

METODA WYZNACZANIA WSPÓŁCZYNNIKA TARCIA PAR CIERNYCH W WARUNKACH DRGAŃ SAMOWZBUDNYCH WAHADŁA FROUDE'A

Streszczenie

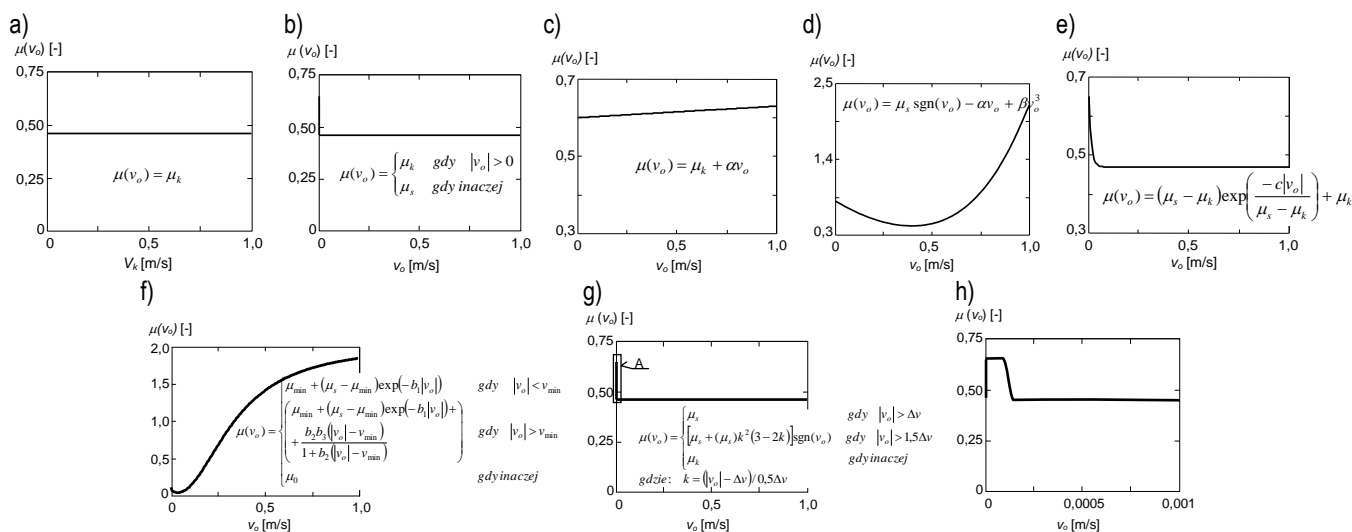
W artykule przedstawiono propozycję metody wyznaczania współczynników tarcia suchego statycznego i kinetycznego dla par kinematycznych w warunkach drgań samowzbudnych występujących w wahadle Froude'a. W metodzie tej, w pierwszej kolejności należy wyznaczyć współczynnik tarcia kinetycznego, który następnie należy wykorzystać podczas obliczania współczynnika tarcia statycznego. Współczynniki tarcia wyznaczane są na podstawie pomiaru amplitudy drgań samowzbudnych wahadła. Pomiar tej amplitudy, dla współczynnika tarcia kinetycznego należy przeprowadzić, gdy panują warunki tarcia ślizgowego, a statycznego – gdy warunki zjawiska stick-slip.

WSTĘP

Tarcie jest zjawiskiem, które powszechnie występuje niemal we wszystkich układach mechanicznych. Chęć poznania tego zjawiska inspiruje badaczy od wielu stuleci. Pierwsze udokumentowane próby jego modelowania przypisuje się Leonardo da Vinci. Wg jego dociekań, reakcja siły tarcia jest równa iloczynowi normalnej siły nacisku wywieranej na ciało i liczby stałej wynoszącej $\frac{1}{4}$, uniwersalnej dla wszystkich ciał. Po latach okazało się, że stała ta (we współczesnych modelach nazywana współczynnikiem tarcia) jest słuszną dla wielu kombinacji materiałów par ciernych. Mimo rozległej historii badań, rzeczywista natura powstawania siły tarcia nie jest jeszcze dokładnie poznana. Nieskutecznie skompensowana reakcja siły tarcia prowadzi do ograniczenia funkcjonalności urządzeń technicznych do takiego stopnia, że stają się całkowicie bezużyteczne. Szczególne trudności w identyfikacji siły tarcia pojawiają się przy bardzo małych prędkościach i przemieszczeniach – typowych dla procesów precyzyjnego pozycjonowania członów roboczych urządzeń, np. w robotach, układach sterowania pojazdów lotniczych, przyrządach celowniczych, obrabiarkach.

