



## Ocena stateczności konstrukcji ram stalowych według Eurokodu 3

SYLWIA POGONOWSKA-PŁATEK, WOJCIECH DORNOWSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Inżynierii Lądowej i Geodezji,  
Katedra Budownictwa Ogólnego i Infrastruktury Wojskowej,  
ul. gen. S. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa, wojciech.dornowski@wat.edu.pl,  
sylwia.pogonowska@wat.edu.pl,

**Streszczenie.** Praca zawiera jakościowe i ilościowe porównanie proponowanych w EC3 metod oceny stateczności konstrukcji ram. Podstawę stanowi stalowa rama portalowa poddana zróżnicowanemu obciążeniu. Uwzględniono imperfekcję globalną (przechyłową) oraz imperfekcje lokalne w słupach ramy. Przeprowadzono ocenę wrażliwości konstrukcji na efekty II rzędu. Obciążenie krytyczne ramy wyznaczono dla symetrycznej i antysymetrycznej postaci wyboczenia. Efekty II rzędu uwzględniono, wykorzystując metodę elementów skończonych.

**Słowa kluczowe:** efekty II rzędu, rama stalowa, stateczność, obciążenie krytyczne

**DOI:** 10.5604/01.3001.0013.3008

### 1. Wstęp

Inspiracją przedstawionej analizy jest pewna propozycja oceny stateczności ram stalowych zawarta w Eurokodzie 3 [2]. Propozycja ta ma charakter alternatywny i dotyczy sposobu uwzględniania efektów drugiego rzędu oraz imperfekcji [4, 5]. W rozdziale 5.2.5 EN 1993-1-1 zapisano, że zależnie od typu ramy i rodzaju analizy globalnej, imperfekcje i efekty drugiego rzędu uwzględnia się na trzy sposoby:

- wyłącznie za pomocą analizy globalnej,
- częściowo za pomocą analizy globalnej i częściowo poprzez indywidualne sprawdzenie stateczności elementów wg EN 1993-1-1/p. 6.3
- lub też, w przypadkach elementarnych, wyłącznie poprzez indywidualne sprawdzenie stateczności elementów wg EN 1993-1-1/p. 6.3, przyjmując długości wyboczeniowe ustalone dla globalnej formy utraty stateczności.

Rozwinięcie tej propozycji znajduje się w tym samym rozdziale EN 1993-1-1 i przyjmuje następujące brzmienie:

- Jeśli efekty drugiego rzędu i odpowiednie imperfekcje w poszczególnych elementach zostały całkowicie uwzględnione w globalnej analizie konstrukcji, to indywidualne sprawdzanie stateczności elementów wg EN 1993-1-1/p. 6.3 nie jest konieczne.
- Jeśli efekty drugiego rzędu lub pewne imperfekcje (np. imperfekcje miarodajne przy wyboczeniu lub zwichrzeniu) nie zostały całkowicie uwzględnione w analizie globalnej, to mają zastosowanie odpowiednie kryteria podane w EN 1993-1-1/p. 6.3. Sprawdzając te kryteria, przyjmuje się momenty i siły z analizy globalnej konstrukcji wyznaczone z uwzględnieniem ewentualnych globalnych efektów drugiego rzędu i globalnych imperfekcji. Jednocześnie można przyjmować długość wyboczeniową elementu równą jego długości teoretycznej.
- Jeśli ocenę stateczności ramy sprowadza się do kryterium stateczności słupa wg EN 1993-1-1/p. 6.3, to długość wyboczeniowa słupa powinna odpowiadać globalnej postaci wyboczenia i uwzględniać wpływ sztywności elementów i węzłów, obecność przegubów plastycznych oraz sił ściskających pod obciążeniem obliczeniowym. W takim przypadku przy sprawdzaniu warunku nośności przyjmuje się siły wewnętrzne obliczone według teorii pierwszego rzędu z pominięciem imperfekcji.

Z wyżej wymienionych propozycji szczególnie interesująca wydaje się ta pierwsza, ponieważ prowadzi do znacznego zmniejszenia liczby obliczeń na etapie wymiarowania. Uwzględniając efekty II rzędu oraz imperfekcje na etapie obliczeń statycznych, wymiarowanie można ograniczyć do sprawdzenia nośności przekrojów najbardziej wyężonych. Z propozycji drugiej można korzystać w przypadkach utrudnionej oceny długości wyboczeniowych elementów ściskanych. Trzecia propozycja to podejście na ogół stosowane w projektowaniu konstrukcji stalowych.

