ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XLI (2005)

JACEK BANASIAK (Durban, Łódź)

Chaotyczne liniowe układy dynamiczne: teoria i zastosowania

1. Wstęp. W potocznym rozumieniu chaos jest związany wyłącznie ze zjawiskami nieliniowymi. Jest to w pewnym stopniu spowodowane oryginalnym przykładem Lorenza, który miał olbrzymi wpływ na zmianę sposobu myślenia o nieregularnych zachowaniach rozwiązań układów równań różniczkowych

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \tag{1.1}$$

gdzie $\mathbf{f}$ jest nieliniową funkcją działającą w przestrzeni $\mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, zaś $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$. W przykładzie Lorenza n było równe 3, zaś funkcja $\mathbf{f}$ była zdefiniowana przez: $f_1(u_1, u_2, u_3) = 10(u_2 - u_1)$, $f_2(u_1, u_2, u_3) = -u_1 + 28u_1 - u_1u_3$, $f_3(u_1, u_2, u_3) = -\frac{8}{3}u_3 + u_1u_2$. Okazuje się jednak, że zachowania chaotyczne mogą wystąpić również w liniowych układach dynamicznych, pod warunkiem jednak, że są one nieskończenie wymiarowe, tzn. funkcja $\mathbf{f}$ w (1.1) działa pomiędzy przestrzeniami nieskończenie wymiarowymi. Natomiast skończenie wymiarowe liniowe układy dynamiczne nie mogą być chaotyczne – w sposób ścisły wynika to na przykład z Twierdzenia 4.3, ale intuicyjnie powinno być to jasne, bo dynamikę takiego układu można zawsze opisać za pomocą skończonej kombinacji funkcji wykładniczych, trygonometrycznych i wielomianów, która raczej nie powinna być chaotyczna.

Pierwsze obserwacje dotyczące tego zjawiska są związane z modami fourierowskimi kwadratowych układów hamiltonowskich, gdy ich liczba rośnie do nieskończoności [14]; pojawiły się one dość dawno. Dopiero jednak rozwój technik związanych z teorią ergodyczną i teorią operatorów pozwolił nadać badaniom nad liniowymi układami dynamicznymi kształt akceptowalnej teorii matematycznej.

Zanim przejdziemy do głównego tematu tego artykułu, warto ustalić, czym będziemy się zajmować. Słowo *chaos* w literaturze naukowej w ciągu ostatnich 50 lat pojawiło się w tysiącach prac [18] i znaczenia, w których było ono użyte, często nie mają ze sobą wiele wspólnego. Dobitnie oddaje to tytuł artykułu „Chaotic chaos”.

W przełomowym artykule Lorenza [22] chaos był rozumiany jako niestabilność rozwiązań układu (1.1) względem małych zaburzeń danych początkowych. Prawie 10 lat później D. Ruelle i F. Takens [28], analizując burzliwy przepływ płynów, zasugerowali, że jest on związany z istnieniem obiektu, który nazwali *dziwnym atraktorem.* Istnienie dziwnego atraktora jest chyba najpopularniejszym kryterium chaosu, zwłaszcza w naukach eksperymentalnych, gdzie można go „zobaczyć" na atrakcyjnych obrazkach pochodzących z symulacji numerycznych. Z matematycznego punktu widzenia poważną wadą tego podejścia są trudności z udowodnieniem istnienia dziwnego atraktora. Warto podkreślić, że o ile obrazek motylokształtnego atraktora Lorenza, otrzymany numerycznie, trafił niemal pod strzechy, o tyle matematyczny dowód istnienia tego atraktora ma zaledwie kilka lat [29], [30]. Ponieważ koncepcja dziwnego atraktora nie jest przydatna w liniowych układach dynamicznych, które są głównym tematem tego artykułu, nie będziemy się nią więcej zajmować.

Nie będziemy się też zajmować innym ważnym i interesującym podejściem do zjawisk chaotycznych, bazującym na istnieniu i właściwościach miary niezmienniczej badanego układu dynamicznego, [14], [21], [25]. W tym podejściu, mówiąc niezbyt precyzyjnie, chaos jest specyficznym rodzajem ergodyczności układu. Warto tu jednak zaznaczyć, że teoria ta odnosi się zarówno do zjawisk liniowych, jak i nieliniowych, i ma wiele punktów wspólnych z chaosem topologicznym [27], który jest głównym bohaterem niniejszego artykułu i który szczegółowo przedyskutujemy poniżej. Zaczniemy jednak od wprowadzenia koncepcji układu dynamicznego i omówienia jego podstawowych własności.

2. Układy dynamiczne. Mówiąc o rzeczywistych zjawiskach, które zmieniają się w czasie, posługujemy się zazwyczaj pewnymi wybranymi parametrami, które charakteryzują ich stan. Ten sam proces (fizyczny, biologiczny, etc.) można opisywać na wiele sposobów. Jeśli interesują nas zmiany średniej temperatury jakiegoś obiektu, to w każdej chwili jego stan będzie w pełni określony przez podanie jednego parametru, zatem układ ten jest jednowymiarowy. Jeśli jednak interesuje nas temperatura w każdym punkcie obiektu, to w każdej chwili stan systemu jest opisany przez funkcję trzech zmiennych przestrzennych. W takim wypadku system jest nieskończenie wymiarowy, gdyż zbiór wszystkich funkcji trzech zmiennych nie jest przestrzenią skończenie wymiarową.

W ogólności będziemy więc opisywać stan danego układu za pomocą zmiennej należącej do ustalonego zbioru, zwanego *przestrzenią fazową* lub *przestrzenią stanów.* W zasadzie przestrzeń fazowa może być dowolnym zbiorem, jednak dla większości zastosowań wymagamy, żeby była to przynajmniej przestrzeń metryczna, gdyż potrzebne jest pojęcie bliskości punktów.

Główne wyniki tego artykułu odnoszą się do przestrzeni Banacha, które są specjalną klasą przestrzeni metrycznych ze strukturą liniową.

Przez *układ dynamiczny* rozumiemy przestrzeń fazową X wraz z zadaną regułą ewolucji stanów $\boldsymbol{x} \in X$ w czasie t. W zastosowaniach pojawiają się dwa typy układów dynamicznych: takie, w których czas jest zmienną dyskretną (np. stan układu jest znany tylko w oddzielonych od siebie chwilach obserwacji), oraz takie, dla których czas jest zmienną ciągłą, co odpowiada sytuacji, gdy układ jest obserwowany nieustannie i jego stan jest znany w dowolnej chwili.

Dyskretne układy dynamiczne mogą być zapisane w postaci iteracji pewnej funkcji $f : X \to X$

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = f(\boldsymbol{x}_t), \qquad t \in \mathbb{Z} \text{ lub } \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Gdy czas jest ciągły, zaś X jest przestrzenią unormowaną, dynamika układu zazwyczaj może być opisana za pomocą równania różniczkowego

$$\dot{\boldsymbol{x}} := \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(\boldsymbol{x}), \qquad t \in \mathbb{R} \text{ lub } \mathbb{R}_+. \tag{2.3}$$

Funkcje f i A opisują, odpowiednio, mechanizmy wymuszające ewolucję układu.

Teorie dyskretnych i ciągłych układów dynamicznych są pozornie podobne, choć w wielu przypadkach prowadzą do jakościowo różnych wyników. Na przykład, chaos w układach dyskretnych może się pojawić już w jednym wymiarze (dyskretny model logistyczny), zaś w przypadku czasu ciągłego potrzeba na to przynajmniej trzech wymiarów.

Nasz artykuł dotyczy głównie przypadku ciągłego. Skoncentrujemy się również na układach określonych tylko dla $t \geq 0$. Tak więc, *ciągłym układem dynamicznym* będziemy nazywać rodzinę funkcji (operatorów) $(\boldsymbol{x}(t, \cdot))_{t \geq 0}$ określonych na X takich, że dla każdego $t \geq 0$, $\boldsymbol{x}(t, \cdot) : X \to X$ jest funkcją ciągłą, dla każdego $\boldsymbol{p}$ funkcja $t \to \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{p})$ jest ciągła na $[0, \infty)$ i spełnia $\boldsymbol{x}(0, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}$, oraz dla wszystkich $t > 0$ i $\boldsymbol{p}$ należących do pewnej podprzestrzeni $X_0 \subseteq X$ zachodzi

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t, \boldsymbol{p}) \equiv A(\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{p})).$$

Innymi słowy, $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{p})$ jest rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= A(\boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{x}(0) &= \boldsymbol{p}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Warto podkreślić, że jeśli problem (2.4) jest jednoznacznie rozwiązalny, to mamy następującą ważną tożsamość

$$\boldsymbol{x}(t + s, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}(s, \boldsymbol{p})), \qquad t, s \geq 0, \tag{2.5}$$

która wyraża fakt, że stan układu w dowolnej chwili jest jednoznacznie określony jako złożenie stanów wcześniejszych. Tożsamość (2.5) mówi też, że z algebraicznego punktu widzenia, układ dynamiczny $(\boldsymbol{x}(t,\cdot))_{t\geq 0}$ ma strukturę półgrupy i dlatego jest nazywany często *półgrupą operatorów*. Z (2.5) wynika również, że ciągłe układy dynamiczne mogą być w pewnym zakresie identyfikowane z układami dyskretnymi, gdyż dla dowolnego $t_0 > 0$ i $\boldsymbol{p} \in X$ zachodzi

$$\boldsymbol{x}(nt_0, \boldsymbol{p}) = [\boldsymbol{x}(t_0, \cdot)]^n(\boldsymbol{p}). \tag{2.6}$$

3. Chaos w ciągłych układach dynamicznych. Chaos topologiczny był pierwotnie zdefiniowany dla dyskretnych układów dynamicznych. Ponieważ naszym celem są układy ciągłe, przeformułujemy wszystkie definicje używając ciągłego czasu t jako parametru.

Niech przestrzeń fazowa (X, d) będzie przestrzenią metryczną drugiej kategorii Baire'a (np. zupełną) i niech $(\boldsymbol{x}(t,\cdot))_{t\geq 0}$ będzie ciągłym układem dynamicznym na X. Oznaczmy przez $O(\boldsymbol{p}) = \{\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{p})\}_{t\geq 0}$ *orbitę* $(\boldsymbol{x}(t,\cdot))_{t\geq 0}$ zaczynającą się w $\boldsymbol{p}$. Aby uniknąc rozważania przypadków zdegenerowanych, założymy też, że obrazy przedziałów są nigdziegęste w X (tzn. domknięcie ciągłego obrazu przedziału ma puste wnętrze). W szczególności, X nie redukuje się do pojedynczej orbity $(\boldsymbol{x}(t,\cdot))_{t\geq 0}$.

Zanim podamy definicję chaosu w sensie Devaneya, którym się będziemy tutaj zajmować, warto omówić dokładniej jej podstawowe składowe. Mówimy, że układ dynamiczny $(\boldsymbol{x}(t,\cdot))_{t\geq 0}$ jest *przechodni* na (X, d), jeśli dla dowolnych niepustych zbiorów otwartych $U, V \subset X$ istnieje chwila $t_0 \geq 0$ taka, że $\boldsymbol{x}(t_0, U) \cap V \neq \emptyset$. *Punktem okresowym* $(\boldsymbol{x}(t,\cdot))_{t\geq 0}$ nazywamy każdy punkt $\boldsymbol{p} \in X$, dla którego istnieje $T > 0$ taki, że $\boldsymbol{x}(T, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}$. Jeśli $\boldsymbol{p}$ ma tę właściwość dla każdego T, to mówimy, że jest to *punkt stały* $(\boldsymbol{x}(t,\cdot))_{t\geq 0}$. Ostatnią z własności układu dynamicznego, potrzebną do charakteryzacji chaosu, jest jego *wrażliwość na zmiany danych początkowych*, stanowiąca jądro obserwacji Lorenza. Mówiąc ściśle, układ jest *wrażliwy na zmiany danych początkowych*, jeśli istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $\boldsymbol{p} \in X$ i jego otoczenia $N_{\boldsymbol{p}}$ istnieje punkt $\boldsymbol{y} \in N_{\boldsymbol{p}}$ i czas $t_0 > 0$ taki, że odległość pomiędzy $\boldsymbol{x}(t_0, \boldsymbol{p})$ a $\boldsymbol{x}(t_0, \boldsymbol{y})$ jest większa niż δ.