Współcześnie w opisie teorii tarcia suchego ślizgowego proponuje się wiele różnorodnych charakterystyk współczynnika tarcia. Ich przykładowe przebiegi przedstawiono na rys. 1. Mają one najczęściej wyidealizowany przebieg liniowy [1, 2, 5] (rys. 1a,b,c,g,h) lub niekiedy przebieg nieliniowy, który zwykle jest słuszny w niewielkim zakresie zmian prędkości poślizgu [3, 4] (rys. 1d,e,f,g,h). Przydatność poszczególnych opisów tarcia można wstępnie ocenić już na podstawie analizy przebiegów przedstawionych krzywych. Wykresy z rysunków rys. 1a,b,c,e,g,h prezentują logiczny i realny zakres zmienności współczynnika tarcia w dużym przedziale prędkości poślizgu, zaś charakterystyki z rys. 1d i f świadczą o tym, iż ich wykorzystanie ograniczone jest do występowania tylko niewielkich prędkości poślizgu – przy prędkości poślizgu dochodzącej do 1 m/s współczynnik tarcia osiąga niewiarygodnie dużą wartość.

Celem prezentowanej pracy jest przedstawienie metody wyznaczania współczynnika tarcia statycznego μ_s i kinetycznego μ_k występujących w modelu tarcia przedstawionym na rys. 1b. Badania symulacyjne zjawiska tarcia przeprowadzone będą z wykorzystaniem wahadła Froude'a w środowisku Adams – dedykowanym do modelowania dynamiki układów wielomasowych.

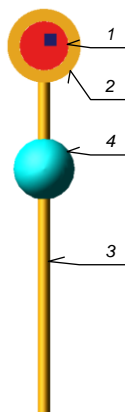


Rys. 1. Przykłady przebiegów współczynników tarcia suchego w funkcji prędkości poślizgu: a) przebieg stały jednoparametrowy [1], b) stały dwuparametrowy [1], c) liniowy [2], d) wielomianowy [3], e) krzywa Stribeck [3], f) dwie krzywe Stribeck [4], g) wg programu Adams [5], g) szczegół w powiększeniu z rys. 1g; wartości parametrów (α , β , b_1 , b_2 , b_3 , c , μ_s , μ_k , μ_{min} , v_{min} , Δv zaczerpnięto z cytowanej literatury

1. METODA WYZNACZANIA WSPÓŁCZYNNIKÓW TARCIA PAR CIERNYCH

Do wyznaczenia współczynnika tarcia suchego przyjęto układ mechaniczny stanowiący wahadło Froude'a (rys. 2, rys. 3). W urządzeniu tym wahadło (tuleja 2, ramię 3 i obciążnik 4) osadzone jest na wale 1, wykonującym ruch obrotowy z prędkością kątową ω . Ruch ten, wskutek pojawienia się sił tarcia pomiędzy tuleją a wałem, wprawia wahadło w drania samowzbudne, których amplituda zależy od długości ramienia wahadła, prędkości obrotowej wału i właściwości ciernych pary kinematycznej: wał-tuleja. Zakłada się ponadto, że tuleja będzie elementem wymiennym, dzięki czemu prezentowane urządzenie umożliwiać będzie badanie właściwości ciernie par kinematycznych wykonanych z różnych materiałów.

W celu wyznaczenia współczynników tarcia (μ_s i μ_k – dla modelu tarcia suchego przedstawionego na rys. 1b) wykonywane będą dwa rodzaje prób: współczynnik tarcia kinetycznego wyznaczany będzie w warunkach tarcia ślizgowego, a statycznego – w warunkach zjawiska stick-slip. Ze względu na to, że w proponowanej metodzie, do wyznaczenia współczynnika tarcia statycznego wymagana jest wcześniejsza znajomość współczynnika tarcia kinetycznego, w pierwszej kolejności konieczne jest wyznaczenie współczynnika tarcia kinetycznego (wg równania (4)), a następnie – statycznego (wg równania (11)). Sugerowany przebieg badań doświadczalnych prowadzących do wyznaczenia współczynników tarcia jest następujący:



Rys. 2. Model bryłowy wahadła Froude'a w programie Adams; 1 – napędzany wał, 2 – tuleja, 3 – ramię, 4 – obciążnik

- czynności wymagane do wyznaczenia współczynnika tarcia kinetycznego (ślizgowego):
 - przyjąć parametry pracy wahadła ω i L sprzyjające występowaniu zjawiska tarcia ślizgowego: zastosować $\omega L > 1$, gdzie ω – prędkość kątowa wału napędowego, $\omega_o = \sqrt{g/L}$ – częstość drgań własnych wahadła, g – przyspieszenie ziemskie,
 - uruchomić napęd wału wahadła,
 - zmierzyć kąt maksymalnego wychylenia ϕ_{max} (rys. 3a) wahadła w ruchu oscylacyjnym,
 - wyniki pomiaru zapisać w protokole,
- czynności wymagane do wyznaczenia współczynnika tarcia statycznego:
 - przyjąć parametry pracy wahadła sprzyjające występowaniu zjawiska tarcia stick-slip: ustawić najmniejszą prędkość kątową ω wału napędowego oraz długość ramienia L wahadła, tak aby uzyskać jak największą częstość drgań własnych wahadła – zastosować $\omega L < 0,1$,
 - uruchomić napęd wału,

- odczytać kąt maksymalnego wychylenia wahadła ϕ_{max} (rys. 3a),
 - wyniki pomiaru zapisać w protokole,
- obliczyć współczynniki tarcia kinetycznego μ_k i statycznego μ_s (wg równań (4) i (11)),
 - wykreślić charakterystykę współczynnika tarcia w funkcji prędkości poślizgu, wykorzystując wyniki otrzymane z badania tarcia ślizgowego; prędkość poślizgu wyznaczyć stosując zależność:

$$v \approx \begin{cases} 0 & \text{gdytarcie statyczne} \\ 0,5D\omega & \text{gdytarcie kinetyczne} \end{cases} \quad [\text{m/s}] \quad (1)$$

gdzie:

D – średnica wału napędowego [m].

2. MODEL MATEMATYCZNY

2.1. Schemat obliczeń współczynnika tarcia kinetycznego

Na potrzebę prezentowanego artykułu przyjęto, że rozpatrywane wahadło traktowane będzie jako wahadło matematyczne – założenie, że tuleja i ramię są bezmasowe, a obciążnik jest punktem materialnym.

W ruchu oscylacyjnym, energia potencjalna osiągnięta przy maksymalnym kącie wychylenia ramienia ϕ_{max} (rys. 3a), rozproszona jest przez pracę siły tarcia kinetycznego, przy ruchu powrotnym wahadła do położenia pionowego. Współczynnik tarcia kinetycznego wyznaczany jest na podstawie zasady zachowania energii potencjalnej i pracy siły tarcia kinetycznego.

Energię potencjalną wahadła E_p można wyznaczyć na podstawie równania

$$E_p = mgL(1 - \cos\phi_{max}) \quad [\text{Nm}] \quad (2)$$

a energię rozproszoną przez siłę tarcia kinetycznego E_{Tk} :

$$E_{Tk} = 0,5DN\mu_k\phi_{max} \quad [\text{Nm}] \quad (3)$$

gdzie:

$N=mg$ – normalna siła reakcji pomiędzy wałem i tuleją [N] – założono, że dominującą składową siły reakcji N jest siła grawitacji, a siły dynamiczne (odśrodkowa i przyspieszenia kątowego wahadła) o niewielkich wartościach (rys. 4a,b) można pominąć.

Przyjmując $E_p=E_{Tk}$ otrzymujemy równanie pozwalające wyznaczyć współczynnik tarcia kinetycznego μ_k :

$$\mu_k = \frac{L(1 - \cos\phi_{max})}{0,5D\phi_{max}} \quad [-] \quad (4)$$

2.2. Schemat obliczeń współczynnika tarcia statycznego

W warunkach tarcia stick-slip, tuleja wahadła obraca się jednocześnie wraz z wałem napędowym z prędkością kątową ω , aż do uzyskania kąta wychylenia ϕ_s (rys. 3a), tj. do chwili zrównoważenia momentu siły tarcia statycznego M_s przez moment zewnętrzny M_z . Po osiągnięciu tego kąta, wahadło posiadając energię kinetyczną wynikającą z ruchu obrotowego oraz energię wytworzoną przez siły tarcia kinetycznego, wychyla się jeszcze o dodatkowy kąt $\Delta\phi$, uzyskując maksymalne wychylenie ϕ_{max} .