Celem pracy jest jakościowe i ilościowe porównanie proponowanych w EC3 metod oceny stateczności konstrukcji ram. Podstawę stanowi stalowa rama portalowa poddana zróżnicowanemu obciążeniu. W rozdziale 2 artykułu przedstawiono sposoby określania imperfekcji w rozważanej ramie. Uwzględniono imperfekcję globalną (przechyłową) oraz imperfekcje lokalne w słupach ramy. Ocenę wrażliwości konstrukcji na efekty II rzędu zawiera rozdział 3. Obciążenie krytyczne ramy wyznaczono dla symetrycznej i antysymetrycznej postaci wyboczenia. W rozdziale 4 przeprowadzono wymiarowanie wybranego słupa ramy na podstawie sił wewnętrznych wynikających z analizy I rzędu. Uproszczoną w sensie EN 1993-1-1 analizę II rzędu przedstawiono w rozdziale 5. Rezultaty wynikające z dokładnej analizy II rzędu zawiera rozdział 6. Omówienie otrzymanych wyników oraz wnioski końcowe przedstawiono w rozdziale 7.

## 2. Imperfekcje

Przedmiotem rozważań jest rama przedstawiona na rysunku 2.1. Założono, że węzły ramy zaprojektowano jako sztywne. Przyjęto przekroje: IHEB 300 — słupy, IPE 500 — rygle, ze stali S355. Wpływ deformacji z płaszczyzny ramy pominięto (zadanie płaskie). Cechy geometryczne przyjętych przekrojów zamieszczono w tabeli 2.1.

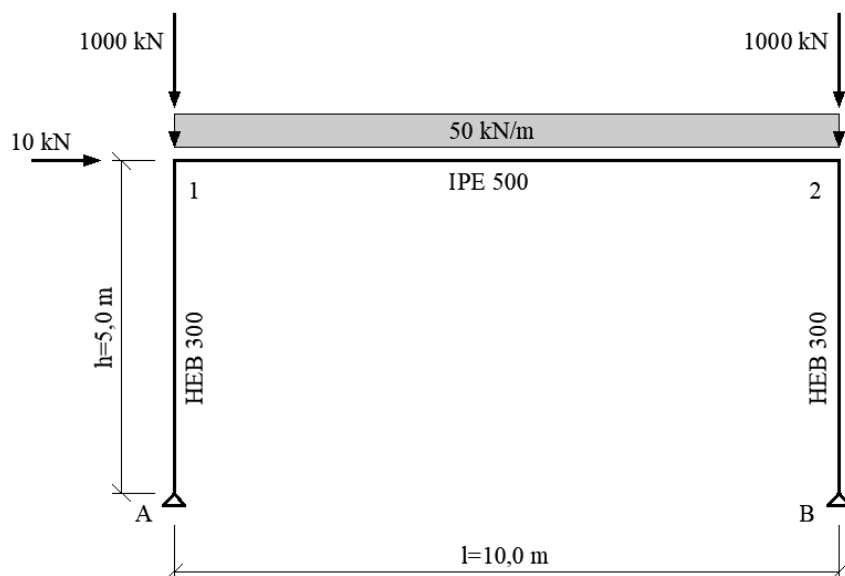
TABELA 2.1

Cechy geometryczne przyjętych przekrojów

Prze- krój	Wymiary					Pole prze- kroju $A$	Moment bezwładności				Wskaźnik wytrzymałości			
	$h$	$b_f$	$t_w$	$t_f$	$r$		$I_y$	$I_z$	$I_T$	$I_w$	$W_{el,y}$	$W_{el,z}$	$W_{pl,y}$	$W_{pl,z}$
	mm					cm <sup>2</sup>	cm <sup>4</sup>			cm <sup>6</sup>	cm <sup>3</sup>			
HEB 300	300	300	11,0	19,0	27	149	25170	8560	186	1688×10 <sup>3</sup>	1680	571	1869	870
IPE 500	500	200	10,2	16,0	21	116	48200	2140	91,9	1249×10 <sup>3</sup>	1930	214	2194	336

Współczynniki częściowe (EN 1993-1-1/ p. 6.1) odpowiednio przyjmują wartości:

- przy ocenie nośności przekroju poprzecznego, niezależnie od klasy,  $\gamma_{M0} = 1,0$ ,
- przy ocenie stateczności elementów,  $\gamma_{M1} = 1,0$ .



Rys. 2.1. Schemat statyczny ramy i obciążenia zewnętrzne

Nominalna wartość granicy plastyczności dla stali S355 przy  $t \leq 40$  mm wynosi  $f_y = 355$  MPa (EN 1993-1-1/ tab. 3.1). Moduły sprężystości podłużnej  $E = 210$  GPa i poprzecznej  $G = 81$  GPa odczytano na podstawie p. 3.2.6 w EN 1993-1-1.