Mając do dyspozycji powyższe pojęcia, możemy zdefiniować chaos w sensie Devaneya.

DEFINICJA 3.1. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Mówimy, że układ dynamiczny $(\boldsymbol{x}(t,\cdot))_{t\geq 0}$ jest chaotyczny na X, jeśli jest przechodni, jego zbiór punktów okresowych jest gęsty w X oraz jest on wrażliwy na zmiany warunków początkowych.

Zauważmy, że bezpośrednio z definicji wynika gęstość punktów okresowych o niezerowym okresie, w przeciwnym bowiem wypadku zbiór punktów stałych byłby gęsty co, wobec ciągłości $(\boldsymbol{x}(t,\cdot))_{t\geq 0}$, wymuszałoby $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}$ dla każdego $\boldsymbol{p}$.

Na pierwszy rzut oka przechodniość układu dynamicznegio i jego wrażliwość na zmianę danych początkowych powinny być ze sobą związane, gdyż obie własności mówią o orbitach mogących dowolnie oddalać się od ustalonego punktu. Jednakże, przynajmniej w dyskretnych układach dynamicznych, obrót okręgu jednostkowego o kąt o mierze niewspółmiernej z π jest przykładem odwzorowania przechodniego, które nie jest wrażliwe na dane początkowe [13].

Okazuje się jednak [10], że warunki podane przez Devaneya nie są niezależne: topologiczna przechodniość i gęstość punktów okresowych pociągają za sobą wrażliwość na zmiany warunków początkowych.

TWIERDZENIE 3.1. *Jeśli układ dynamiczny $(x(t,\cdot))_{t\geq 0}$ jest topologicznie przechodni i ma gęsty zbiór punktów okresowych, to jest również wrażliwy na zmiany warunków początkowych.*

D o w ó d. Oryginalny dowód tego twierdzenia był przeprowadzony dla układów dyskretnych [10]. Dla układów ciągłych dowód wymaga paru technicznych modyfikacji [2]. Jeśli jednak przestrzeń fazowa X jest nieograniczona, np. jest przestrzenią Banacha, dowód powyższego twierdzenia znacznie się upraszcza. Istotnie, dla dowolnej liczby $\delta > 0$ i zwartego zbioru K można znaleźć zbiór otwarty V taki, że $\mathrm{dist}(K,V) > \delta$. Weźmy teraz dowolny punkt p i jego otoczenie U. Ponieważ punkty okresowe tworzą zbiór gęsty, istnieje punkt okresowy $\mathbf{q} \in U$. Jego orbita $O(\mathbf{q})$ jest zwarta, więc istnieje otwarty zbiór V, dla którego $\mathrm{dist}(\mathrm{O}(\mathbf{q}),\mathrm{V}) > \delta$. Z przechodniości układu mamy istnienie punktu $y \in U$ takiego, że $x(t,y) \in V$ dla pewnego t. Równocześnie $x(t,\mathbf{q}) \in O(\mathbf{q})$, zatem $d(x(t,y),x(t,\mathbf{q})) > \delta$. □

Obecnie powiążemy przechodniość z bardziej intuicyjną własnością układu dynamicznego, którą jest istnienie orbity gęstej w X. Układy dynamiczne o tej własności nazywamy *hipercyklicznymi*. Koncepcja ta pochodzi z teorii operatorów [15], gdzie ciągły operator A na przestrzeni Banacha X nazywa się *hipercyklicznym*, jeśli istnieje element $x \in X$ dla którego ciąg $\{A^n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w X. W cytowanej pracy zostało udowodnione twierdzenie, że operator jest hipercykliczny wtedy i tylko wtedy, gdy jest topologicznie przechodni, co ma natychmiastowe zastosowanie w teorii dyskretnych układów dynamicznych generowanych przez ciągłe operatory liniowe. Jak zobaczymy poniżej, wynik ten można z łatwością uogólnić na przypadek dowolnych ciągłych układów dynamicznych na przestrzeniach metrycznych drugiej kategorii Baire'a.

Rozszerzając w naturalny sposób definicję hipercykliczności powiemy, że ciągły układ dynamiczny $(x(t,\cdot))_{t\geq 0}$ jest hipercykliczny, jeśli istnieje $p \in X$ dla którego $\overline{O(p)} = X$. Warto zauważyć, że z ciągłości $x(\cdot,p)$ wynika $\overline{O(p)} = \overline{\{x(t,p)\}_{t\in\mathbb{Q}}}$, gdzie $\mathbb{Q}$ oznacza zbiór liczb wymiernych dodatnich, tak więc układy hipercykliczne mogą istnieć tylko w przestrzeniach ośrodkowych.

Zanim sformułujemy główne twierdzenie tego paragrafu, zauważmy, że w niezdegenerowanych przestrzeniach metrycznych, jeśli orbita $O(p) = \{x(t,p)\}_{t\geq 0}$ jest gęsta w X, to również jej każdy ogon $O(x(s,p)) = \{x(t,p)\}_{t>s}$, $s > 0$, jest gęsty.

Oznaczmy przez X_h zbiór wszystkich elementów hipercyklicznych: $X_h = \{p \in X;\ \overline{O(p)} = X\}$. Oczywiście, jeśli $(x(t,\cdot))_{t\geq 0}$ ma jeden wektor hipercykliczny, to zbiór wektorów hipercyklicznych jest gęsty, bo każdy punkt trajektorii gęstej jest hipercykliczny.

TWIERDZENIE 3.2. *Niech $(x(t,\cdot))_{t\geq 0}$ będzie ciągłym układem dynamicznym w zupełnej, ośrodkowej i niezdegenerowanej przestrzeni metrycznej X. Wówczas X_h jest gęsty w X wtedy i tylko wtedy, gdy $(x(t,\cdot))_{t\geq 0}$ jest topologicznie przechodnia.*

Dowód. Ustawmy nieujemne liczby wymierne w ciąg $\{t_1, t_2, \ldots\}$. Rozważmy dalej rodzinę $\{x(t_n,\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Oczywiście, orbita $O(p)$ układu dynamicznego $(x(t,\cdot))_{t\geq 0}$ jest gęsta w X wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{x(t_n,p)\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty. Analiza oryginalnego dowodu tego twierdzenia [15], który był przeprowadzony dla iteracji operatorów liniowych ciągłych, pokazuje, że orbity operatora były użyte tylko w sensie teoriomnogościowym, liniowość operatora nie była wykorzystana, natomiast ciągłość operatorów jest istotna jako, że potrzebujemy otwartości przeciwobrazów zbiorów otwartych. Tak więc dowodu tego można użyć bez żadnych zmian do zbiorów $\{x(t_n,p)\}_{n\in\mathbb{N}}$ [2]. □

4. Chaotyczne półgrupy liniowe.

W tym rozdziale skoncentrujemy się na głównym temacie niniejszego artykułu, czyli na liniowych układach dynamicznych w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach Banacha. Aby to podkreślić, będziemy oznaczać układy dynamiczne w sposób przyjęty w teorii półgrup operatorów i pisać $x(t,p) = T(t)p$, gdzie $(T(t))_{t\geq 0}$ jest mocno ciągłą półgrupą operatorów liniowych ograniczonych.

Jak wspomnieliśmy powyżej, większość wyników omawianych tutaj ma swoje korzenie w teorii operatorów hipercyklicznych; wyniki tej teorii są przenoszone na grunt ciągłych układów dynamicznych poprzez (2.6).

Wprowadźmy następujące trzy zbiory, które są ważne przy dowodzeniu chaotyczności układów dynamicznych.

(i) X_0 to zbiór wszystkich $p \in X$, dla których $\lim_{t\to\infty} T(t)p = 0$,

(ii) X_∞ to zbiór wszystkich p, dla których, dla każdego $\epsilon > 0$, istnieją $w \in X$ i $t > 0$ spełniające nierówności $\|w\| < \epsilon$ i $\|T(t)w - p\| < \epsilon$,

(iii) X_p to zbiór punktów okresowych.

Związek pomiedzy tymi zbiorami a chaosem (hipercyklicznością) jest opisany w poniższym twierdzeniu.

TWIERDZENIE 4.1 [12]. *Niech $(T(t))_{t\geq 0}$ będzie mocno ciągłą półgrupą w ośrodkowej przestrzeni Banacha X. Jeśli X_0 i X_∞ są gęste w X, to $(T(t))_{t\geq 0}$ jest hipercykliczna.*

D o w ó d. Idea dowodu jest dość prosta. Gęstość X_∞ pokazuje, że do dowolnego otwartego otoczenia dowolnego punktu $\boldsymbol{x} \in X$ można dotrzeć startując z punktu $\boldsymbol{w}$ z dowolnie małego otoczenia zera. Biorąc dowolne otoczenie jakiegoś innego punktu $\boldsymbol{p}$, znajdziemy w nim $\mathbf{q} \in X_0$, wobec czego punkt $\boldsymbol{v} = \mathbf{q} + \boldsymbol{w}$ znajdzie się również w być może nieco większym, ale też dowolnie małym, otoczeniu $\boldsymbol{p}$. Z definicji X_0, orbita $O(\boldsymbol{v})$ dotrze do otoczenia $\boldsymbol{x}$, co dowodzi przechodniości $(T(t))_{t\geq 0}$, a zatem jej hipercykliczności. □

Warto podkreślić, że jest to tylko warunek wystarczający – istnieją przykłady półgrup hipercyklicznych, dla których $X_0 = \emptyset$ [12]. Ponadto oczywiście, jeśli X_∞ jest gęsta w X, to $X_\infty = X$.

U w a g a 4.1. Wynik powyższy jest znacznie ogólniejszy od podanego poniżej powszechnie używanego kryterium hipercykliczności operatorów (czyli dyskretnych układów dynamicznych), [15], [11], które jest czasami łatwiejsze do stosowania.

LEMAT 4.1. *Niech A będzie operatorem liniowym ograniczonym na przestrzeni Banacha X. Jeśli istnieją podprzestrzenie Y_1, Y_2, gęste w X, oraz operator $Z : Y_1 \to Y_1$ spełniający:*

(i) $AZ\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ *na* Y_1,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} Z^n y = 0$ *dla każdego* $y \in Y_1$,

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} A^n y = 0$ *dla każdego* $y \in Y_2$,

to A jest hipercykliczny.

Porównując ten wynik z Twierdzeniem 4.1 widzimy, że Y_2 odgrywa tu rolę X_0. Jeśli zaś spełnione są założenia (i) i (ii), to biorąc $x \in Y_1$, ustalając $\epsilon > 0$ i kładąc $w = Z^n x$ dla odpowiednio dużego n widzimy, że $\|w\| < \epsilon$ i $\|x - A^n w\| = 0 < \epsilon$, a więc Y_1 spełnia warunki definicji X_∞ (zmodyfikowanej w naturalny sposób dla układów dyskretnych).

W zastosowaniach oczywiście podstawowym problem jest identyfikacja przestrzeni X_0 i X_∞ i udowodnienie, że są one gęste. W praktycznie wszystkich znanych przykładach półgrup chaotycznych przestrzenie te są związane z wektorami własnymi generatora półgrupy. Poniższe twierdzenie wykorzystuje ten właśnie pomysł.

TWIERDZENIE 4.2 [12]. *Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Banacha, zaś A niech będzie generatorem mocno ciągłej półgrupy $(T(t))_{t\geq 0}$ na X. Załóżmy, że*

(*i*) *widmo punktowe A, $\sigma_p(A)$, ma niepuste wnętrze U spełniające warunek $U \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$;*

(*ii*) *istnieje selekcja przyporządkowująca każdej wartości własnej* $\lambda \in U$ *odpowiadający jej wektor własny* $\boldsymbol{x}_\lambda$ *w taki sposób, że dla każdego* $\boldsymbol{\Phi} \in X^*$ *funkcja* $F_{\boldsymbol{\Phi}}(\lambda) =< \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{x}_\lambda >$ *jest analityczna na* U;

(*iii*) $F_{\boldsymbol{\Phi}} \equiv 0$ *na* U *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\boldsymbol{\Phi} = 0$.