Współczynnik tarcia statycznego wyznaczany jest na podstawie znajomości kąta wychylenia ϕ_s spowodowanego oddziaływaniem momentu siły tarcia statycznego, wyznaczanego w podanym niżej toku obliczeń.

Kąt wychylenia $\Delta\phi$ określa zależność (wg rys. 3a):

$$\Delta\phi = \phi_{max} - \phi_s \quad [\text{rad}] \quad (5)$$

Energia kinetyczna wahadła E_k wraz z energią E_{Tk} wytworzoną przez moment siły tarcia kinetycznego (na drodze kątowej $\Delta\phi$) wynosi:

$$E_k + E_{Tk} = 0,5I\omega^2 + 0,5mDg\mu_k(\phi_{max} - \phi_s) \quad [\text{Nm}] \quad (6)$$

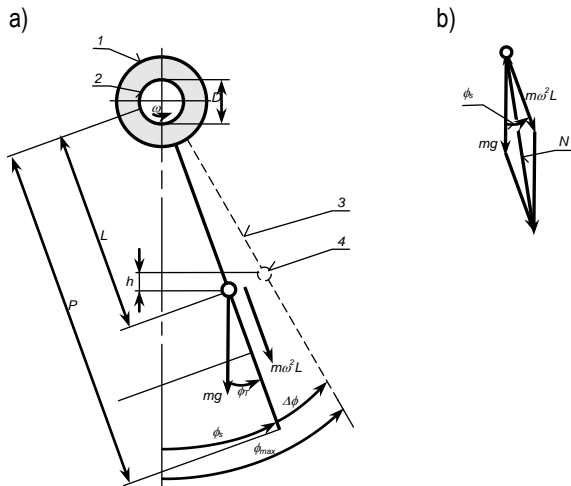
gdzie:

- g – przyspieszenie ziemskie [m/s²],
 - ω – prędkość kątowna wału napędowego [rad/s],
 - $I = mL^2$ – masowy moment bezwładności obciążnika,
 - m – masa obciążnika [kg],
 - D, L – wymiary w [m], oznaczone na rys. 3a.
- Przyrost energii potencjalnej, uwzględniając kąt $\Delta\phi$ wynosi:

$$E_p = mgh = mgL(\cos\phi_s - \cos\phi_{\max}) \quad [Nm] \quad (7)$$

Stosując zasadę zachowania energii $E_k + E_{Tk} = E_p$, uzyskuje się jedno nieliniowe równanie z jedną niewiadomą ϕ_s (ϕ_s – kąt wychYLENIA, który występuje w chwili „zerwania” tarcia statycznego):

$$0.5I\omega^2 + 0.5mDg\mu_k(\phi_{\max} - \phi_s) - mgL(\cos\phi_s - \cos\phi_{\max}) = 0 \quad (8)$$



Rys. 3. Schemat wahadła Froude'a: a) główne elementy wahadła, b) schemat wyznaczenia wypadkowej siły N ; 1 – tuleja ciarna, 2 – wał napędowy, 3 – ramię wahadła, 4 – obciążnik o masie m , ω – prędkość kątowna wału napędowego, ϕ_{\max} – maksymalny kąt wychYLENIA wahadła; wielkości występujące w warunkach zjawiska stick-slip: ϕ_s – kąt wychYLENIA wahadła spowodowany oddziaływaniem momentu siły tarcia statycznego, $\Delta\phi$ – kąt dodatkowy wychYLENIA wynikający z energii kinetycznej wahadła nabytej w fazie ruchu tarcia statycznego raz oddziaływania momentu siły tarcia kinetycznego

Niewiadomą ϕ_s można wyznaczyć numerycznie, np. wykorzystując narzędzie solver w programie MsExcel.

