli mamy wyznacznik stopnia $n \geq 2$, to musimy obliczyć n wyznaczników stopnia $n-1$ (tzn. dopełnień algebraicznych n elementów stojących w pierwszym wierszu). Gdyby zdarzyło się tak, że pewien element pierwszego wiersza jest równy zero, to nie musielibyśmy liczyć dopełnienia algebraicznego tego konkretnego elementu, bo w definicji wyznacznika występuje iloczyn $a_{1i}A_{1i}$, który w tym wypadku byłby równy $0 \cdot A_{1i} = 0$. Warto teraz zauważyć, że jeśli w pierwszym wierszu wyznacznika wszystkie elementy są zerami, to wyznacznik ten jest równy zeru.

Czytelnik mógłby zapytać, czy do obliczenia wyznacznika można użyć innych wierszy lub kolumn. Odpowiedź jest twierdząca, tzn. do obliczania wyznacznika macierzy można użyć dowolnego wiersza lub dowolnej kolumny. Pokazuje to poniższe twierdzenie, zwane twierdzeniem Laplace'a. Twierdzenie to mówi, że możemy sobie wybrać dowolny wiersz lub dowolną kolumnę i względem niej rozwijać wyznacznik. Zazwyczaj wybieramy ten wiersz (lub tę kolumnę), w którym jest najwięcej zer (jeśli oczywiście taki wiersz lub kolumna istnieją), ponieważ rozwijając wyznacznik względem tego wiersza (tej kolumny) będziemy musieli policzyć dopełnienia algebraiczne tylko tych elementów, które są różne od zera, co znacznie skróci czas wykonywania rachunków.

Twierdzenie 1 (rozwinięcie Laplace'a). *Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geq 2$ oraz niech liczby naturalne i oraz j, gdzie $i \geq 1$, $j \leq n$, będą ustalone. Wówczas wyznacznik macierzy A można obliczyć ze wzorów:*

- $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}A_{ip}$,
  inaczej mówiąc, wyznacznik macierzy jest równy sumie iloczynów elementów i–tego wiersza i ich dopełnień algebraicznych; wzór ten nazywamy rozwinięciem Laplace'a wyznacznika względem i–tego wiersza,
- $\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj}$,
  inaczej mówiąc, wyznacznik macierzy jest równy sumie iloczynów elementów j–tej kolumny i ich dopełnień algebraicznych; wzór ten nazywamy rozwinięciem Laplace'a wyznacznika względem j–tej kolumny.

Przykład 4. Obliczmy wyznacznik macierzy:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Widzimy, że w drugim wierszu mamy jedno zero (jedno zero mamy też w drugiej kolumnie), zatem skorzystamy z twierdzenia Laplace'a i rozwiniemy wyznacznik względem drugiego wiersza (krok pierwszy):

$$\det T = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{krok\ 1}{=} 2\cdot(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{krok\ 2}{=} -2\cdot(-1-1) - 1\cdot(1+3) = 4-4 = 0.$$

W drugim kroku obliczamy wartości obu wyznaczników i następnie te wartości sumujemy.

Odp. $\det T = 0$.

W tym przykładzie wartość wyznacznika wynosi zero. Macierz, której wyznacznik wynosi zero, nazywana jest *macierzą osobliwą*. Natomiast macierz, której wyznacznik jest różny od zera, nazywamy *macierzą nieosobliwą*.

Przykład 5. Obliczmy wyznacznik macierzy:

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Jest to macierz stopnia czwartego, gdzie w drugim wierszu oraz w trzeciej kolumnie mamy po dwa zera. Przy obliczaniu tego wyznacznika skorzystamy z rozwinięcia Laplace'a. Jest obojętne, czy wybierzemy drugi wiersz czy trzecią kolumnę. Wybierzmy zatem trzecią kolumnę i względem niej rozwińmy wyznacznik. Mamy zatem (krok pierwszy):

$$\det U = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{krok\ 1}{=} 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{krok\ 2}{=}$$

$$= 2 \cdot (-2 + 1 - 8) - 1 \cdot (12 + 1 + 2 + 3) = 2 \cdot (-9) - 18 = -18 - 18 = -36.$$

W kroku drugim, aby obliczyć te wyznaczniki, skorzystaliśmy z reguły Sarrusa.