Wówczas $(T(t))_{t\geq 0}$ *jest chaotyczna.*

D o w ó d. Dowód opiera się na obserwacji, że przy poczynionych założeniach mamy wystarczająco dużo trajektorii postaci $T(t)\boldsymbol{x}_\lambda = e^{\lambda t}\boldsymbol{x}_\lambda$. Gdy $Re\lambda < 0$, to trajektorie takie zmierzają do zera. Jeśli $Re\lambda = 0$, to są one okresowe, zaś gdy $Re\lambda > 0$, możemy zapisać $\boldsymbol{x}_\lambda = T(t)e^{-\lambda t}\boldsymbol{x}_\lambda$, gdzie $e^{-\lambda t}\boldsymbol{x}_\lambda$ zmierza do zera, gdy $t \to \infty$, wobec czego $\boldsymbol{x}_\lambda$ jest osiągalny z dowolnie małego otoczenia zera. Tak więc, jeśli zbiory wektorów własnych odpowiadających $Re\lambda > 0$, $Re\lambda = 0$ i $Re\lambda < 0$ są gęste, to z Twierdzenia 4.1 wynika chaotyczność $(T(t))_{t\geq 0}$. Warunek z funkcją analityczną jest czysto techniczny pozwala stwierdzić, wykorzystując zasadę zer izolowanych, że omawiane zbiory

$$\left\{\boldsymbol{x}_\lambda;\ Re\lambda \gtreqless 0\right\}$$

są liniowo gęste w X. □

Następne twierdzenie podaje warunki konieczne na to, by półgrupa $(T(t))_{t\geq 0}$ generowana przez A była hipercykliczna.

TWIERDZENIE 4.3 [12]. *Niech* $(T(t))_{t\geq 0}$ *będzie półgrupą hipercykliczną w przestrzeni Banacha* X, *generowaną przez* A. *Wówczas operator sprzężony* A^* *i półgrupa operatorów sprzężonych* $(T^*(t))_{t\geq 0}$ *mają następujące własności:*

1. *jeśli* $0 \neq \boldsymbol{\Phi} \in X^*$, *to orbita* $\{T^*(t)\boldsymbol{\Phi}\}_{t\geq 0}$ *jest nieograniczona*;
2. *widmo punktowe* $\sigma_p(A^*)$ *jest puste.*

D o w ó d. Ograniczymy się do naszkicowania idei dowodu. W punkcie 1., niech dla pewnego $0 \neq \boldsymbol{\Phi} \in X^*$, $\|T^*(t)\boldsymbol{\Phi}\|$ jest ograniczona dla wszystkich t. Ponieważ

$$\|T^*(t)\boldsymbol{\Phi}\| = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|\leq 1} |\langle T^*(t)\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{x}\rangle| = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|\leq 1} |\langle \boldsymbol{\Phi}, T(t)\boldsymbol{x}\rangle|,$$

i skoro w kuli jednostkowej istnieje $\boldsymbol{x}$, którego orbita jest gęsta, otrzymujemy sprzeczność.

W punkcie 2, jeśli $\sigma_p(A^*) \neq \emptyset$, to można wykazać [7], że dla pewnych λ i $\boldsymbol{\Phi} \neq 0$ zachodzi $T^*(t)\boldsymbol{\Phi} = e^{\lambda t}\boldsymbol{\Phi}$. Skoro wszystkie orbity $(T^*(t))_{t\geq 0}$ są nieograniczone, to $Re\lambda > 0$. Biorąc takie $\boldsymbol{x}$, którego orbita $\{T(t)\boldsymbol{x}\}_{t\geq 0}$ jest gęsta, otrzymujemy

$$|\langle \boldsymbol{\Phi}, T(t)\boldsymbol{x}\rangle| = |e^{\lambda t}\langle \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{x}\rangle| \geq |\langle \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{x}\rangle|.$$

Ponieważ orbita jest gęsta, możemy zacząć ją od takiego x, dla którego prawa strona jest większa od zera, zaś lewą stronę możemy uczynić dowolnie małą. □

Twierdzenie to pozwala pokazać, że pewne ważne klasy półgrup nie są chaotyczne. Przypomnijmy, że mocno ciągłą półgrupę $(T(t))_{t\geq 0}$ nazywamy *ewentualnie jednostajnie ciągłą*, jeśli istnieje chwila $t_0 > 0$ taka, że funkcja $t \to T(t)$ jest ciągła w jednostajnej topologii operatorowej na $[t_0, \infty)$.

WNIOSEK 4.1 [12]. *Niech $(T(t))_{t\geq 0}$ będzie mocno ciągłą półgrupą generowaną przez A. Jeśli $(T(t))_{t\geq 0}$ jest ewentualnie jednostajnie ciągła i rezolwenta A jest zwarta, to $(T(t))_{t\geq 0}$ nie jest hipercykliczna.*

Dowód. Jeśli półgrupa ta byłaby hipercykliczna, to jej typ byłby nieujemny, gdyż miałaby trajektorie nieograniczone. Ponieważ jest ona ewentualnie jednostajnie ciągła, typ ten jest równy supremum części rzeczywistych widma jej generatora, zatem widmo to jest niepuste. Ponieważ A ma zwartą rezolwentę, rezolwenta A^* jest również zwarta, zatem ma czysto punktowe i niepuste widmo, co daje sprzeczność z Twierdzeniem 4.3. □

Założenia tego twierdzenia są w szczególności spełnione przez półgrupę dyfuzyjną w obszarze ograniczonym.

5. Przykłady liniowych modeli chaotycznych

5.1. *Chaos generowany przez operator przesunięcia.*

Przykład 5.1. Chaos w układach generowanych przez funkcje operatora przesunięcia. Naszkicowana w poprzednich rozdziałach teoria, prawdopodobnie po raz pierwszy została zastosowana w modelu mającym konkretną interpretację fizyczną w [24]. Ponieważ model ten ma w pewnym sensie typowy charakter, omówimy go nieco dokładniej.

Rozważmy zbiór obiektów, charakteryzujących się wewnętrznym stopniem swobody indeksowanym za pomocą liczb naturalnych $n \in \mathbb{N}$. Obiekty oddziaływują z otoczeniem według następującej reguły: w chwili reakcji obiekty znajdujące się w stanie $n \geq 2$ są pochłaniane przez otoczenie z prędkością $\alpha > 0$ i pojawiają się ponownie w układzie z prędkością $\beta > \alpha$ jako obiekty w stanie $n - 1$. Jeśli obiekt znajdzie się w stanie $n = 1$, jest pochłaniany i przestaje istnieć.

W taki sposób mogą być opisane pewne procesy chemiczne i niesprężyste zderzenia cząsteczek gazu (wówczas obiektem w stanie n jest cząsteczka o energii znormalizowanej do n) lub procesy biologiczne (np. proces śmierci z migracją – wówczas obiektem w stanie n jest populacja mająca n osobników).

Ewolucję układu można opisać za pomocą funkcji rozkładu $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots)$, gdzie $f_n(t)$ jest ilością obiektów znajdujących się w stanie n; funkcje rozkładu spełniają nieskończony liniowy układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$\frac{df_n}{dt} = (Af)_n = -\alpha f_n + \beta f_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.1.}$$

Naturalną przestrzenią dla tego procesu jest przestrzeń l^1, gdyż norma nieujemnego elementu $\mathbf{f} = (f_1, f_2 \ldots) \geq 0$, dana wzorem

$$\|\mathbf{f}\| = \sum_{n=1}^{\infty} f_n,$$

daje całkowitą liczbę obiektów.

Operator A zdefiniowany przez nieskończoną macierz współczynników prawej strony (5.1) jest ograniczony, zatem istnieje półgrupa $(T(t))_{t\geq 0}$ rozwiązująca powyższy układ. Prosty rachunek pokazuje, że widmo punktowe A dane jest wzorem

$$\sigma_p(A) = \{-\alpha + \beta\mu;\ |\mu| < 1\}, \tag{5.2}$$

z wektorami własnymi zadanymi przez

$$\mathbf{h}_\mu = (\mu, \mu^2, \mu^3, \ldots). \tag{5.3}$$

Funkcja F_Φ z twierdzenia 4.2 jest wobec tego szeregiem potęgowym i łatwo sprawdzić, że założenia tego twierdzenia są spełnione, zatem $(T(t))_{t\geq 0}$ jest półgrupą chaotyczną w l^1.

Zanim przejdziemy do uogólnień tego wyniku, warto zwrócić uwagę na kilka ważnych punktów. Po pierwsze, założenie $\beta > \alpha$ jest kluczowe dla istnienia chaosu. Wynika to z faktu, że jeśli $\mathbf{f}(t)$ jest nieujemnym rozwiązaniem (5.1), to sumując poszczególne równania tego układu otrzymamy

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{f}(t)\| = (\beta - \alpha)\|\mathbf{f}(t)\| - \beta f_1(t), \tag{5.4}$$

czyli w układzie mogą pojawiać się nowe obiekty. Jeśli układ jest dyssypatywny lub konserwatywny (tak jak np. klasyczny układ życia i śmierci), to wszystkie jego trajektorie są ograniczone, a więc żadna z nich nie może być gęsta w całej przestrzeni l^1 i oczywiście nie może być mowy o chaosie. Drugą obserwacją, która ma związek z jednym z uogólnień dyskutowanych poniżej, jest to, że struktura (5.2) widma A, pozwala stwierdzić, że również sam operator A, tzn. dyskretny układ dynamiczny generowany przez iteracje A, jest chaotyczny.

Pierwsza klasa uogólnień powyższego wyniku, którą chcemy tu przedstawić, pochodzi z pracy [11] i dotyczy identyfikacji chaotycznych funkcji pewnego generycznego operatora (który sam nie musi być chaotyczny). Operatorem tym jest tutaj operator przesunięcia, zdefiniowany dla $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots)$

wzorem

$$(5.5)\qquad (L\mathbf{f})_n = f_{n+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

W szczególności, operator A z pierwszej części tego przykładu można zapisać jako $A = -\alpha I + \beta L$, gdzie I jest identycznością.

Dalsze rozważania będziemy prowadzić w przestrzeniach Banacha $l^p(\mathbf{b})$ ciągów zespolonych $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ z normą

$$\|\boldsymbol{x}\|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p b_n,$$

gdzie ciąg wagowy $\mathbf{b}$ spełnia warunek $\sup_n b_k/b_{k+1} < \infty$, który jest wystarczający (i konieczny) do zapewnienia ciągłości L. Można wykazać, że supremum to jest równe $\|L\|^p$. Oznaczmy przez D koło jednostkowe w $\mathbb{C}$, ∂D niech oznacza okrąg jednostkowy. Dla funkcji analitycznej f w rD, $r > \|L\|$, niech $f(L)$ oznacza funkcję operatora skonstruowaną np. za pomocą szeregu potęgowego

$$f(L) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L^n,$$

gdzie $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, albo za pomocą całki Dunforda. Ponieważ L jest operatorem ograniczonym, zachodzi twierdzenie spektralne [19, Twierdzenie 5.12.2].

Niech R będzie promieniem zbieżności $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n z^n$; będziemy zawsze zakładać, że $R > 0$. Widmo punktowe L w $l^p(\mathbf{b})$ jest dane wzorem

$$\sigma_p(L) = \begin{cases} R^{1/p} D & \text{gdy } \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n R^n = \infty \text{ lub } R = \infty, \\ R^{1/p} \overline{D} & \text{gdy } \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n R^n < \infty, \end{cases}$$

odpowiednie wektory własne dane są przez (5.3). Kluczową obserwacją pozwalającą na identyfikację chaotycznych funkcji operatora L jest poniższy wynik.