Moment zewnętrzny wywierany na wahadło spowodowany oddziaływaniem siły grawitacji

$$M_z = Lmg \sin \phi_s \quad [Nm] \quad (9)$$

równoważony jest przez moment siły tarcia statycznego

$$M_s = 0.5DN\mu_s \quad [Nm] \quad (10)$$

gdzie:

$$N = m\sqrt{g^2 + (\omega^2 L)^2} + 2g\omega^2 L \cos \phi_s$$

– normalna siła reakcji występująca pomiędzy wałem napędowym, a tuleją cierną (wypadkowa siły grawitacji i siły odśrodkowej wywieranej na wahadło poruszające się ze stałą prędkością kątowną ω wału napędowego – rys. 3b).

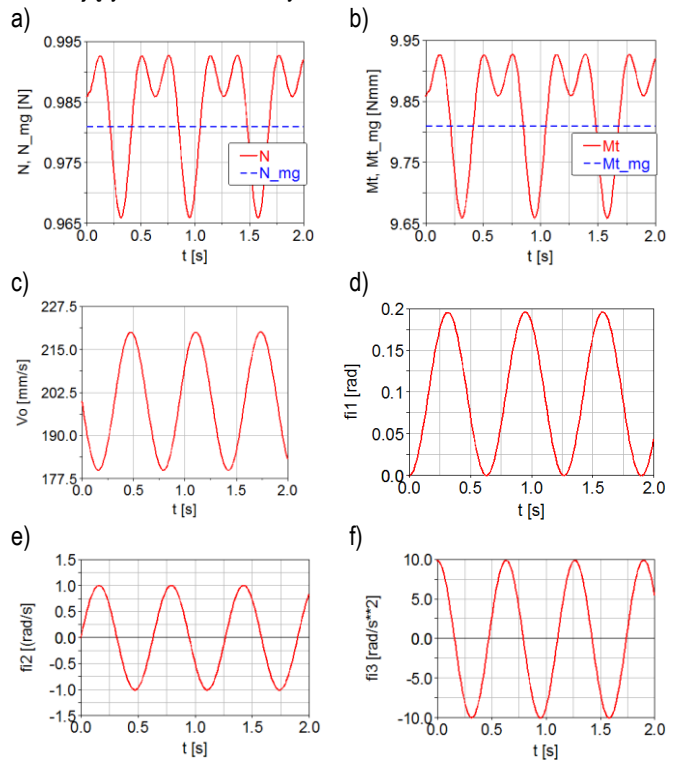
Uwzględniając $M_s = M_z$ otrzymujemy równanie pozwalające wyznaczyć współczynnik tarcia statycznego μ_s :

$$\mu_s = \frac{gL \sin \phi_s}{0.5D\sqrt{g^2 + (\omega^2 L)^2} + 2g\omega^2 L \cos \phi_s} \quad [-] \quad (11)$$

3. WYNIKI SYMULACJI MODELU WAHADŁA

W środowisku Adams zbudowano model bryłowy wahadła Froude'a (rys. 2) oraz przeprowadzono jego symulację – celem zweryfikowania zaproponowanej metody wyznaczania współczynników tarcia. Przyjęto, że tuleja i ramię są bezmasowe (podobnie jak w podrozdziale 2.2), obciążnik jest masą skupioną $m=0,1$ kg i ramię ma długość $L=0,1$ m. Model tarcia zastosowany w Adamsie (rys. 1g,h), posiada o jeden parametr więcej niż model z rys. 1b. Parametrem tym jest prędkość progowa Δv (standardowo $\Delta v=0,001$ mm/s), która oznacza prędkość poślizgu, przy której następuje przejście pomiędzy stanem tarcia statycznego i kinetycznego. Zakłada się, że poniżej tej prędkości poślizgu nie występuje oraz pomiędzy parami ciernymi panuje tarcie statyczne.