Dla ramy przechyłowej określa się tzw. wstępną imperfekcję przechyłową, którą można zastąpić równoważnymi siłami poziomymi (EN 1993-1-1/p. 5.3.2). Imperfekcja ta zależy między innymi od liczby słupów przenoszących obciążenie nie mniejsze niż połowa obciążenia przeciętnego. Siły w słupach mają wartości:

$$\begin{aligned} N_{Ed,A1} &= 1000 + 0,5 \cdot 50 \cdot 10 - 10 \cdot 5/10 = 1245 \text{ kN}, \\ N_{Ed,B2} &= 1000 + 0,5 \cdot 50 \cdot 10 + 10 \cdot 6/10 = 1255 \text{ kN}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Średnie obciążenie słupa

$$\bar{N}_{Ed} = (1245 + 1255)/2 = 1250 \text{ kN}. \quad (2.2)$$

Zatem wszystkie słupy przenoszą obciążenie nie mniejsze niż  $0,5 \bar{N}_{Ed} = 0,5 \cdot 1250 = 625$  kN, wówczas  $m = 2$ . Współczynnik redukcyjny ze względu na liczbę słupów:

$$\alpha_m = \sqrt{0,5 \left(1 + \frac{1}{m}\right)} = \sqrt{0,5 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)} = 0,866. \quad (2.3)$$

Współczynnik redukcyjny ze względu na wysokość konstrukcji:

$$\alpha_h = \frac{2}{\sqrt{h}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,894. \quad (2.4)$$

Wartość podstawowa imperfekcji:  $\phi_0 = \frac{1}{200}$ .  
Imperfekcja globalna:

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 \alpha_h \alpha_m = \frac{1}{200} \cdot 0,894 \cdot 0,866 = 0,00387, \\ \Delta &= \phi h = 0,00387 \cdot 500 = 1,94 \text{ cm}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Siła zastępcza wraz z reakcjami podporowymi (rys. 2.2a)

$$\begin{aligned} H_{eq} &= \phi N_{Ed,max} = 0,00387 \cdot (2 \cdot 1000 + 50 \cdot 10) = 9,68 \text{ kN}, \\ H_{\Delta,global} &= H_{B,global} = -H_{eq} / 2 = -9,68 / 2 = -4,84 \text{ kN}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Lokalna wstępna imperfekcja łukowa słupów zależy od krzywej wyboczeniowej (EN 1993-1-1/tab. 6.2). Dla dwuteownika walcowanego HEB 300 o charakterystyce

geometrycznej  $h/b < 1,2$  i  $t_f < 100$  mm oraz przy wyboczeniu względem osi  $y-y$  należy wybrać krzywą wyboczeniową „b”. Wstępna imperfekcja łukowa, EN 1993-1-1/tab. 5.1:

$$e_0 = h/250 = 500/250 = 2,0 \text{ cm.} \quad (2.7)$$

Odpowiadają jej następujące poprzeczne obciążenia słupów (rys. 2.2b):

$$q_{eq,A1} = \frac{8N_{Ed,A1}e_0}{h^2} = \frac{8 \cdot 1245 \cdot 0,02}{5^2} = 7,97 \text{ kN/m,} \quad (2.8)$$

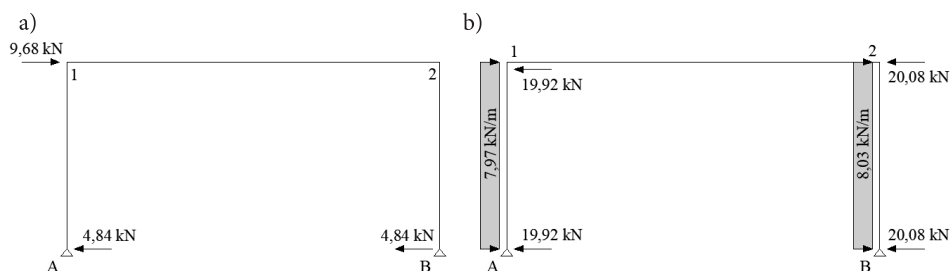
$$q_{eq,B2} = \frac{8N_{Ed,B2}e_0}{h^2} = \frac{8 \cdot 1255 \cdot 0,02}{5^2} = 8,03 \text{ kN/m.}$$

Obciążenia te należy zrównoważyć siłami węzłowymi (rys. 2.2b):

$$H_{A,local} = H_{1,local} = -q_{eq,A1}h/2 = -7,97 \cdot 5/2 = -19,92 \text{ kN,} \quad (2.9)$$

$$H_{B,local} = H_{2,local} = -q_{eq,B2}h/2 = -8,03 \cdot 5/2 = -20,08 \text{ kN}$$

W obliczeniach statycznych imperfekcje uwzględniono przez dodatkowe obciążenie rami wyznaczonymi wyżej obciążeniami poziomymi.



