

Rafał GIL, Piotr KANIEWSKI

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA, WYDZIAŁ ELEKTRONIKI, INSTYTUT RADIOELEKTRONIKI,  
ul. Gen. Sylwestra Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa

## Wybrane algorytmy wygładzania w aplikacjach nawigacyjnych

Mgr inż. Rafał GIL

Absolwent kierunków elektronika i telekomunikacja oraz informatyka na Politechnice Białostockiej. Obecnie jako doktorant na Wydziale Elektroniki WAT prowadzi badania nad zastosowaniem algorytmów wygładzania w aplikacjach nawigacyjnych. Swoje zainteresowania skupia wokół systemów nawigacji inercyjnej. Jest pracownikiem Transbit Sp. z o.o. na stanowisku starszego konstruktora elektronika.



e-mail: rgil@wat.edu.pl

Plk dr hab. inż. Piotr KANIEWSKI

Absolwent i pracownik naukowo-dydaktyczny Wojskowej Akademii Technicznej zatrudniony na stanowisku profesora nadzwyczajnego. Pełni funkcję Dyrektora Instytutu Radioelektroniki Wydziału Elektroniki WAT. Prowadzi wykłady z przedmiotów tematycznie związanych z przetwarzaniem sygnałów oraz z systemami nawigacyjnymi. Jego zainteresowania naukowe koncentrują się na systemach pokładowych bezałogowych statków powietrznych, algorytmach przetwarzania sygnałów i danych oraz integracji systemów nawigacyjnych.



e-mail: pkaniewski@wat.edu.pl

### Streszczenie

W artykule przedstawiono wyniki badań algorytmów wygładzania w układzie liniowym dyskretnym. Przeprowadzone badania pozwoliły na wyznaczenie błędów średniokwadratowych (RMS) położenia dla systemu z filtrem Kalmana oraz optymalnym estymatorem wygładzającym. Zaprezentowano jakościową poprawę, redukcję błędu RMS, oceny stanu układu wynikającą z zastosowania wygładzania. Przeprowadzone badania potwierdziły wartość użyteczną algorytmów wygładzania.

**Słowa kluczowe:** nawigacja, ocena stanu, wygładzanie, filtracja Kalmana.

### Selected smoothing algorithms in navigation applications

#### Abstract

The paper presents the results of testing smoothing algorithms for a linear discrete system. Three types of smoothing algorithms are analyzed in the paper: fixed-interval smoothing, fixed-point smoothing, fixed-lag smoothing. The performance of the above smoothing algorithms was experimentally tested for a selected system model. There was assumed the dynamics model called in the literature as PVA (Position-Velocity-Acceleration). It describes the rate of change in the position, velocity and acceleration of the object in time. The research allowed determining the root mean square errors (RMS) of the position for a system with Kalman filter and the optimal smoothing estimator. It was shown that the use of smoothing improved the estimation of the state of the system significantly. The quality improvement, that is the decrease in the RMS errors of the system state estimates as a result of using smoothing algorithms, is presented in the paper. The investigations performed proved the usefulness of smoothing algorithms. The obtained results allowed determining the level of improvement in the state estimation when using the optimal smoothing estimators. Moreover, there was shown the improvement in the estimation accuracy with the increase in the time interval between the instants of state estimation and measurement.

**Keywords:** navigation, state estimation, smoothing, Kalman filtering.

## 1. Wprowadzenie

Z teorii estymacji wiadomo, że ocena stanu  $x(k)$  w chwili  $k$ , jest oceną wartości  $x(k)$  na podstawie znanego ciągu pomiarów  $z(1), \dots, z(j)$ , które mają powiązanie z  $x(k)$  przez pewien układ pomiarowy. Jeżeli  $k > j$  zagadnienie to nazywamy predykcją, jeżeli  $k = j$  filtracją, a jeżeli  $k < j$  nazywamy wygładzaniem [1]. Dwa pierwsze zagadnienia są ze sobą powiązane, co wyraźnie widać w równaniach opisujących rekurencyjny algorytm filtracji kalmanowskiej [2]. Filtr opisany tymi równaniami, dostarcza najlepszą estymatę stanu  $x(k)$  na podstawie pomiarów dokonanych do chwili  $k$ . Optymalny estymator wygładzający pozwala jednak na jeszcze lepsze oszacowanie stanu  $x(k)$  wykorzystując pomiary wykonane po chwili  $k$ . Można zatem powiedzieć, że estymatory wygładzające służą rozwiązaniu tego samego problemu estymacji, ale niekoniecznie w czasie rzeczywistym. Obecnie stosowane algorytmy wygładzania optymalnego wywodzą się z teorii filtracji

kalmanowskiej i znajdują zastosowanie w wybranych systemach pozycjonowania i nawigacji pojazdów lądowych [3, 4], podwodnych [5] i powietrznych [6] dopuszczających opóźnienie oceny stanu w stosunku do pomiaru.