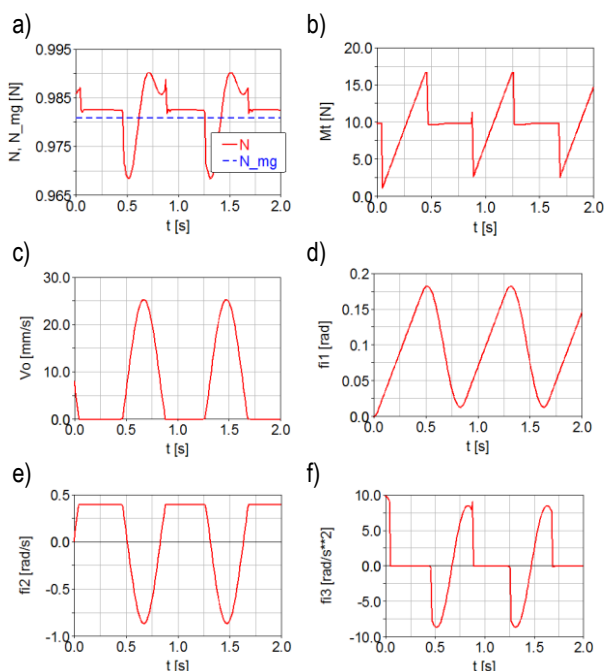
Na rys. 4 przedstawiono wyniki symulacji w warunkach tarcia kinetycznego: $\omega=10$ rad/s, ($\omega L=1,01$), $\mu_k=0,5$. Wahadło wykonuje drgania oscylacyjne z częstością drgań własnych $\omega_b=9,905$ rad/s ($T_0=0,634$ s, rys. 4d,e,f). Pomiedzy parami ciernymi występuje zawsze poślizg ($v_0 > 180$ mm/s, rys. 4c). Na rys. 4a zaprezentowano przebieg siły nacisku czopa na wał, a na rys. 4b – wynikający z niej moment tarcia. Krzywa oznaczona linią ciągłą dotyczy siły nacisku N , której składowymi są siła grawitacji i siły dynamiczne (odśrodkowa i bezwładności związana z przyspieszeniem kątowym ruchu wahadła), a oznaczona linią przerywaną – gdy uwzględnia się tylko siłę grawitacji. Z analizy tych rysunków wynika, że siła grawitacji jest dominującym składnikiem siły nacisku N .



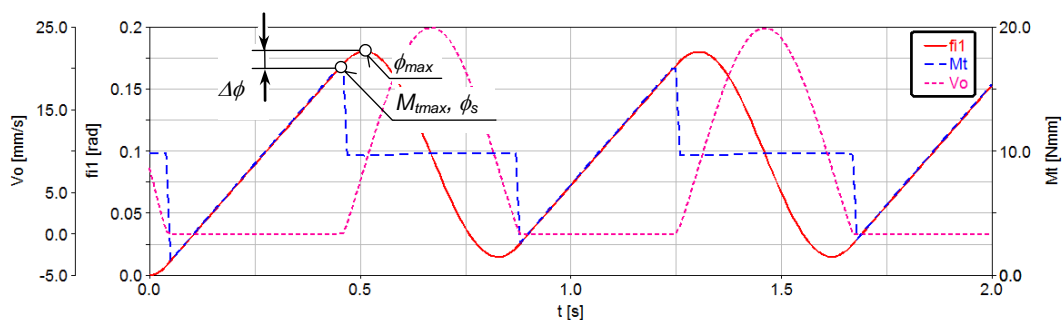
Rys. 4. Wyniki symulacji drgań samowzbudnych w warunkach występowania tarcia kinetycznego (ślizgowego): a) normalna siła nacisku tulei na wał wahadła, b) moment siły tarcia, c) prędkość poślizgu, d) kąt wychYLENIA, e) prędkość kątowna, f) przyspieszenie kątowne; N – normalna siła nacisku tulei na wał z uwzględnieniem siły grawitacji, odśrodkowej i przyspieszenia kątownego wahadła, N_{mg} – normalna siła nacisku z uwzględnieniem tylko siły grawitacji, M_t – moment siły tarcia wynikający z uwzględnieniem tylko siły grawitacji