Odp. $\det U = -36$.

Przykład 6. Obliczmy wyznacznik macierzy:

$$V = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 121 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & \sqrt{33} \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{12} \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik tej macierzy rozwiniemy względem pierwszej kolumny. Otrzymamy wówczas wyznacznik stopnia czwartego, który również rozwiniemy względem pierwszej kolumny. W wyniku tej operacji otrzymamy wyznacznik stopnia trzeciego, który znowu rozwiniemy względem pierwszej kolumny. Procedurę tę będziemy powtarzać tak długo, aż otrzymamy wyznacznik stopnia pierwszego, który policzymy bezpośrednio z definicji.

$$\det V = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 121 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & \sqrt{33} \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{12} \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & \sqrt{33} \\ 0 & -5 & 10 & -12 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{12} \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & 10 & -12 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{5}{12} \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot (-5) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 0 & \frac{5}{12} \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (-1)^{1+1} \det \left[\tfrac{5}{12}\right] = -6 \cdot 35 \cdot \frac{5}{6 \cdot 2} = -\frac{35 \cdot 5}{2} = -\frac{175}{2}.$$

Odp. $\det V = -\frac{175}{2}$.

Zauważmy, że przy obliczaniu wyznaczników macierzy górnotrójkątnych możemy postępować tak samo jak w przykładzie 6. Zawsze w wyniku końcowym otrzymamy iloczyn elementów stojących na głównej przekątnej. Gdybyśmy mieli wyznacznik macierzy dolnotrójkątnej, moglibyśmy rozwijać go zawsze względem pierwszego wiersza i w wyniku otrzymalibyśmy także iloczyn elementów stojących na głównej przekątnej.

Warto zapamiętać

Wyznacznik dowolnej macierzy trójkątnej (dolnej lub górnej) jest iloczynem elementów stojących na głównej przekątnej.

3. Własności wyznaczników

Zazwyczaj wyznaczników nie liczymy bezpośrednio z definicji, ale korzystamy z pewnych własności wyznaczników. Te własności znacznie upraszczają nam liczenie wyznacznika macierzy. Poniżej przedstawimy kilka ważnych własności, które w znaczny sposób ułatwiają policzenie konkretnego wyznacznika.

Twierdzenie 2. *Niech A będzie macierzą kwadratową. Wówczas:*

1) *jeżeli w wyznaczniku jest kolumna (lub wiersz) składający się z samych zer, to wyznacznik jest równy zero,*
2) *jeżeli przestawimy między sobą dwie kolumny (dwa wiersze), to wyznacznik zmieni znak na przeciwny,*
3) *jeżeli w wyznaczniku mamy jednakowe dwie kolumny (dwa wiersze), to wyznacznik jest równy zero,*
4) *jeżeli wszystkie elementy pewnej kolumny (pewnego wiersza) zawierają wspólny czynnik, to ten czynnik można wyłączyć przed wyznacznik,*
5) *jeżeli do elementów dowolnej kolumny (dowolnego wiersza) dodamy odpowiadające im elementy innej kolumny (innego wiersza) tej macierzy pomnożone przez dowolną liczbę, to wyznacznik macierzy nie zmieni się,*
6) *macierze A i A^T mają równe wyznaczniki (transpozycja macierzy nie zmienia jej wyznacznika).*