## 2. Optymalny estymator wygładzający

Optymalny estymator wygładzający może być opisany jako kombinacja optymalnego filtru działającego do przodu oraz drugiego filtru działającego do tyłu [7]. Obie estymaty mają nieskorelowane błędy, ponieważ zakłócenia procesu oraz pomiaru są z założenia gaussowskimi szumami białymi. Zakładając, że optymalny estymator wygładzający oblicza kombinację estymaty  $\hat{x}(k|k)$  filtru działającego do przód oraz estymaty  $\hat{x}(k|k+1:N)$  filtru działającego do tyłu, to opisujące go równanie ma postać

$$\hat{x}(k|N) = A(k)\hat{x}(k|k) + A'(k)\hat{x}(k|k+1:N) \quad (1)$$

gdzie  $A(k)$  oraz  $A'(k)$  są stałymi macierzami współczynników, które należy wyznaczyć. Zastępując w równaniu (1) estymaty  $\hat{x}(k|k)$  oraz  $\hat{x}(k|k+1:N)$  odpowiadającymi im sumami wartości rzeczywistej oraz błędu estymacji możemy sformułować zależność na błąd estymacji po wygładzaniu

$$\tilde{x}(k|N) = [A(k) + A'(k) - I]x(k|k) + A(k)\tilde{x}(k|k) + A'(k)\tilde{x}(k|k+1:N) \quad (2)$$

Pamiętając, że estymata po wygładzaniu jest nieobciążona, jeżeli poszczególne estymaty po filtracji również są nieobciążone, należy pozbyć się pierwszego składnika w powyższym równaniu. Podstawiając równanie

$$A'(k) = I - A(k) \quad (3)$$

do (2) otrzymujemy

$$\tilde{x}(k|N) = A(k)\tilde{x}(k|k) + [I - A(k)]\tilde{x}(k|k+1:N) \quad (4)$$

Zależność na macierz kowariancji błędu po wygładzaniu może być wówczas sformułowana następująco

$$P(k|N) = E[\tilde{x}(k|N)\tilde{x}^T(k|N)] = A(k)P(k|k)A(k)^T + [I - A(k)]P(k|k+1:N)[I - A(k)]^T \quad (5)$$

W celu znalezienia wartości macierzy  $A(k)$  dla której otrzymamy minimalizację błędów należy wyznaczyć pochodną

$$\frac{d \{ \text{tr} [P(k|N)] \}}{d [A(k)]} = 2A(k)P(k|k) - 2[I - A(k)]P(k|k+1:N) \quad (6)$$

Po przyrównaniu pochodnej do zera otrzymujemy zależność na macierz  $A(k)$  minimalizującą ślad macierzy kowariancji błędów

$$A(k) = P(k|k+1:N) [P(k|k) + P(k|k+1:N)]^{-1} \quad (7)$$

oraz odpowiednio

$$I - A(k) = P(k|k) [P(k|k) + P(k|k+1:N)]^{-1} \quad (8)$$

Podstawiając powyższe równania do (5) oraz dokonując pewnych przekształceń algebraicznych otrzymujemy

$$P(k|N) = [P(k|k)^{-1} + P(k|k+1:N)^{-1}]^{-1} \quad (9)$$

Z powyższego równania wynika, że ocena stanu przy wygładzaniu jest zawsze lepsza lub równa ocenie stanu przy filtracji.

### 3. Typy estymatorów wygładzających

Definiuje się trzy typy układów wygładzających [8, 9]:

*Wygładzanie w stałym przedziale.* W tym przypadku dysponujemy pomiarami wykonanymi w ustalonym przedziale czasu  $[0, N]$  i dla każdego punktu czasowego  $k$  leżącego wewnątrz przedziału chcemy obliczyć ocenę optymalną stanu opartą na wszystkich znanych pomiarach. Tak więc, szukana ocena ma postać

$$\hat{x}(k|N) = E[x(k)|z(1), \dots, z(N)] \quad (10)$$

dla  $k = 0, 1, \dots, N$ . Ponieważ ocenę optymalną stanu opieramy na wszystkich znanych pomiarach, wygładzanie w stałym przedziale zapewnia najlepszą możliwą estymatę dla każdej chwili z ustalonego przedziału. Wygładzanie w stałym przedziale stosuje się po eksperymencie, aby poprawić oceny stanu uzyskane z filtracji, np. przetwarzanie danych sejsmicznych w badaniach geologicznych [8].