TWIERDZENIE 5.1 [11]. *Załóżmy, że f jest funkcją analityczną różną od stałej w otoczeniu $\|L\|\overline{D}$. Jeśli $f(R^{1/p}D) \cap \partial D \neq \emptyset$, to $f(L)$ jest operatorem chaotycznym. Jeśli $f(R^{1/p}D) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$, to $f(L)$ generuje półgrupę chaotyczną.*

D o w ó d. Dowód pierwszego stwierdzenia wykorzystuje dwa podstawowe fakty. Po pierwsze, jeśli $0 \neq \mu \in R^{1/p}D \subseteq \sigma_p(L)$, to $f(\mu) \in \sigma_p(f(L))$, a po drugie, obraz zbioru otwartego za pomocą funkcji analitycznej, różnej od stałej, jest otwarty. Ponieważ $f(R^{1/p}D) \cap \partial D \neq \emptyset$, zbiory $\Omega_1 := \{\mu \in$

$R^{1/p}D$; $|f(\mu)| > 1\}$ i $\Omega_2 := \{\mu \in R^{1/p}D;\ |f(\mu)| < 1\}$ są otwarte i niepuste. Jeśli oznaczymy przez Y_j powłokę liniową zbioru $\{\mathbf{h}_\mu;\ \mu \in \Omega_j\}$, $j = 1, 2$, widzimy, że jeśli element $\Phi = (\phi_1, \phi_2 \ldots) \in X^*$ anihiluje Y_j, to funkcja analityczna $F_\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \mu^n$ znika tożsamościowo na każdym ze zbiorów Ω_j i z zasady zer izolowanych otrzymujemy, w obu przypadkach $\Phi = 0$, czyli zbiory Y_j są gęste. W oczywisty sposób, dla $x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mathbf{h}_{\mu_k} \in Y_2$, $\mu_k \in \Omega_2$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$, mamy

$$[f(L)]^n x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k [f(\mu_k)]^n \mathbf{h}_{\mu_k}.$$

Ponieważ m jest ustalone, zaś z definicji Ω_2 mamy $|f(\alpha_k)| < 1$, $\lim_{n\to\infty} \|[f^n(L)]^n x\| = 0$. Następną prostą, lecz kluczową obserwacją jest to, że na Y_1 istnieje operator Z, prawy odwrotny do $f(L)$, mianowicie $Zx = \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{f(\mu_k)} \mathbf{h}_{\mu_k}$, $x \in Y_1$, który, analogicznie, ma własność $\lim_{n\to\infty} Z^n x = 0$. Zatem, na podstawie Lematu 4.1, operator $f(L)$ jest hipercykliczny. Chaotyczność wynika w podobny sposób, gdyż założenia gwarantują, że zbiór $\Omega_3 := \{\mu \in R^{1/p}D;\ f(\mu) \in \exp(2\pi i \mathbb{Q})\}$, gdzie $\mathbb{Q}$ oznacza zbiór liczb wymiernych, który to zbiór daje punkty okresowe $f(L)$, ma punkt skupienia, więc zbiór Y_3, będący powłoką liniową okresowych elementów własnych $\mathbf{h}_\mu$, $\mu \in \Omega_3$, jest gęsty.

Stwierdzenie dotyczące półgrup wynika z faktu, że dla operatorów ograniczonych półgrupa generowana przez $f(L)$ jest dana za pomocą funkcji $t \to e^{tf(L)}$. Ze wzoru (2.5) wynika, że półgrupa ciągła jest chaotyczna. Jeśli choć dla jednego ustalonego $t_0 \geq 0$ operator $e^{t_0 f(L)}$ jest chaotyczny, widzimy, że wystarcza, by $e^{f(R^{1/p}D)} \cap \partial D \neq \emptyset$, co daje tezę. □

Z drugiej strony, jeśli $f(L)$ jest operatorem chaotycznym, to wykorzystując twierdzenie o odwzorowaniu widmowym dla widma punktowego [19, Twierdzenie 5.12.2] widzimy, że zbiór $f(\sigma_p(L)) \cap \partial D$ jest niepusty (nawet nieskończony [11]). Tak więc, jeśli $\sigma_p(L) = R^{1/p}D$, czyli gdy $R > 0$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n R^n = \infty$, to warunki Twierdzenia 5.1 stają się również konieczne. Przykładowo, w l^p (bez żadnej wagi), dla dowolnej funkcji analitycznej i różnej od stałej w otoczeniu $\overline{D}$, $f(L)$ jest chaotyczna wtedy i tylko wtedy gdy $f(D) \cap \partial D \neq \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(L)$ ma nietrywialny punkt okresowy.

W szczególnym przypadku, gdy f jest wielomianem, otrzymujemy warunek konieczny i wystarczający chaotyczności półgrupy generowanej przez $Q(L)$ bez dodatkowego założenia o widmie.

TWIERDZENIE 5.2. *Jeśli Q jest wielomianem, różnym od zera i stałej urojonej, to następujące warunki są równoważne*
(a) *$Q(L)$ generuje półgrupę chaotyczną;*
(b) *$Q(R^{1/p}D) \cap i\mathbb{R}$ jest niepusty.*

Powyższe wyniki można z łatwością uogólnić na przypadek operatora przesunięcia określonego na ciągach dwustronnych, tzn. zdefiniowanych na zbiorze liczb całkowitych. Szereg potęgowy definiujący widmo punktowe operatora staje się wówczas szeregiem Laurenta i koło zbieżności musi być zastąpione przez pierścień. Jeśli uwzględnimy te, i wynikające z nich w sposób naturalny zmiany, wszystkie wyniki tego przykładu pozostają prawdziwe.

Następnie omówimy dwa przykłady które, choć związane są z operatorem przesunięcia, nie są szczególnymi przypadkami naszkicowanej powyżej teorii.

Przykład 5.2. Chaos w układzie cząsteczek podlegających zderzeniom niesprężystym. Rozważmy przestrzennie jednorodną chmurę poruszających się cząsteczek podlegających zderzeniom z otoczeniem, np. z siatką krystaliczną, i tracących energię przy każdym zderzeniu. Ewolucja układu jest zadana przez funkcję rozkładu $f(t, \boldsymbol{v})$ opisującą gęstość cząstek o prędkości $\boldsymbol{v}$ w chwili t. Ponieważ w czasie zderzeń odbywa się wymiana energii pomiędzy cząstkami i otoczeniem, w naszym przypadku wygodniej jest wprowadzić nowe zmienne związane z energią kinetyczną $\xi = v^2/2$, gdzie $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}$ jest elementem sfery jednostkowej $S^2 \in \mathbb{R}^3$, tzn. $\boldsymbol{\omega}$ wyznacza kierunek prędkości. Równanie opisujące ewolucję układu w przypadku jednorodnym ma postać [3],

$$\partial_t f(t,\xi,\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S^2} f(t,\xi+1,\boldsymbol{\omega})d\boldsymbol{\omega} - H(\xi-1)f(t,\xi,\boldsymbol{\omega}), \tag{5.6}$$

gdzie H jest funkcją Heaviside'a. Sensowną fizycznie przestrzenią dla tego modelu jest $X = L_1(\mathbb{R}^3, d\boldsymbol{v})$, gdzie norma nieujemnej gęstości daje całkowitą liczbę cząstek w układzie. Przechodząc do zmiennej energetycznej $(\xi, \boldsymbol{\omega})$ widzimy, że równanie (5.6) powinno być rozpatrywane w $X = L_1(\mathbb{R}_+ \times S^2, \sqrt{\xi}d\xi d\boldsymbol{\omega})$.

Rozważmy zagadnienie na wartości własne

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S^2} f(\xi+1,\boldsymbol{\omega})d\boldsymbol{\omega} - H(\xi-1)f(\xi,\boldsymbol{\omega}) = \lambda f(\xi,\boldsymbol{\omega}). \tag{5.7}$$

Okazuje się, że korzystnie jest zapisać to równanie jako nieskończony układ równań, wprowadzając zredukowaną energię $\xi \in [0,1)$ i definiując $f_n(\xi,\boldsymbol{\omega}) = f(\xi+n,\boldsymbol{\omega})$. Norma f w X przybiera wtedy postać

$$\|f\|_X = \int\limits_{S^2}\left(\int\limits_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}|f_n(\xi,\boldsymbol{\omega})|\sqrt{\xi+n}\right)d\xi\right)d\boldsymbol{\omega}. \tag{5.8}$$

Równanie (4.4) przekształca się w układ

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S^2} f_1(\xi,\omega)d\omega = \lambda f_0(\xi,\omega), \\ &\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S^2} f_{n+1}(\xi,\omega)d\omega - f_n(\xi,\omega) = \lambda f_n(\xi,\omega), \end{aligned} \qquad n>0. \tag{5.9}$$

Zapiszmy f_n w postaci sumy $f_n = f_{n0} + f_{n1}$, gdzie $f_{n0} = (4\pi)^{-1}\int_{S^2} f_n d\omega$, zaś $\int_{S^2} f_{n1} d\omega = 0$. Definiujemy w ten sposób rozkład X na sumę prostą, który pozwala zapisać (5.9) w równoważnej postaci jako

$$f_{10} = \lambda f_{00}, \qquad f_{n+1,0} - f_{n0} = \lambda f_{n0}, \quad n>0, \tag{5.10}$$

i

$$0 = \lambda f_{01}, \qquad -f_{n1} = \lambda f_{n1}, \quad n>0. \tag{5.11}$$

Układ (5.11) ma nietrywialne rozwiązania dla $\lambda = 0$ i jest to $\beta_0 = (f_0(\xi,\omega), 0,\ldots,0\ldots)$ oraz $\beta_{-1} = (0, f_{11}(\xi,\omega), f_{21}(\xi,\omega),\ldots)$ dla $\lambda = -1$, gdzie f_{n1} są dowolnymi funkcjami, których całki po S^2 są równe zeru. Ponieważ nie interesuje nas pełny opis widma, tymi rozwiązaniami nie będziemy się dalej zajmować. Załóżmy dalej $\lambda \neq 0, -1$. W tym przypadku wszystkie elementy własne można uzyskać z układu (5.10), zatem f_{00} może być dowolne, zaś $f_{n0} = (1+\lambda)^{n-1}\lambda f_{00}$. Oczywiście, jeśli $f_0(\xi) \in L_1([0,1], \sqrt{\xi}d\xi)$, to wszystkie istotne właściwości $\beta_\lambda = (f_{00}, \lambda f_{00},\ldots)$ są określone przez ciąg $((1+\lambda)^{n-1}\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$; zatem zgodnie z (5.8) możemy prowadzić dalsze rozważania w przestrzeni $l^1(\mathbf{b})$ z wagą $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots)$, gdzie $b_n = \sqrt{n}$. Jeśli więc $|1+\lambda| < 1$, $\lambda \neq 0$, to β_λ jest elementem własnym zagadnienia oryginalnego.

Warto tu zauważyć, że prawej strony układu (5.10) nie da się zapisać w postaci funkcji operatora przesunięcia (brakuje elementu przekątniowego dla $n = 0$), tak więc wyniki Przykładu 5.1 nie dają się tu bezpośrednio wykorzystać.

Zastosujmy więc Twierdzenie 4.2. Ciąg $\Phi = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest w $(l^1_w)^*$, o ile zbiega do zera tak, jak $n^{-1/2}$ dla $n \to \infty$. Dla takiego ciągu rozważmy funkcję

$$\begin{aligned} F_\Phi(\lambda) = < \Phi, \beta_\lambda > &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1+\lambda)^{n-1}\lambda \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}, \end{aligned} \tag{5.12}$$

gdzie $z = 1+\lambda$. Funkcja ta jest tożsamościowo równa zeru dla $|z| < 1$ wtedy i tylko wtedy gdy $a_n - a_{n+1} = 0$ dla $n \geq 0$, czyli $a_n = a_0$ dla $n > 0$. Ponieważ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ musi zbiegać do zera dla n zmierzającego do nieskończoności, musimy mieć $a_n = 0$ dla wszystkich n.

Oczywiście, półgrupa rozwiązująca wyjściowe równanie (5.6) nie może być chaotyczna, gdyż układ jest dyssypatywny (dyskutowaliśmy to przy wzorze (5.4)). Widmo nie spełnia też założeń Twierdzenia 4.2, gdyż nie zawiera wartości własnych z dodatnimi częściami rzeczywistymi. Jednakże, jeśli w układzie istnieje dowolnie małe źródło, to równanie (5.6) przybiera postać

$$\partial_t f(t,\xi,\omega) = \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} f(t,\xi+1,\omega)d\omega - H(\xi-1)f(t,\xi,\omega) + \alpha f, \tag{5.13}$$

gdzie $\alpha > 0$ i widmo punktowe przesuwa się w prawo o α, zatem wszystkie założenia Twierdzenia 4.2 będą spełnione, w związku z czym półgrupa rozwiązująca (5.13) będzie chaotyczna. Podobne zagadnienie będzie poruszone w Twierdzeniu 6.2.