4. Przykłady

Przykład 7. Obliczmy wyznacznik macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & -i \\ 2i & 0 & i \\ 3 & 2i & 1+i \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że macierz A jest stopnia trzeciego, więc jej wyznacznik możemy obliczyć z reguły Sarrusa:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1+i & -i \\ 2i & 0 & i \\ 3 & 2i & 1+i \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} = 0 + 2i \cdot 2i \cdot (-i) + 3(1+i)i - 0 - 2i \cdot i - 2i(1+i)(1+i) =$$
$$\begin{matrix} 1 & 1+i & -i \\ 2i & 0 & i \end{matrix}$$

$$= 4i + 3i - 3 + 2 - 2i(1 + 2i - 1) = 7i - 1 + 4 = 3 + 7i.$$

Odp. $\det A = 3 + 7i$.

Przykład 8. Obliczmy wyznacznik macierzy

$$B = \begin{bmatrix} 199 & 200 & 201 \\ 198 & 200 & 202 \\ 197 & 200 & 199 \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik tej macierzy można obliczyć, stosując regułę Sarrusa, ale zwróćmy uwagę, że poszczególne elementy w tej macierzy są dużymi liczbami, co rachunkowo nie będzie najszybszym rozwiązaniem. Warto zastanowić się, czy można jakoś przekształcić ten wyznacznik, aby szybciej go policzyć. W tym momencie przydadzą się nam własności wyznaczników.

$$\det B = \begin{vmatrix} 199 & 200 & 201 \\ 198 & 200 & 202 \\ 197 & 200 & 199 \end{vmatrix} \overset{krok\ 1}{=} \begin{vmatrix} -1 & 200 & 1 \\ -2 & 200 & 2 \\ -3 & 200 & -1 \end{vmatrix} \overset{krok\ 2}{=} 200 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{krok\ 3}{=} 200 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \overset{krok\ 4}{=}$$

$$= 200(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -200\,(2 - (-2)) = -200 \cdot 4 = -800.$$

- W kroku pierwszym od kolumny pierwszej oraz od kolumny trzeciej odejmujemy kolumnę drugą (odejmujemy odpowiednie wartości w poszczególnych wierszach każdej z kolumn). Wyznacznik nie zmienia się — korzystamy z twierdzenia 2, własność 5).
- W kroku 2 wyłączamy przed wyznacznik 200 z drugiej kolumny. Korzystamy z twierdzenia 2, własność 4).
- W kroku 3 od wiersza drugiego oraz trzeciego odejmujemy wiersz pierwszy. Korzystamy z twierdzenia 2, własność 5).
- W kroku 4 zauważmy, że w kolumnie drugiej mamy dwa zera i teraz można zastosować rozwinięcie Laplace'a względem drugiej kolumny.

Odp. $\det B = -800$.

Przykład 9. Obliczmy wyznacznik macierzy

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik ten jest stopnia czwartego, więc tak go przekształcimy, aby móc go rozwinąć względem jakiejś kolumny lub wiersza. Można na przykład przekształcić tak wiersz czwarty, aby otrzymać w nim trzy zera.

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overset{krok\ 1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{krok\ 2}{=} 1 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{krok\ 3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{krok\ 4}{=}$$

$$= (-1) \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(30 - 12) = -18.$$

- W kroku pierwszym do kolumny trzeciej oraz do kolumny czwartej dodajemy kolumnę drugą (dodajemy odpowiednie wartości w poszczególnych wierszach każdej z kolumn). Korzystamy z własności 5) twierdzenia 2.
- W kroku 2, zgodnie z twierdzeniem Laplace'a, rozwijamy macierz względem wiersza czwartego (tam mamy trzy zera).
- W kroku 3 widzimy, że dość szybko można w wierszu trzecim otrzymać dwa zera, dodając kolumnę pierwszą do kolumny drugiej oraz do trzeciej. Korzystamy z własności 5) twierdzenia 2.
- W kroku 4 stosujemy rozwinięcie Laplace'a względem trzeciego wiersza.

Odp. $\det C = -18$.