*Wygładzanie w stałym punkcie.* W tej sytuacji wyznaczamy ocenę optymalną stanu dla pewnego ustalonego punktu czasowego  $k$  na podstawie wszystkich pomiarów aż do chwili obecnej. Mówiąc ogólniej chcemy określić

$$\hat{x}(k|j) = E[x(k)|z(1), \dots, z(j)] \quad (11)$$

dla pewnego ustalonego  $k$ , przy czym  $j > k$ . Wygładzanie w stałym punkcie można stosować na bieżąco i wszędzie tam, gdzie w trakcie trwania eksperymentu lub procesu należy estymować ich stany początkowe. Przykładem może być estymacja stanu początkowego satelity w czasie wprowadzania go na orbitę, dokonana na podstawie danych śledzenia orbity [9].

*Wygładzanie ze stałym opóźnieniem.* W tej sytuacji wyznaczamy ocenę optymalną stanu dla pewnego ustalonego punktu czasowego  $k$  leżącego w stałej odległości  $N$  od chwili ostatniego pomiaru. Indeks  $k$  nieustannie się zmienia w trakcie pozyskiwania nowych pomiarów, ale opóźnienie  $N$  jest stałe. Innymi słowy, chwila w której ustala się ocenę, wyprzedza chwilę ostatniego pomiaru o stałą odległość. Szukana ocena ma zatem postać

$$\hat{x}(k|k+N) = E[x(k)|z(1), \dots, z(k), z(k+1), \dots, z(k+N)] \quad (12)$$

przy czym  $k = 0, 1, \dots$ , zaś  $N$  jest dodatnią liczbą całkowitą. Wygładzanie ze stałym opóźnieniem również można stosować na bieżąco. Takie podejście do zagadnienia wygładzania, znajduje zastosowanie przede wszystkim w systemach łączności, w sytuacji gdy jest dozwolone opóźnienie oceny w stosunku do pomiaru [8].

### 4. Model systemu

W celu praktycznego porównania algorytmów wygładzania i filtracji przeprowadzono szereg badań symulacyjnych, podczas których przyjęto model dynamiki systemu określanej w literaturze jako PVA (Position-Velocity-Acceleration), który opisuje zmiany w czasie składowych położenia, prędkości i przyspieszenia obiektu [10]. Zmiany w czasie i związki pomiędzy zmiennymi stanu w modelu PVA wynikają z newtonowskich równań ruchu i w wersji dyskretnej można je zapisać następująco:

$$\begin{bmatrix} p(k+1) \\ v(k+1) \\ a(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(k) \\ v(k) \\ a(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_p(k) \\ w_v(k) \\ w_a(k) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Powyższe równanie ma postać odpowiadającą ogólnemu liniowemu równaniu dynamiki. Macierz kowariancji dyskretnych zakłóceń procesu  $Q$  wyznacza się na podstawie ciągłego modelu dynamiki PVA. Postać tej macierzy jest następująca [10]:

$$Q = \begin{bmatrix} S_a T^5 & S_a T^4 & S_a T^3 \\ 20 & 8 & 6 \\ S_a T^4 & S_a T^3 & S_a T^2 \\ 8 & 3 & 2 \\ S_a T^3 & S_a T^2 & S_a T \\ 6 & 2 & S_a T \end{bmatrix} \quad (14)$$

Parametr  $S_a$  w powyższej macierzy reprezentuje widmową gęstość mocy szumu białego, stanowiącego zakłócenie w ciągłym modelu dynamiki systemu. Ponieważ czas dyskretyzacji rozpatrywanego systemu  $T$  jest stały, indeks  $k$  w zapisie macierzy  $Q$  mógł zostać opuszczony. Model obserwacji w przyjętym modelu systemu wynika z założenia, że wykonywane są w nim pomiary położenia oraz przyspieszenia i jest dany poniższą zależnością, o postaci odpowiadającej ogólnemu liniowemu równaniu obserwacji:

$$z(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(k) \\ v(k) \\ a(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_p(k) \\ v_a(k) \end{bmatrix} \quad (15)$$

Ostatni składnik powyższego równania reprezentuje błędy pomiarowe obu zastosowanych przyrządów. Założono, że błędy te mają rozkład normalny, o zerowej wartości oczekiwanej i macierzy kowariancji błędów pomiarowych:

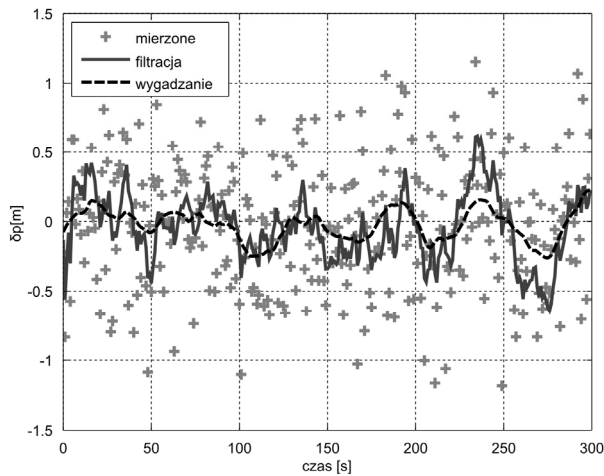
$$R = \begin{bmatrix} \sigma_p^2 & 0 \\ 0 & \sigma_a^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

przy czym elementy diagonalne macierzy  $R$  stanowią wariancję błędów pomiarowych czujnika położenia  $\sigma_p^2$  i wariancję błędów pomiarowych czujnika przyspieszenia  $\sigma_a^2$ . Znajomość równań (13) i (15) oraz macierzy  $Q$  i  $R$  jest wystarczająca do zapisania równań filtracji kalmanowskiej.

### 5. Przykładowe wyniki badań

W oparciu o przedstawiony model PVA przeprowadzono badania symulacyjne. Badania miały na celu zbadanie własności wybranych algorytmów wygładzania. Podczas symulacji wygenerowano trajektorię ruchu w jednym wymiarze, która stanowiła odniesienie do wyników położenia określonego na drodze filtracji oraz wygładzania. Błędy modelu systemu wygenerowano zgodnie z przyjętym modelem. Przyjęto widmową gęstość mocy szumu białego stanowiącego zakłócenia procesu ruchu  $S_a = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}^3$

oraz wariancję błędów czujników wynoszącą  $\sigma_p^2 = (0,5 \text{ m})^2 = 0,25 \text{ m}^2$  oraz  $\sigma_a^2 = (0,01 \text{ m/s}^2)^2 = 0,0001 \text{ m}^2/\text{s}^4$ .



Rys. 1. Błąd położenia bez wygładzania i przy wygładzaniu w stałym przedziale  
Fig. 1. The position error without smoothing and with fixed-interval smoothing

Przykładowe wyniki badań symulacyjnych, przedstawiające błąd określenia położenia przy wygładzeniu w stałym przedziale oraz błąd położenia po filtracji Kalmana na tle błędów czujnika położenia, przedstawiono na rys. 1. W badaniach symulacyjnych zbadano skuteczność algorytmu wygładzania w stałym przedziale dla różnych wartości widmowej gęstości mocy szumu białego stanowiącego zakłócenia procesu ruchu w badanym modelu. Ilościowe porównanie uzyskanych wyników, w postaci błędów średniokwadratowych (RMS) określenia pozycji po filtracji Kalmana oraz po wygładzaniu w stałym przedziale, zamieszczono w tab. 1. W tabeli tej zamieszczono również stopień redukcji błędu średniokwadratowego pomiędzy oceną przy filtracji a oceną przy wygładzaniu dla różnych wartości stosunku sygnału do szumu.

Tab. 1. Błąd średniokwadratowy dla różnych wartości stosunku sygnału do szumu dla oceny przy filtracji i wygładzaniu

Tab. 1. The mean square error for various signal-to-noise ratio in estimation from filtering and smoothing

	$S_a = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}^4$		$S_a = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}^4$		$S_a = 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}^4$	
	filtracja	wygl.	filtracja	wygl.	filtracja	wygl.
RMS( $\delta p$ ) [m]	0,208	0,127	0,206	0,121	0,203	0,087
Redukcja RMS( $\delta p$ )	-	39%	-	41%	-	57%

Przeprowadzone badania symulacyjne miały na celu również zbadanie związku między opóźnieniem a poprawą oceny stanu. W tab. 2 porównano błędy średniokwadratowe określenia pozycji po wygładzaniu dla różnych wartości różnicy pomiędzy chwilą oceny stanu  $k$  a chwilą pomiaru  $j$ . Porównano także stopień redukcji błędu średniokwadratowego pomiędzy oceną przy filtracji a oceną przy wygładzaniu dla różnych wartości różnicy  $k - j$ .