Na rys. 5 i rys. 6 przedstawione są wyniki symulacji w warunkach tarcia zjawiska stick-slip: $\omega=0,4$ rad/s, ($\omega L=0,04$), $\mu_s=0,85$, $\mu_k=0,5$. Tarcie statyczne występuje naprzemiennie z tarcie kine-

tycznym. Prędkość poślizgu (pomiędzy parą cierną wał-tuleja) cyklicznie osiąga wartość zerową (rys. 5c), a odpowiadająca tym chwilom prędkość kątowna wahadła równa jest prędkości obrotowej wału napędowego (rys. 5e), przy zerowym przyspieszeniu kątowym (rys. 5f). Siłę nacisku, na rys. 5a, wyznaczono z uwzględnieniem sił dynamicznych (odśrodkowej i przyspieszenia kątownego) i siły grawitacji (krzywa oznaczona linią ciągłą) oraz tylko siły grawitacji (krzywa oznaczona linią przerywaną). Uwzględnienie sił dynamicznych (w obliczeniach siły nacisku) powoduje nieznaczne fluktuacje wartości momentu siły tarcia kinetycznego (rys. 5b). Częstość drgań wahadła w warunkach tarcia stick-slip jest mniejsza niż częstość drgań własnych ω_b osiągana w warunkach tarcia kinetycznego (wg rys. 4d, rys. 5d). Na rys. 6 przedstawiono jednocześnie wykresy z rys. 5b,c,d. Potwierdzają one, że maksimum kąta wychylenia wahadła ϕ_{max} następuje później od kąta ϕ_s i jest większe od niego o kąt $\Delta\phi$ (ϕ_s – kąt, przy którym następuje przejście ze stanu tarcia statycznego w kinetyczne).



Rys. 5. Wyniki symulacji drgań samowzbudnych w warunkach występowania zjawiska stick-slip: a) normalna siła nacisku tulei wahadła na wał napędowy, b) moment siły tarcia, c) prędkość poślizgu, d) kąt wychylenia, e) prędkość kątowna, f) przyspieszenie kątowe; N – normalna siła nacisku tulei na wał z uwzględnieniem siły grawitacji, odśrodkowej i przyspieszenia kątownego wahadła, N_mg – normalna siła nacisku z uwzględnieniem tylko siły grawitacji



Rys. 6. Moment siły tarcia statycznego M_t w odniesieniu do kąta wychylenia ϕ wahadła i prędkości poślizgu V_o ; maksymalny kąt ϕ_{max} wychylenia wahadła i maksymalny momentem M_{tmax} siły tarcia statycznego nie występują jednocześnie, ϕ_{max} , ϕ_s , $\Delta\phi$ – wielkości oznaczone także na rys. 2a

Na rys. 7 przedstawiono wykres wpływ długości ramienia L , wartości rzeczywistego współczynnika tarcia kinetycznego μ_k i dokładności odczytu kąta maksymalnego wychylenia wahadła $\Delta\phi_{max}$ na błąd $\varepsilon_{\mu k}$ wyznaczenia wartości współczynnika tarcia kinetycznego

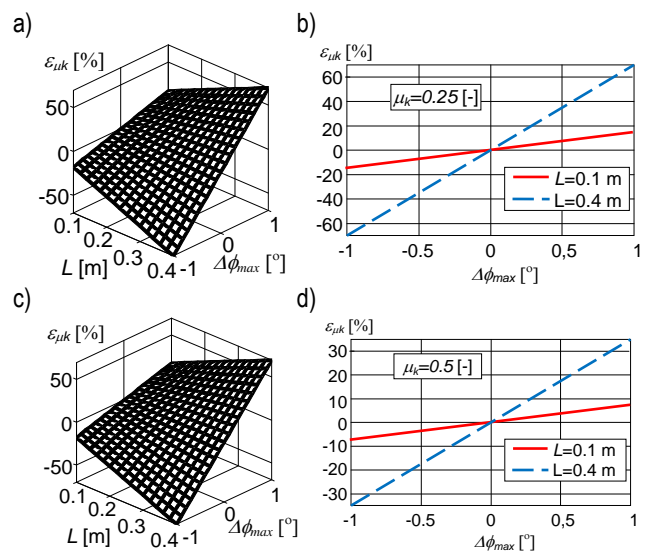
$$\varepsilon_{\mu k} = \frac{\mu_k - \mu_{kp}}{\mu_k} 100\% \quad [Nm] \quad (12)$$

gdzie:

μ_k – rzeczywisty współczynnik tarcia kinetycznego [-],

μ_{kp} – współczynnik tarcia kinetycznego wyznaczony na podstawie pomiaru ϕ_{max} z dokładnością $\Delta\phi_{max}$.