Istotne uogólnienia tego przykładu można znaleźć w [1], [7].

Następny przykład jest dość interesujący, gdyż dotyczy modeli o zmiennych współczynnikach. W pewnym sensie można te modele traktować jako małe zaburzenie układu (5.1), jednakże nowe klasy zjawisk opisywanych przez nie, jak też i trudności techniczne związane z dowodem ich chaotyczności uzasadniają wydzielenie dla nich specjalnego miejsca.

Przykład 5.3. Teoria populacji – wykształcanie się odporności na leki w komórkach rakowych. Przyjmując podejście opisane w [20], rozważmy populację komórek rakowych składających się z podpopulacji różniących się poziomem odporności na podawany lek. Komórki z podpopulacji 0 są wrażliwe na podawany lek, zaś komórki z podpopulacji n, $n > 0$, są odporniejsze, przy czym ich odporność rośnie wraz z n. Komórki każdej podpopulacji zawierają pewną liczbę kopii genu odpowiedzialnego za odporność komórki – im więcej kopii tego genu zawiera komórka, tym bardziej jest ona odporna na podawany lek, w tym sensie, że może przetrwać w środowisku o wyższym stężeniu leku.

Ponieważ liczba kopii genu może być bardzo duża, wydaje się sensownym rozpatrywanie modelu z nieskończoną liczbą podpopulacji. Proces rozważany w [20] można rozpatrywać jako kombinację dwóch typów procesów: zachowawczego i proliferacyjnego. Składowa zachowawcza opisuje mutacje komórek i jest modelowana jako zwykły proces życia i śmierci. Obecność składowej proliferacyjnej wynika z założenia, że moment śmierci komórki jest tożsamy z jej podziałem; przeciętny czas życia komórki podpopulacji n dany jest przez współczynnik λ_n. Model ten prowadzi do nieskończonego układu równań różniczkowych zwyczajnych

$$\begin{aligned} \dot{f}_0 &= -a_0 f_0 + d_1 f_1, \\ \dot{f}_n &= -a_n f_n + b_{n-1} f_{n-1} + d_{n+1} f_{n+1}, \qquad n \geq 1, \end{aligned} \tag{5.14}$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenia $a_0 = -\lambda_0 + b_0$ i, dla $n \in \mathbb{N}$, $a_n = -\lambda_n + b_n + d_n$.

Tak jak w Przykładzie 5.1, oznaczmy przez $f = \{f_n(t)\}_{n\geq 0}$ funkcję rozkładu populacji, zaś przez A nieskończoną macierz współczynników prawej strony (5.14). Ponownie, odpowiednią przestrzenią Banacha dla procesu opisywanego przez (5.14) jest przestrzeń l^1, gdzie norma nieujemnego elementu daje całkowitą liczbę komórek. Ponieważ analiza w matematycznie ważnych przestrzeniach l^p, $1 < p < \infty$, i c_0 (przestrzeń ciągów zbieżnych do zera) nie odbiega w istotny sposób od analizy w l^1, podane poniżej wyniki obejmują wszystkie te przypadki.

Układ (5.14) był rozważany w pracach [5], [6] przy następujących założeniach: współczynniki a_n, b_n (dla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) i d_n (dla $n \in \mathbb{N}$) są nieujemne oraz istnieje liczba q $(0 < q < (\sqrt{3}-1)/2)$ taka, że

(Z1) Przy pewnym $d > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = d$ i $\inf\limits_{n\geq 0} \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{d_i}{d} > 0$.

(Z2) Przy pewnym $0 \leq a < d$

$$|a_n - a| \leq dq^{n+1}, \qquad n \geq 0.$$

(Z3) $|b_n d_{n+1}| < d^2 q^{2n+4}, \qquad n \geq 0.$

Jak wspomnieliśmy wyżej, z założeń tych wynika, że (5.14) jest małym (zanikającym wykładniczo dla dużych n) zaburzeniem układu (5.1).

Oznaczmy przez $\mathcal{A}_p$, $p \in [1, \infty[\cup \{0\}$, operator zadany przez macierz A odpowiednio w l^p i c_0. Operatory te są ograniczone, więc generują w tych przestrzeniach półgrupy mocno ciągłe, które oznaczymy przez $(T_p(t))_{t\geq 0}$.

Porównując, wyliczone w sposób jawny, formalne wektory własne A z odpowiednim ciągiem Fibonacciego, otrzymamy następującą charakteryzację widma punktowego $\mathcal{A}_p$.

LEMAT 5.1. *Jeśli spełnione są założenia (Z1)–(Z3), to istnieje $r > 0$ takie, że koło $\{\lambda \in \mathcal{C};\ |\lambda| < r\}$ należy do widma punktowego $\mathcal{A}_p$.*

W istocie wynik ten jest prawdziwy przy słabszych założeniach: ciąg $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie musi dążyć do zera, tylko do granicy b spełniającej nierówności $b < d$ i $a+b < d$. Tak więc widmo $\mathcal{A}_p$ ma strukturę wymaganą w Twierdzeniu 4.2 dla znacznie szerszej klasy modeli (5.14). Niestety, dowód, że zachodzi drugi warunek tego twierdzenia wymaga wykładniczych oszacowań (Z2)–(Z3). W chwili obecnej nie wiemy, czy założenia te są techniczne, czy są raczej wyrazem faktu, że chaos w tym modelu jest spowodowany chaosem pochodzącym z (5.1), który jest zachowywany przy małych zaburzeniach. Możemy natomiast udowodnić nieco słabszą wersję chaosu, co omawiamy w Przykładzie 6.2.

Główny wynik tego przykładu jest zawarty w poniższym twierdzeniu.

TWIERDZENIE 5.3. *Jeśli spełnione są założenia (Z1)–(Z3), to półgrupa generowana przez $\mathcal{A}_p$ jest chaotyczna w każdej przestrzeni l^p, $1 \leq p < \infty$, i w c_0.*

Dowód polega na sprawdzeniu założeń Twierdzenia 4.2, technicznie jest jednak dość skomplikowany – wymaga szacowania rozwiązań nieskończonych układów równań liniowych, tutaj niestety z wykorzystaniem niezbyt subtelnego narzędzia, jakim jest szereg Neumana. Założenia (Z2) i (Z3) są potrzebne, aby zapewnić sumowalność tego szeregu. Ciekawym aspektem dowodu jest wykorzystanie technik kombinatorycznych do zliczania wyrazów tego samego rzędu pojawiających się w sumowanych szeregach.

Rozważmy następnie układ dany przez macierz transponowaną do A:

$$\frac{df_0}{dt} = -a_0 f_0 + b_0 f_1,$$
$$\frac{df_n}{dt} = -a_n f_n + d_n f_{n-1} + b_n f_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.15}$$

Wykorzystując to, że $c_0^* = l^1$ oraz $(l^p)^* = l^r$, $1/p + 1/r = 1$, na podstawie Twierdzenia 4.3 możemy zauważyć, że jeśli układ (5.15) byłby chaotyczny, to widmo punktowe operatora $\mathcal{A}_p$ związanego z układem (5.14) byłoby puste. Ponieważ poprzednio udowodniliśmy, że tak nie jest, otrzymujemy natychmiast wniosek.

WNIOSEK 5.1 *Załóżmy, że ciągi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełniają założenia (Z1)–(Z3). Wówczas półgrupa generowana przez układ (5.15) nie jest chaotyczna (ani nawet hipercykliczna) w żadnej z przestrzeni l^p, $1 \leq p < \infty$, ani w c_0.*

Z Twierdzenia 5.3 wynika, że chaos może zachodzić w układach ze stosunkowo dużymi współczynnikami „śmierci" i bardzo małymi współczynnikami „urodzin". Procesy takie nazywane są w [20] podkrytycznymi – okazuje się, że nabywanie odporności na leki przez komórki rakowe do nich właśnie należy. Z drugiej strony chaos nie może pojawić się w procesach z małymi współczynnikami śmierci i stosunkowo dużymi współczynnikami urodzin.

Rozważmy następnie model śmierci (5.1) o zmiennych współczynnikach:

$$f_n' = -a_n f_n + d_{n+1} f_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{5.16}$$

przy założeniach

(Z1') Istnieją $a \geq 0$ i $q < 1$ takie, że dla dostatecznie dużego n,

$$|a_n - a| \leq q^{n+1}.$$

(Z2') $\lim_{n\to\infty} d_n = d > a$ i $\inf_{n\geq 0} \prod_{i=0}^{n} \frac{d_i}{d} > 0$.

Półgrupę rozwiązującą (5.16) w l^p, $1 \leq p < \infty$, i w c_0 będziemy oznaczać $(\mathcal{G}_p(t))_{t\geq 0}$.

TWIERDZENIE 5.4. *Załóżmy, że ciągi* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *spełniają założenia (Z1') i (Z2'). Wówczas półgrupa* $(\mathcal{G}_p(t))_{t\geq 0}$ *jest chaotyczna w* l_p, $1 \leq p < \infty$, *i w* c_0.

Widzimy, że tym wypadku można znacznie osłabić założenia gwarantujące chaos, z tym że w dalszym ciągu wyrażają one fakt, że rozpatrywany układ jest małym (choć teraz znacznie większym, niż w poprzednim przypadku) zaburzeniem układu (5.1). Osłabienie założeń jest możliwe, gdyż potrafimy rozwiązać w sposób jawny odpowiednie układy równań bez potrzeby odwoływania się do szeregu Neumana, jak w Twierdzeniu 5.3. Rozwiązania te też konstruuje się za pomocą metod kombinatorycznych.

„Odwrotny" proces urodzin opisany jest układem równań

$$\begin{aligned} f_0' &= -a_0 f_0, \\ f_n' &= -a_n f_n + d_n f_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

gdzie macierz po prawej stronie jest macierzą transponowaną do macierzy współczynników (5.16). Oznaczmy przez $(\mathcal{U}_p(t))_{t\geq 0}$ odpowiednią półgrupę w c_0 lub l^p. Jak poprzednio, mamy

TWIERDZENIE 5.5. *Półgrupa* $(\mathcal{U}_p(t))_{t\geq 0}$ *nie jest hipercykliczna w żadnej z przestrzeni* c_0, l^p, $1 \leq p < \infty$.

Na zakończenie tego przykładu warto zauważyć, że wszystkie powyższe wyniki zostały uzyskane za pomocą teorii spektralnej, która wymaga, abyśmy pracowali w zespolonych przestrzeniach Banacha. Tak więc gęste trajektorie układu (5.14) istnieją, na mocy Twierdzenia 5.3, w zespolonych przestrzeniach l^p. Z drugiej strony biologiczny proces opisany (5.14) jest z pewnością rzeczywisty; co więcej, biologiczne trajektorie muszą znajdować się w stożku dodatnim – ujemne gęstości nie mają sensu. Okazuje się [6], że przejście do zespolonych przestrzeni Banacha nie stanowi problemu, gdyż można udowodnić, że jeśli rzeczywista półgrupa ma trajektorię gęstą w przestrzeni zespolonej, to część rzeczywista tej trajektorii jest gęsta w części rzeczywistej tej przestrzeni, tzn. w fizycznej przestrzeni, w której był zbudowany model. Niestety, kwestii dodatniości nie daje się rozwiązać w ten sposób, co jest spowodowane głównie tym, że stożek dodatni w rozpatrywanych przetrzeniach ma puste wnętrze i nie ma prostego sposobu transferu własności topologicznych z całej przestrzeni do tego stożka. Tak więc udowodniony chaos w układach typu (5.14) ma charakter głównie matematyczny, pokazując np. na niebezpieczeństwo niestabilności numerycznych, natomiast trajektorie czysto dodatnie nie mogą być chaotyczne w sensie Devaneya, gdyż ich norma jest rosnąca. Z drugiej strony, porównując dwie dodatnie trajektorie widzimy, że ich różnica może zmieniać znak, a zatem może wykazywać chaotyczną dynamikę. W istocie, można udowodnić [8], że dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieją dodatnie warunki początkowe, oddalone od siebie o mniej niż ϵ, których różnica produkuje trajektorię gęstą w X. Innymi słowy, istnieją trajektorie, zaczynające się z dowolnie bliskich punktów dodatnich, które oddalają się od siebie w chaotyczny sposób.