Przykład 10. Obliczmy wyznacznik macierzy

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Mamy teraz macierz stopnia piątego. Spróbujemy ją tak przekształcić, aby otrzymać macierz górnotrójkątną. Wówczas szybo policzymy jej wyznacznik, mnożąc elementy stojące na głównej przekątnej. Zatem:

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \overset{krok\ 1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} \overset{krok\ 2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} \overset{krok\ 3}{=}$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} \overset{krok\ 4}{=} 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} \overset{krok\ 5}{=} -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{2} \end{vmatrix} = 130.$$

- W kroku pierwszym od wiersza drugiego odejmujemy wiersz pierwszy pomnożony przez 2, podobnie od wiersza czwartego odejmujemy wiersz pierwszy pomnożony przez dwa (aby w kolumnie pierwszej pod elementem a_{11} były same zera). Korzystamy tutaj z własności 5) twierdzenia 2.
- W kroku 2 od wiersza trzeciego i czwartego odejmujemy wiersz drugi. Korzystamy z własności 5) twierdzenia 2.
- W kroku 3 wyłączamy przed wyznacznik liczbę 4 z wiersza drugiego. Korzystamy z własności 4) twierdzenia 2.
- W kroku 4 od wiersza czwartego odejmujemy wiersz trzeci pomnożony przez 6. Korzystamy tutaj z własności 5) twierdzenia 2.
- W kroku 5 zamieniamy miejscami ostatnie dwa wiersze (wyznacznik zmienia znak). Korzystamy z własności 2) twierdzenia 2.
- Otrzymaliśmy macierz górnotrójkątną, więc jej wyznacznik jest równy iloczynowi elementów stojących na głównej przekątnej.

Odp. $\det D = 130$.

5. Podsumowanie

1. Wyznacznik macierzy stopnia 1 jest równy (jedynemu) elementowi tej macierzy.
2. Wyznacznik macierzy stopnia 2 najczęściej liczymy ze wzoru $(*)$.
3. Do obliczania wyznaczników macierzy stopnia 3 możemy (ale nie zawsze musimy) zastosować regułę Sarrusa.
4. Przy obliczaniu wyznaczników macierzy stopnia większego niż 2 dobrze jest zastosować własności wyznaczników (podane w twierdzeniu 2), które mogą znacznie ułatwić i skrócić obliczenia.
5. W wyznacznikach wyższych stopni najczęściej za pomocą wybranego wiersza zerujemy elementy w pewnej kolumnie, aby następnie skorzystać z rozwinięcia Laplace'a względem tej kolumny. Należy pamiętać, że w jednym kroku operujemy wyłącznie jednym ustalonym wierszem (mnożymy go kolejno przez odpowiednie stałe i dodajemy do pozostałych wierszy). Można też operować jedną kolumną, aby wyzerować elementy w wybranym wierszu.

6. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Obliczyć wyznaczniki następujących macierzy:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3+2i & 2-i & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ i & 1+i & 2i \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1+i & i+3 \\ i & 2i & 0 \\ 2+i & -i & 2 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$

Odpowiedzi

a) -6, **b)** $-4-3i$, **c)** $15+i$,

d) -5, **e)** 1, **f)** 76.

Więcej zadań można znaleźć np. w [3]– [6].

Literatura

1. K. Adrianowicz, *Matrices and operations on them —a short course*, MINUT 2020 (2), pp. 149–162.
2. G. Banaszak, W. Gajda, *Elementy algebry liniowej, cz. 1*, Wydawnictwo Naukowo–Techniczne, Warszawa 2002
3. M. Biedrońska, *Zbiór zadań z odpowiedziami i rozwiązaniami*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2010.
4. T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2004.
5. T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 1. Przykłady i zadania*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2001.
6. E. Łobos, J. Macura, B. Sikora, *Calculus and linear algebra in exercises, part 2*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2020.
7. A. Mostowski, M. Stark, *Algebra wyższa, część I*, PWN, Warszawa 1953, s. 127–129.