Tab. 2. Błąd średniokwadratowy dla różnych wartości różnicy  $k - j$  dla oceny przy filtracji i wygładzaniu

Tab. 2. The mean square error for various interval  $k - j$  in estimation from filtering and smoothing

	filtracja	wygładzanie dla różnicy $k - j$					
		1	2	5	10	20	50
RMS( $\delta p$ ) [m]	0,231	0,209	0,190	0,148	0,124	0,122	0,121
Redukcja RMS( $\delta p$ )	-	10%	18%	36%	46%	47%	48%

Zaprezentowane w powyższej tabeli wyniki badań dotyczą wszystkich trzech algorytmów wygładzania, które stanowią trzy różne podejścia do jednego ogólnego zadania wygładzania.

## 6. Podsumowanie

Przedstawione na rys. 1 wyniki badań symulacyjnych pozwalają na wyciągnięcie wniosku, że błąd określenia położenia przy wygładzaniu jest mniejszy niż błąd położenia przy filtracji. Jakość poprawy oceny stanu zależy od parametrów modelu systemu. W przypadku gdy stosunek sygnału do szumu jest duży, poprawa jakości spowodowana wygładzaniem jest znaczna (redukcja błędu RMS( $\delta p$ ) o 57%). Dla problemów o małym stosunku sygnału do szumu poprawa oceny jest natomiast wyraźnie słabsza (redukcja błędu RMS( $\delta p$ ) o 39%). Poprawa oceny stanu wynikająca z wygładzania rośnie monotonicznie wraz ze wzrostem różnicy czasowej pomiędzy chwilą oceny stanu a chwilą pomiaru, przy czym jeśli różnica ta jest dostatecznie duża to stopień poprawy staje się praktycznie stały. Zamieszczone w tab. 2 wyniki badań symulacyjnych pozwalają stwierdzić, że nie trzeba wprowadzać opóźnienia większego, niż wartość, przy której osiąga się prawie maksymalne polepszenie estymacji spowodowane wygładzaniem. Wartość opóźnienia powinna być kompromisem pomiędzy poprawą jakości a stopniem skomplikowania estymatora, który rośnie wraz z opóźnieniem. Przedstawione przykładowe wyniki badań potwierdzają praktyczną przewagę optymalnych estymatorów wygładzających nad filtracją Kalmana w aplikacjach, w których akceptowalne jest niewielkie opóźnienie uzyskiwanych danych wyjściowych.

Projekt współfinansowany przez Narodowe Centrum Badań i Rozwoju w ramach Programu Badań Stosowanych jako Projekt Badawczy PBS1/B3/15/2012.

## 7. Literatura

- [1] Jazwinski A.H.: Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press, New York, 1970.
- [2] Kalman R.E.: A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Transactions of the ASME, 82D (1960), s. 35-45, 1960.
- [3] Tue-Cuong Dong-Si, Mourikis A.I.: Motion Tracking with Fixed-lag Smoothing: Algorithm and Consistency Analysis, IEEE International Conference on Robotics and Automation ICRA'11, s. 5655-5662, 9-13 May 2011.
- [4] Syed Z., Aggarwal P., Yang Y., El-Sheimy N.: Improved Vehicle Navigation Using Aiding with Tightly Coupled Integration, IEEE Vehicular Technology Conference VTC 2008, s. 3077-3081, 11-14 May 2008.
- [5] Garcia R., Puig J., Ridao P., Cufi X.: Augmented State Kalman Filtering for AUV Navigation, IEEE International Conference on Robotics and Automation ICRA'02, Vol.4, s. 4010-4015, 11-15 May 2002.
- [6] Bryson M., Johnson-Roberson M., Sukkarieh S.: Airborne Smoothing and Mapping using Vision and Inertial Sensors, IEEE International Conference on Robotics and Automation ICRA'09, s. 2037-2042, 12-17 May 2009.
- [7] Gelb A.: Applied Optimal Estimation, MIT Press, Cambridge, MA, 1974.
- [8] Meditch J.S.: Estymacja i sterowanie statystycznie optymalne w układach liniowych, WNT, Warszawa, 1975.
- [9] Anders B.D.O., Moore J.B.: Filtracja optymalna, WNT, Warszawa, 1984.
- [10] Brown R.G., Hwang P.Y.C.: Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering, John Wiley & Sons, Inc., USA, 2001.

otrzymano / received: 12.06.2014

przyjęto do druku / accepted: 01.08.2014

artykuł recenzowany / revised paper