5.2. *Chaos generowany przez operator różniczkowania.* Mówiąc niezbyt precyzyjnie, operator różniczkowania pierwszego rzędu generuje półgrupę przesunięć $[T(t)f](s) = f(t+s)$, więc wyniki tego podrozdziału można w pewnym sensie traktować jako ciągłe odpowiedniki teorii opisanej powyżej dla operatora przesunięcia dyskretnego. Ponieważ jednak operator różniczkowania jest operatorem nieograniczonym i kwestia generowania przez niego półgrupy jest znacznie bardziej delikatna, teoria opisana tutaj jest znacznie uboższa.

Przykład 5.4. Chaos generowany przez funkcje operatora różniczkowania pierwszego rzędu. W tym przykładzie omówimy możliwość przeniesienia na przypadek ciągły wyników Przykładu 5.1, a w szczególności Twierdzenia 5.2.

Niech $X = L_p([0,\infty),\rho)$ będzie przestrzenią Banacha funkcji o wartościach zespolonych, określonych na $[0,\infty)$ i takich, że

$$\|f\|^p = \int_0^\infty |f(s)|^p \rho(s)ds < \infty.$$

O funkcji ρ zakładamy, że jest mierzalna, dodatnia i spełnia warunek

$$\sup_{s\geq 0} \rho(s)/\rho(s+t) < Me^{\alpha t} \tag{5.17}$$

przy pewnych M, ω i każdym $t \geq 0$. Warunek ten pozwala pokazać, że półgrupa przesunięć $[T(t)f](s) = f(t+s)$ jest mocno ciągła na X. Półgrupa ta [12], jest generowana przez operator $B = \frac{d}{ds}$ zdefiniowany na dziedzinie $D(B)$ składającej się ze wszystkich funkcji $f \in X$, które są absolutnie ciągłe i dla których $df/ds \in X$.

Formalnymi funkcjami własnymi B są funkcje wykładnicze $h_\mu(s) = e^{\mu s}$, $s \geq 0$. Są one funkcjami własnymi, o ile $Re\mu < \omega/p$, gdzie ω jest górną granicą widma punktowego, zdefiniowaną następująco:

$$\omega = \sup\left\{\beta \in \mathbb{R};\ \int_0^\infty e^{\beta s}\rho(s)ds < \infty\right\}.$$

Jeśli oznaczymy przez $\mathbb{C}_-$ otwartą lewą półpłaszczyznę $\{z \in \mathbb{C};\ Rez < 0\}$, to widmo punktowe B jest równe $\omega/p + \mathbb{C}_-$, gdy $\int_0^\infty e^{\beta s}\rho(s)ds = \infty$, i $\overline{\omega/p + \mathbb{C}_-}$ w przeciwnym wypadku. Umówimy się też, że $\infty + \mathbb{C}_- = \mathbb{C}$ i $-\infty + \mathbb{C}_- = \emptyset$. Jak poprzednio, dowodzenie równoważności warunków chaosu możliwe jest, gdy spełniony jest dodatkowy warunek

$$\omega > -\infty, \text{ oraz } \int_0^\infty e^{\omega s}\rho(s)ds = \infty \tag{5.18}$$

tzn. gdy $\sigma_p(B) = \omega/p + \mathbb{C}_-$.

Poniższe rozważania, pochodzące z [11], wynikają z obserwacji, że z własności rachunku funkcjonalnego w dowodzie Twierdzenia 5.1 wykorzystaliśmy jedynie twierdzenie o odwzorowaniu widmowym dla widma punktowego. Mówiąc ściślej, niech f będzie funkcją analityczną w otoczeniu widma B. Jak łatwo sprawdzić, zbiór funkcji własnych jest wystarczająco bogaty, by odpowiedniki podprzestrzeni Y_j, $j = 1, 2, 3$, z dowodu Twierdzenia 5.1 były gęste, zatem teza tego twierdzenia będzie zachodzić dla dowolnego operatora D, dla którego $f(\mu) \in \sigma_p(D)$ dla $0 \neq \mu \in \sigma_p(B)$ oraz, odwrotnie, dla każdego $0 \leq \lambda \in \sigma_p(D)$ znajdzie się $\mu \in \sigma_p(B)$. Jak pamiętamy, pierwszy warunek był potrzebny, by udowodnić hipercykliczność, drugi zaś dla okresowości. Podsumowując, przyporządkowanie $B \to f(B) =: D$ może być zupełnie dowolne, pod warunkiem, że zachowuje widmo punktowe w omówionym wyżej sensie.

Niech Q będzie wielomianem o współczynnikach zespolonych $Q(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_n \neq 0$. Zdefiniujmy operator różniczkowy

$$Q(B) = \sum_{k=0}^{n} a_k B^k \tag{5.19}$$

na dziedzinie $D(Q(B)) = D(B^n)$.

Ponieważ dla przyporządkowania „generator półgrupy” $\to$ „półgrupa mocno ciągła” zachodzi twierdzenie widmowe dla widma punktowego [23], oraz w naturalny sposób twierdzenie to zachodzi dla wielomianów, powyższe rozważania prowadzą do następującego twierdzenia

TWIERDZENIE 5.6. *Jeśli funkcja wagowa ρ spełnia założenie (5.18), zaś Q jest wielomianem takim, że $Q(B)$ jest generatorem półgrupy mocno ciągłej $(T(t))_{t\geq 0}$, to następujące warunki są równoważne:*

(a) *$(T(t))_{t\geq 0}$ jest chaotyczna,*

(b) *$Q(\omega/p + \mathbb{C}_-) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$,*

(c) *$(T(t))_{t\geq 0}$ ma nietrywialny punkt okresowy,*

(d) *$T(1)$ jest operatorem chaotycznym,*

(e) *$T(1)$ ma nietrywialny punkt okresowy.*

Jeśli nie jest spełniony warunek (5.18), to w powyższym twierdzeniu nie musi zachodzić (a)$\Rightarrow$ (b) i (c)$\Rightarrow$ (b), bo zbiór $\omega/p + \mathbb{C}_-$ nie obejmuje całego widma punktowego. Niestety, geometria zagadnienia w tym przypadku nie pozwala na wykorzystanie własności wielomianu w celu obejścia (5.18), tak jak jest to możliwe w Twierdzeniu 5.2. Mamy jednakże interesujący warunek wystarczający chaosu (b)$\Rightarrow$ (a), nawet jeśli (5.18) nie jest spełniony.

Twierdzenie 5.6 wygląda całkiem efektownie, ale niestety jego zastosowania są ograniczone przez założenie „jeśli $Q(B)$ generuje półgrupę mocno ciągłą". Istotnie, dla $n \geq 1$ raczej trudno jest znaleźć nietrywialne przypadki, kiedy założenie to jest spełnione – można to sobie łatwo uświadomić zauważając, że od rozwiązań równań rożniczkowych wyższych rzędów oczekujemy zazwyczaj spełnienia określonych warunków brzegowych, a te są nieobecne w definicji operatora B i nie mogą się pojawić przy braniu jego wyższych potęg.

Pomimo tego ograniczenia, Twierdzenie 5.6 prowadzi do eleganckich wniosków dotyczących afinicznych funkcji operatora B, $Q(B) = bB + a$, które generują półgrupy postaci

$$[T(t)f](s) = e^{at}f(s+bt), \qquad f \in X,\ t,s \geq 0. \tag{5.20}$$

Łatwy rachunek pokazuje, że jeśli spełnione jest założenie (5.18), to $(T(t))_{t\geq 0}$, zdefiniowana przez (5.20), jest chaotyczna wtedy i tylko wtedy, gdy $Rea + b\omega/p > 0$. W szczególności, półgrupa przesunięcia $[T(t)f](s) = f(t+s)$ jest chaotyczna wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega > 0$. Dzięki (5.18) ostatni warunek jest równoważny $\int_0^\infty \rho(s)ds < \infty$. Istotnie, całkowalność ρ daje $0 \leq \omega$, a z (5.18) otrzymujemy $0 < \omega$.

Podobnie, jak w przypadku przesunięcia dyskretnego, powyższe wyniki można przenieść na przypadek, gdy $B = \frac{d}{ds}$ jest rozpatrywany na $X = L_p(\mathbb{R}, \rho)$, generując tam półgrupę

$$[T(t)f](s) = f(t+s), \qquad f \in X,\ -\infty < t,s < +\infty.$$

Założenie (5.17) na funkcję wagową musi być zastąpione obecnie przez

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} \frac{\rho(s)}{\rho(s+t)} \leq Me^{\alpha|t|}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{5.21}$$

Funkcje własne B dane są formalnie tym samym wzorem $h_\mu = e^{\mu s}$, jednak do opisu widma punktowego, zamiast półpłaszczyzny zdefiniowanej przez ω, będziemy potrzebować pasa otwartego $V_{\omega_2,\omega_1} = \{z \in \mathbb{C};\ \omega_2 < Rez < \omega_1\}$, gdzie

$$\omega_1 = \sup\{\beta \in \mathbb{R};\ \int_0^\infty e^{\beta s}\rho(s)ds < \infty\},$$

$$\omega_2 = \inf\{\beta \in \mathbb{R};\ \int_{-\infty}^0 e^{\beta s}\rho(s)ds < \infty\}.$$

Podobnie, jak poprzednio, $\sigma_p(B) \subseteq \frac{1}{p}\overline{V_{\omega_2,\omega_1}}$, przy czym $\sigma_p(B) = \frac{1}{p}V_{\omega_2,\omega_1}$ jeśli spełniony jest warunek analogiczny do (5.18)

$$-\infty < \omega_2 < \omega_1, \quad \text{oraz} \quad \int_0^\infty e^{\omega_1 s}\rho(s)ds = \int_{-\infty}^0 e^{\omega_2 s}\rho(s)ds = \infty \tag{5.22}$$

Wszystkie omówione powyżej wyniki dotyczące chaosu generowanego przez funkcje operatora różniczkowania na półprostej można teraz przenieść na

całą prostą, dokonując oczywistych zmian sformułowań. W szczególności, warunek (b) Twierdzenia 5.6 musi być zastąpiony przez
(b') $Q\left(p^{-1}V_{\omega_2,\omega_1}\right) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$.
Odpowiedniki Twierdzenia 5.6 i wniosków z niego mają, w kontekście operatorów zdefiniowanych na całej prostej, więcej zastosowań, gdyż klasa wielomianów generujących półgrupy mocno ciągłe jest znacznie szersza. W szczególności, mamy następujący wynik.

WNIOSEK 5.2. *Jeśli waga ρ spełnia warunek (5.21) oraz $\omega_1 > \omega_2$, to B^2 generuje mocno ciągłą półgrupę w $X = L_p(\mathbb{R}, \rho)$ przy dowolnym $p \in [1, \infty)$.*

Dowód. Z warunku (5.21) wynika, że B generuje grupę w X, a zatem [16], B^2 generuje półgrupę mocno ciągłą na X. Ponieważ przekształcenie pionowego pasa V_{ω_2,ω_1} za pomocą funkcji kwadratowej ma zawsze punkty wspólne z osią urojoną (gdyż proste $Rez = Imz$ przecinają dowolny pas, zaś z drugiej strony są przekształcane na oś urojoną), widzimy, że półgrupa generowana przez B^2 (czyli półgrupa dyfuzyjna), spełnia założenie (b') odpowiednika Twierdzenia 5.6 dla operatorów zdefiniowanych na całej osi, czyli jest chaotyczna w $L_p(\mathbb{R}, \rho)$. □

Żeby przybliżyć trochę ten wynik, zauważmy, że żadne wagi wielomianowe bądź wymierne (w szczególności $\rho = 1$) nie spełniają powyższych założeń, dając $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Stosunkowo najprostszą wagą ρ, przy której półgrupa dyfuzyjna jest chaotyczna w $L_p(\mathbb{R}, \rho)$ jest $\rho(s) = e^{-|s|}$, mamy bowiem w tym przypadku $\sup_{s\in\mathbb{R}} \frac{\rho(s)}{\rho(s+t)} = e^{|t|}$, $\omega_1 = 1$ i $\omega_2 = -1$. Wagi $\rho(s) = e^{\pm s}$ ani $\rho(s) = e^{|s|}$ nie spełniają natomiast tych założeń. □

Przykład 5.5. Równanie dryfu-dyfuzji na półprostej. Pomimo, że równania dyfuzji na półprostej nie da się zapisać z wykorzystaniem funkcji operatora różniczkowego pierwszego rzędu, gdyż trzeba zadać warunek brzegowy w punkcie $x = 0$, a zatem nie można wykorzystać teorii z pierwszej części poprzedniego przykładu, półgrupy generowane przez operatory dryfu-dyfuzji mogą być chaotyczne. Omówimy tutaj, za [12], najprostszy przykład tego typu, nie roszcząc sobie pretensji do ogólności. Szczegółową analizę tego modelu można znaleźć w cytowanej pracy.