Dane przedstawione na rys. 7a,b opracowano przyjmując wartość rzeczywistego współczynnika tarcia kinetycznego $\mu_k=0,25$, a rys. 7c,d – $\mu_k=0,5$. Z analizy prezentowanych wykresów wynika, że dokładność wyznaczania współczynnika tarcia jest tym lepsza, im krótsza długość L wahadła i większa wartość rzeczywistego współczynnika tarcia μ_k .



Rys. 7. Wpływ dokładności odczytu kąta wychylenia $\Delta\phi_{max}$ i długości L wahadła na wartość wyznaczanego współczynnika tarcia kinetycznego wynosi $\mu_k=0,25$, c) i d) gdy rzeczywisty współczynnik tarcia kinetycznego wynosi $\mu_k=0,5$

Dokładność odczytu $\Delta\phi_{max}$ ma bardzo duży wpływ na błąd wyznaczania współczynnika tarcia. Zakładając długość wahadła $L=0,1m$ przy dokładności odczytu $\Delta\phi_{max}=1^\circ$, gdy $\mu_k=0,5$, uzyskiwany błąd wyznaczonej wartości współczynnika tarcia wynosi ok. 8%

(rys. 7c,d), a gdy $\mu_k=0,25$ - ok. 16% (rys. 7a,b). Podobne relacje występują przy wyznaczaniu współczynnika tarcia statycznego (na podstawie badań własnych).

PODSUMOWANIE

W artykule zaproponowano metodę wyznaczania współczynników tarcia wykorzystując zjawisko drgań samowzbudnych pojawiających się w wahadle Foude'a. Metoda pozwala wyznaczać współczynniki tarcia kinetycznego i statycznego pary ciernej: wał napędowy-tuleja. Przyjmując, że pary te są wymienne, wyznaczyć można parametry cierne dla różnych par materiałów. Podstawowym parametrem pomiarowym podczas badań eksperymentalnym jest kąt maksymalnego wychylenia wahadła ϕ_{max} . Z analizy wyników badań symulacyjnych można stwierdzić, że dokładność pomiaru tego parametru silnie rzutuje na dokładność wyznaczania współczynnika tarcia. Błąd pomiaru amplitudy wychylenia wahadła o $\Delta\phi_{max}=1^\circ$ powoduje niedokładność obliczenia współczynnika tarcia o $\varepsilon_{\mu_k}=8\%$ – zakładając długość wahadła $L=0,1\text{m}$ i rzeczywisty współczynnik tarcia $\mu_k=0,5$. Ze względu na ten fakt, pomiar amplitudy drgań powinien być wykonany możliwie z jak największą dokładnością, metodą bezdotykową, niezakłócającą przebieg drgań samowzbudnych.

BIBLIOGRAFIA

1. Tarnowski W., Bartkiewicz S., *Modelowanie matematyczne i symulacja komputerowa dynamicznych procesów ciągłych*. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Koszalińskiej, Koszalin 1998.
2. Krivoplas A., *Paketo-formirujuszczije masziny*. Maszinstrojienie Moskwa 1980.
3. Awrejcewicz J., *Coefficients identification of dynamic nonlinear dry friction dependence on velocity*. Science Books, Mechanics, Lodz University Press 1984, 429(67), 5-12.
4. Awrejcewicz J., Olejnik P., *Numerical analysis of self-excited by friction chaotic oscillations in two-degrees-of-freedom system using exact Henon method*. Machine Dynamics Problems 2002, 26(4), 9-20.
5. Basic ADAMS Full Simulation Training Guide, <http://support.mscsoftware.com> (data pobrania: 2015-07-15).

METHOD OF FRICTION COEFFICIENT DETERMINATION OF FRICTION PAIRS IN CONDITIONS OF SELF-EXCITED VIBRATION OF FROUDE PENDULUM

Abstract

The paper presents a method for the static and kinetic friction coefficients determination of kinematic pairs in the conditions of self-excited vibrations occurring in the Froude pendulum. In this method, as the first the kinetic friction coefficient must be determined, and then it should be used when calculating the static friction coefficient. The friction coefficients are determined by measuring the amplitude of self-excited oscillations of the pendulum. The measurement of the amplitude, for

the coefficient of kinetic friction, must be carried out when the sliding friction conditions are, and static – when the conditions of stick-slip phenomenon appear.

Autorzy:

dr hab. inż. **Tomasz Piątkowski** – Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy w Bydgoszczy