Rozpatrzmy w $X = L_2([0, \infty))$ równanie dryfu-dyfuzji

$$
\begin{aligned}
&u_t = au_{xx} + bu_x + cu, \quad t > 0, x > 0,\\
&u(0,t) = 0, \quad t \geq 0, \\
&u(x,0) = f(x), \quad x > 0,\ f \in X.
\end{aligned} \tag{5.23}
$$

Wiadomo, że istnieje półgrupa analityczna dająca rozwiązania powyższego zagadnienia, $u(t, x) = [T(t)f](x)$. W dalszym ciągu będziemy zakładać, że $a, b, c > 0$ i $c < b^2/2a < 1$. Zgodnie z metodyką Twierdzenia 4.2, zaczniemy od znalezienia widma punktowego i funkcji własnych. Rozwiązując równanie różniczkowe

$$ag'' + bg' + cg = \lambda g, \qquad g(0) = 0,$$

otrzymujemy funkcje własne

$$u_\lambda(x) = e^{-\frac{b}{2a}x} \sin\left(x\sqrt{\frac{c-\lambda}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}\right),$$

które są elementami X, jeśli

$$\lambda \in U$$
$$= \left\{\lambda \in \mathbb{C} \middle| \left|\lambda - \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)\right| \le \frac{b^2}{4a}, \quad \text{oraz} \quad Im\lambda \neq 0, \text{ o ile } Re\lambda \le c - \frac{b^2}{4a}\right\}.$$

Można dowieść, że zbiór ten spełnia założenia Twierdzenia 4.2, zatem półgrupa $(T(t))_{t\geq 0}$ jest chaotyczna. □

Przykład 5.6. Chaos w teorii populacji komórek krwi. Być może pierwszym liniowym układem dynamicznym, w którym zaobserwowano chaos (z tym, że w sensie teorii miary) jest układ opisany przez równanie transportu

$$u_t = -xu_x + 0.5u, \qquad 0 < x < 1, \ t > 0 \tag{5.24}$$

Równanie to jest pierwszą przymiarką do opisu ewolucji komórek krwi, różniących się stopniem dojrzałości x. Równanie to było badane w latach osiemdziesiątych za pomocą metod teorii ergodycznej, patrz np. [25], [21]. Udowodnione tam istnienie miary niezmienniczej o szczególnych własnościach dla ewolucji opisanej przez (5.24) stanowi podstawę do uznania tej ewolucji za chaotyczną. Równanie to było badane później w [31] w przestrzeni funkcji ciągłych $C([0,1])$ i jej podprzestrzeni $C_0([0,1])$ składającej się z funkcji znikających dla $x = 0$. Stosując technikę, którą można uznać za prekursorkę Twierdzenia 4.2, autor udowodnił w [31], że (5.24) jest topologicznie chaotyczny w $C_0([0,1])$, zaś nie jest chaotyczny w $C([0,1])$. Tę różnicę we własnościach układu autor tłumaczy tym, że w $C_0([0,1])$ mamy niewystarczającą ilość najbardziej prymitywnych ($x = 0$) komórek.

Układ (5.24) jest również chaotyczny w przestrzeniach $L_p([0,1])$. Można to udowodnić bezpośrednio [2], albo zauważyć, że podstawienie $x = e^{-s}$ sprowadza (5.24) do

$$v_t = v_s + 0.5v,$$

w przestrzeni $L_p([0,\infty), e^{-s}ds)$, zatem można zastosować wyniki Przykładu 5.4, omówione po wzorze (5.20). Widzimy, że w tym przypadku ω = -1, $a = 0.5$ i $b = 1$, czyli $Rea + b\omega/p = 0.5 + 1/p > 0$, a zatem półgrupa jest chaotyczna.

6. Dalsze uogólnienia – chaos w podprzestrzeniach. Przy dowodzeniu chaotyczności półgrup najpoważniejsze trudności sprawia sprawdzanie warunku (iii) w Twierdzeniu 4.2, który, jak wiemy, pozwala dowieść liniowej gęstości elementów własnych generatora w X. Zachodzi pytanie, co się stanie, gdy pominiemy ten warunek, zachowując dwa pozostałe. Okazuje się, że półgrupa będzie wciąż chaotyczna, z tym że być może tylko w pewnej podprzestrzeni przestrzeni X. Wynik ten, który naszkicujemy poniżej, został uzyskany ostatnio w pracy [7]. Punktem wyjścia jest następująca prosta obserwacja.

OBSERWACJA 6.1. *Jeśli A jest domkniętym operatorem w X i istnieje wybór jego elementów własnych x_λ, który jest analityczny w otwartym i spójnym zbiorze $U \subset \mathbb{C}$, wówczas dla każdego zbioru $U' \subset U$, mającego punkt skupienia w U zachodzi*

$$Z = \overline{Span\{x_\lambda, \lambda \in U'\}} = \overline{Span\{x_\lambda, \lambda \in U\}}.$$

Dowód wynika z zasady zer izolowanych. Stosując powyższą obserwację do Twierdzenia 4.2 widzimy, że jeśli pominiemy warunek (iii), to domknięcia powłok liniowych zbiorów $\{x_\lambda;\ \lambda \in \sigma_p(A),\ Re\lambda \gtreqless 0\}$ pokrywają się, definiując podprzestrzeń

$$Y = \overline{\{x_\lambda;\ \lambda \in \sigma_p(A),\ Re\lambda \gtreqless 0\}}.$$

Oczywiście, przestrzeń Y jest niekoniecznie równa całej przestrzeni X. Ponieważ Y jest przestrzenią niezmienniczą półgrupy $(T(t))_{t\geq 0}$, zachodzi następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 6.1 [7]. *Jeśli spełnione są założenia (i) i (ii) Twierdzenia 4.2, to istnieje nieskończenie wymiarowa, domknięta podprzestrzeń $Y \subseteq X$, niezmiennicza względem $(T(t))_{t\geq 0}$ i taka, że $(T|_Y(t))_{t\geq 0}$ jest chaotyczna.*

Poniższe twierdzenie opisuje możliwe układy dynamiczne, których generator ma widmo punktowe o niepustym wnętrzu.

TWIERDZENIE 6.2. *Niech A będzie generatorem układu dynamicznego $(T(t))_{t\geq 0}$. Załóżmy, że $\sigma_p(A)$ zawiera spójny i otwarty zbiór $U \subset \mathbb{C}$, na którym istnieje analityczny wybór elementów własnych A, oznaczony przez x_λ i połóżmy $Y = \overline{Span\{x_\lambda, \lambda \in U\}}$. Wówczas*

(i) *jeśli $i\mathbb{R} \cap U \neq \emptyset$, to $(T(t))_{t\geq 0}$ jest chaotyczny w Y,*

(ii) *jeśli $U \subset \overline{\mathbb{C}_\pm}$ oraz $i\mathbb{R} \cap \partial U \neq \emptyset$, to dynamika jest niestabilna w tym sensie, że operator $A \mp \epsilon I$ z dowolnie małym $\epsilon > 0$ generuje układ chaotyczny w Y,*

(iii) *zawsze istnieje $a \in \mathbb{R}$ takie, że $(A + aI)|_Y$ generuje chaotyczny układ dynamiczny w Y,*

(iv) *jeśli $i\mathbb{R} \cap \sigma_p(A) \subset U$, to każdy punkt okresowy $(T(t))_{t\geq 0}$ jest niestabilny w tym sensie, że każde otoczenie punktu okresowego zawiera* *punkty początkowe trajektorii zbieżnych do zera, jak też i trajektorii nieograniczonych.*

Układy dynamiczne, spełniające założenia Twierdzenia 6.1, nazywamy *układami chaotycznymi w podprzestrzeni* bądź, w skrócie, *układami pod-chaotycznymi.* Oczywiście, udowodnienie, że jakiś układ jest pod-chaotyczny jest wynikiem słabszym, niż pokazanie, że jest on chaotyczny, zwłaszcza że w wielu przypadkach nie jesteśmy w stanie podać w sposób jawny przestrzeni chaotyczności Y. Z drugiej jednak strony, z numerycznego punktu widzenia, układy pod-chaotyczne są równie niepożądane, co chaotyczne, gdyż są silnie wrażliwe na zaburzenia danych początkowych należących do przestrzeni chaotyczności. Tak więc, aby zapewnić sobie stabilność obliczeniową nie wystarczy pokazać, że układ nie jest chaotyczny, ale powinno się udowodnić, że nie jest on chaotyczny w żadnej podprzestrzeni czyli, że nie jest on pod-chaotyczny, a jest to znacznie trudniejsze. Częściowym rozwiązaniem tego problemu jest podane poniżej uogólnienie Twierdzenia 4.3.

Jeśli $M \subset X$ i $N \subset X^*$, oznaczmy

$$M^{\perp} = \{f \in X^*;\ < f, x >= 0, \forall x \in M\},$$
$$^{\perp}N = \{x \in X;\ < f, x >= 0, \forall f \in N\}.$$

TWIERDZENIE 6.3. *Załóżmy, że* $(T(t))_{t\geq 0}$ *jest ciągłym układem dynamicznym generowanym przez* A *w przestrzeni Banacha* X, *którego orbita jest gęsta w jakiejś podprzestrzeni* $X_{ch} \subset X$. *Operator sprzężony* A^* *i półgrupa operatorów sprzężonych* $(T^*(t))_{t\geq 0}$ *mają następujące właściwości:*

(i) *jeśli* $0 \neq \mathbf{\Phi} \in X^*$ *jest taki, że orbita* $\{T^*(t)\mathbf{\Phi}\}_{t\geq 0}$ *jest ograniczona, to* $\mathbf{\Phi} \in X_{ch}^{\perp}$;

(ii) *jeśli* $\mathbf{\Phi}$ *jest elementem własnym* A^*, *to* $\mathbf{\Phi} \in X_{ch}^{\perp}$.

Oczywiście, Twierdzenie 4.3 jest przypadkiem szczególnym powyższego wyniku. Stosunkowo łatwa w zastosowaniach jest poniższa obserwacja.

WNIOSEK 6.1. *Niech*

$$E_* = \overline{\bigoplus_{\lambda\in\sigma(A^*)} E_{\lambda}},$$

gdzie E_{λ} *jest przestrzenią własną odpowiadającą wartości własnej* λ. *Wówczas*

$$X_{ch} \subseteq {}^{\perp}E_*.$$

W szczególności, jeśli

$$codim\ {}^{\perp}E_* < +\infty,$$

to nie istnieje podprzestrzeń X, *w której* $(T(t))_{t\geq 0}$ *jest chaotyczna.*

Ostatni warunek wynika z obserwacji, poczynionej we Wstępie, że chaos liniowy jest możliwy tylko w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych.

Przykład 6.1. W Przykładzie 5.5 wykazaliśmy, że przy pewnych założeniach na a, b i c półgrupa generowana przez odpowiednią realizację operatora $au_{xx} + bu_x + cu$ w $L_2([0,\infty))$ jest chaotyczna. Z ogólnej teorii operatorów eliptycznych wynika, że operatorem sprzężonym do $au_{xx} - bu_x + cu$ z tymi samymi warunkami brzegowymi jest operator analizowany w Przykładzie 5.5. Wykazana tam struktura widma tego operatora, w połączeniu z Twierdzeniem 6.3, pozwala stwierdzić, że układ dynamiczny, generowany przez zagadnienie

$$
\begin{aligned}
u_t &= au_{xx} - bu_x + cu, \quad t > 0, x > 0,\\
u(0,t) &= 0, \quad t \geq 0, \\
u(x,0) &= f(x), \quad x > 0,\ f \in X,
\end{aligned} \tag{6.25}
$$

gdzie a, b, c spełniają założenia Przykładu 5.5, nie jest chaotyczny w żadnej podprzestrzeni przestrzeni $L_2([0,\infty))$.

Przykład 6.2. W Przykładzie 5.3 wykazaliśmy, że półgrupy generowane przez pewną klasę układów życia i śmierci są chaotyczne. Niestety, przyjęte założenia nie są zbyt realistyczne, gdyż współczynniki b_n i d_n są związane z ilością mutacji w komórce zawierającej n genów i, w pierwszym przybliżeniu, powinny być proporcjonalne do n.

Nawet w tym najprostszym przypadku macierz współczynników A nie definiuje operatora ograniczonego w żadnej przestrzeni l^p (ani w c_0). Powoduje to szereg trudności, gdyż nie jest *a priori* oczywiste, czy istnieje realizacja A generująca półgrupę, jak zidentyfikować tę realizację (o ile istnieje) i w końcu, czy znaleziona półgrupa jest chaotyczna. Na pierwsze dwa pytania można odpowiedzieć wyczerpująco, przynajmniej w przypadku współczynników rosnących afinicznie wraz z n. Jeśli chodzi natomiast o chaotyczność, to potrafimy tylko wykazać, że półgrupa ta jest pod-chaotyczna w pewnej przestrzeni. Poniższe wyniki pochodzą z [8], [9].

Przyjmijmy następujące założenia o współczynnikach a_n, b_n, d_n.

Założenie AC. Istnieje $N_0 \geq 1$ takie, że

$$
\left.\begin{aligned}
a_n &= an + \alpha, \\
d_{n+1} &= dn + \delta, \\
b_{n-1} &= bn + \beta, \quad n \geq N_0,
\end{aligned}\right\}
$$

gdzie $a = -(b+d)$, b, $d \geq 0$, $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$.

W tym przypadku współczynnik proliferacji jest stały począwszy od N_0 i dany jest wzorem

$$
\gamma = \alpha + \beta + \delta + b - d.
$$

Przypomnijmy, że nieskończoną macierz współczynników układu (5.14) oznaczyliśmy A. Obcinając A do odpowiednich podprzestrzeni l^p możemy zdefiniować wiele różnych operatorów. Bardzo ważną realizacją A jest operator maksymalny, zadany wzorem

$$\mathcal{A}_{max} = A|_{D(\mathcal{A}_{max})},$$

gdzie

$$D(\mathcal{A}_{max}) = \{f \in l^p;\ Af \in l^p\}.$$

TWIERDZENIE 6.4 [9]. *Jeśli założenie* AC *jest spełnione, to $\mathcal{A}_{max}$ jest jedyną realizacją A, która generuje półgrupę klasy C_0 w l^p, $p \in [1, \infty)$.*

To, że generator pokrywa się z operatorem maksymalnym $\mathcal{A}_{max}$, pozwala znaleźć wektory własne generatora, rozwiązując w l^p nieskończony układ równań

$$\begin{aligned} \lambda f_0 &= \qquad\qquad -a_0 f_0 + d_1 f_1, \\ &\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \lambda f_n &= -a_n f_n + b_{n-1} f_{n-1} + d_{n+1} f_{n+1},\ n \geq 1. \end{aligned} \tag{6.27}$$

Dzięki temu możemy udowodnić następujący wynik.

OBSERWACJA 6.2 [8] *Załóżmy, że* AC *jest spełnione, $d > b$ i połóżmy $N_0' := \max\{n \geq 0 : d_n = 0\}$. Dla każdej $\lambda \in \mathbb{C}$ istnieje dokładnie jeden ciąg $f(\lambda) = (f_n(\lambda))_{n \geq 0}$ spełniający (6.27) i warunek początkowy $f_n(\lambda) = 0$ dla $n < N_0'$, $f_{N_0'}(\lambda) = 1$. Co więcej,*

(i) *$f_n(\lambda)$ jest wielomianem zmiennej λ stopnia $n - N_0'$ dla $n \geq N_0'$;*

(ii) *dla każdego $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ $\epsilon > 0$, istnieje $K > 0$ takie, że jeśli $|\lambda - \lambda_0| < \epsilon$ i $n \geq N_0' + 1$, to*

$$|f_n(\lambda)| \leq K n^{-\frac{\alpha+\beta+\delta-Re\lambda}{d-b}}. \tag{6.28}$$

Dowód tego wyniku jest bardzo techniczny i stanowi istotne uogólnienie twierdzeń Poincarégo i Perrona o asymptotyce rozwiązań równań różnicowych, do których (6.27) się sprowadza. Dla naszych celów szczególnie istotną informację niesie (6.28), gdyż pozwala dowieść, że skonstruowane wektory własne są analityczne. Aby wyrazić to ściśle, zdefiniujmy

$$\Pi_p(b, d, \alpha, \beta, \delta) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ Re\lambda < \gamma_p\}, \tag{6.29}$$

gdzie

$$\gamma_p = \alpha + \beta + \delta - \frac{d-b}{p}. \tag{6.30}$$

WNIOSEK 6.2 [8]. *Rozważmy operator $\mathcal{A}_{max}$ w przestrzeni l^p, $1 \leq p < \infty$. Jeśli założenie* AC *jest spełnione i $d > b$, to $\Pi_p(b, d, \alpha, \beta, \delta) \subset \sigma_p(\mathcal{A}_{max})$. Co więcej, dla każdego $\lambda \in \Pi_p(b, d, \alpha, \beta, \delta)$ ciąg $f(\lambda)$, zdefiniowany w Obserwacji 6.2, jest wektorem własnym operatora $\mathcal{A}_{max}$ odpowiadającym wartości własnej λ, zaś funkcja wektorowa $\Pi_p(b, d, \alpha, \beta, \delta) \ni \lambda \to f(\lambda) \in l^p$ jest analityczna.*

Powyższe wyniki pozwalają sformułować główny wynik tego przykładu.

TWIERDZENIE 6.5. *Załóżmy, że* AC *jest spełnione,* $d > b$ *i* $\gamma_p > 0$. *Wówczas układ dynamiczny generowany przez* $\mathcal{A}_{max}$ *jest pod-chaotyczny w każdym* l^p, $p \in [1, \infty)$.

Przegląd wyników dotyczących chaotyczności w układach typu życia i śmierci zakończymy podając pewne warunki gwarantujące, że układ nie jest chaotyczny.

TWIERDZENIE 6.6. *Niech założenie* AC *będzie spełnione. Jeśli zachodzi choć jeden z poniższych warunków:*

(i) $b > d$,

(ii) $d_{m_0} = 0$ *dla pewnego* $m_0 \geq 1$,

to półgrupa generowana przez $\mathcal{A}_{max}$ *nie jest chaotyczna w żadnym* l^p, $p \in [1, \infty)$.

Literatura

[1] J. Banasiak, *Birth-and-death type systems with parameter and chaotic dynamics of some linear kinetic models*, Z. Anal. Anwendungen, **24** (2005), 675–690.

[2] J. Banasiak, *An introduction to chaotic linear systems*, School of Mathematical and Statistical Sciences, University of Natal, Internal Report 3 (2001), http://duck.cs.und.ac.za/ ~banasiak/reports.html.

[3] J. Banasiak, G. Frosali, G. Spiga, *Asymptotic Analysis for a Particle Transport Equation with Inelastic Scattering in Extended Kinetic Theory*, Math. Models Methods Appl. Sci., **8** 5, (1998), 851–874.

[4] J. Banasiak and M. Lachowicz, *Chaos for a class of linear kinetic models*, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, **329**, sér. II b, (2001), 439–444.

[5] J. Banasiak and M. Lachowicz, *Topological chaos for birth-and-death-type models with proliferation*, Math. Models Methods Appl. Sci., **12** (2002), 755–775.

[6] J. Banasiak, M. Lachowicz, M. Moszyński, *Topological Chaos: When Topology Meets Medicine*, Appl. Math. Lett., **16** (2003), 303–308.

[7] J. Banasiak, M. Moszyński, *A generalization of Desch-Schappacher-Webb criteria for chaos*, Discrete Contin. Dyn. Syst. -A, **12**, (2005), 959–972.

[8] J. Banasiak, M. Lachowicz, M. Moszyński, *Chaotic behavior of semigroups related to the process of gene amplification–deamplification with cells' proliferation*, Math. Biosci., **199** (2006) (przyjęta do druku), również dostępna jako: Technical report of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics 145/2004, http://www.mimuw.edu.pl/english/research/reports/imsm/).

[9] J. Banasiak, M. Lachowicz, M. Moszyński, *Semigroups for generalized birth-and-death equations in l^p spaces*, złożona do druku, (również dostępna jako: Technical report of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics 149/2005, http://www.mimuw.edu.pl/english/research/reports/imsm/).

[10] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey, *On Devaney's definition of chaos*, Amer. Math. Monthly, **99** (1992), 332–334.

[11] R. deLaubenfels, H. Emamirad, *Chaos for functions of discrete and continuous weighted shift operators*, Ergod. Th. & Dynam. Systems, **21** (2001), 1411–1427.

[12] W. Desch, W. Schappacher, G. F. Webb, *Hypercyclic and chaotic semigroups of linear operators*, Ergod. Th. & Dynam. Systems, **17** (1997), 793–819.

[13] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2nd edn., Addison-Wesley, NY, 1989.

[14] J.-P. Eckmann, D. Ruelle, *Ergodic theory of chaos and strange attractors*, Rev. Modern Phys., **57** (1985), 617–656.

[15] G. Godefroy, J. H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic manifolds*, J. Funct. Anal., **98** (1991), 229–269.

[16] J. A. Goldstein, *Semigroups of Linear Operators and Applications*, Oxford University Press, New York, 1985.

[17] D. A. Herrero, *Hypercyclic operators and chaos*, J. Operator Theory, **28** (1992), 93–103.

[18] D. A. Hill, *Chaotic chaos*, Math. Intelligencer, **22** (2000), 5.

[19] E. Hille, R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-groups*, Colloquium Publications, v. 31, American Mathematical Society, Providence, 1957.

[20] M. Kimmel, A. Świerniak and A. Polański, *Infinite-dimensional model of evolution of drug resistance of cancer cells*, J. Math. Systems Estimation Control, **8** (1998), 1–16.

[21] A. Lasota, M. C. Mackey, *Chaos, Fractals and Noise, Stochastics Aspects of Dynamics*, Springer Verlag, New York, 1995.

[22] E. N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmosph. Sci., **20** (1963), 130–141.

[23] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer Verlag, New York, 1983.

[24] V. Protopopescu, Y. Y. Azmy, *Topological chaos for a class of linear models*, Math. Models Methods Appl. Sci., **2** (1992), 79–90.

[25] R. Rudnicki, *Invariant measures for the flow of a first-order partial differential equation*, Ergod. Th. & Dynam. Systems, **5** (1985), 437–443.

[26] R. Rudnicki, *Strong ergodic properties of a first-order partial differential equation*, J. Math. Anal. Appl., **133** (1988), 14–26.

[27] R. Rudnicki, *Chaos for some infinite-dimensional dynamical systems*, Math. Meth. Appl. Sci., **27** (2004), 723–736.

[28] D. Ruelle, F. Takens, *On the nature of turbulence*, Comm. Math. Phys., **20** (1973), 167–192.

[29] W. Tucker, *The Lorenz attractor exists*, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, **328**, sér. I (1999), 1197–1202.

[30] M. Viana, *What's New on Lorenz Strange Attractors?*, Math. Intelligencer, **22** (2000), 6–19.

[31] G. F. Webb, *Periodic and chaotic behavior in structured models of cell population dynamics*, in: A. C. McBride, G. F. Roach (Eds.) Recent developments in evolution equations, Pitman Research Notes in Mathematics 134, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1995, 40–49.

School of Mathematical and Statistical Sciences,
University of Natal, Durban 4041, SOUTH AFRICA
i
Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej
al. Politechniki 11, 90-924 Łódź, POLSKA