Rys. 2.2. Obciążenia równoważne dla imperfekcji: a) globalnej, b) lokalnych

### 3. Ocena wrażliwości konstrukcji na efekty II rzędu

Ocenę wrażliwości ramy na efekty II rzędu przeprowadzimy sposobem uproszczonym, przedstawionym w EN 1993-1-1/p. 5.2.1. Przemieszczenie poziome ryglu wywołane wszystkimi obciążeniami, także tym od imperfekcji globalnej (program MES Robot):

$$\delta_{H,Ed} = 1,2 \text{ cm.} \quad (3.1)$$

Sumaryczne obliczeniowe obciążenie pionowe:

$$V_{Ed} = 2 \cdot 1000 + 50 \cdot 10,0 = 2500 \text{ kN.} \quad (3.2)$$

Sumaryczne obciążenie poziome (PN-EN 1993-1-1:2005/p.5.2.1(4)B/N9):

$$H_{Ed} = 10,0 + 9,68 = 19,68 \text{ kN.} \quad (3.3)$$

Współczynnik wrażliwości na efekty II rzędu:

$$\alpha_{cr} = \frac{H_{Ed}}{V_{Ed}} \cdot \frac{h}{\delta_{H,Ed}} = \frac{19,68}{2500} \cdot \frac{500}{1,2} = 3,28 < 10.. \quad (3.4)$$

Zatem zgodnie z PN-EN 1993-1-1/p. 5.2.1(3) należy uwzględnić w analizie efekty drugiego rzędu.

Do wyznaczenia postaci wybożenia ramy i stowarzyszonych z nimi wartości krytycznych obciążenia wykorzystamy metodę przemieszczeń, w której uwzględniono wpływ sił podłużnych na pozostałe wielkości statyczne i kinematyczne [6, 7].

Rozpatrzmy symetryczną i antysymetryczną formę wybożenia (rys. 3.1) [1]. Przy wybożeniu symetrycznym jedyną niewiadomą jest obrót węzła 1 (rys. 3.1b). Warunek równowagi tego węzła prowadzi do równania

$$[\kappa\alpha(\lambda) + 2]\varphi_1 = 0, \quad (3.5)$$

gdzie:  $\lambda = \sqrt{\frac{Nh^2}{EJ_s}}$ ,  $\kappa = \frac{I_s I}{I_r h} = \frac{25170 \cdot 10,0}{48200 \cdot 5,0} = 1,044$ ,  $\alpha(\lambda) = \lambda^2 \frac{\sin \lambda}{\sin \lambda - \lambda \cos \lambda}$ .

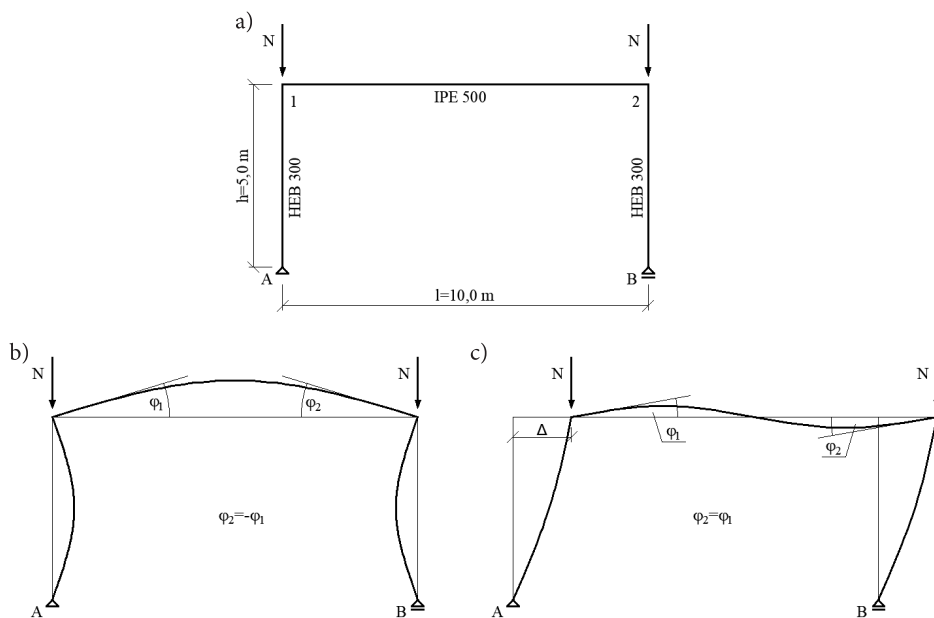
Kąt  $\varphi_1$  może osiągać wartość różną od zera, jeżeli

$$\alpha(\lambda) = -\frac{2}{\kappa}. \quad (3.6)$$

Najmniejszy pierwiastek tego równania przyjmuje wartość  $\lambda = 3,577$ . Siła krytyczna:

$$N_{cr} = \frac{\lambda^2 EI_s}{h^2} = \frac{3,577^2 \cdot 21000 \cdot 25170}{500^2} = 27052 \text{ kN.} \quad (3.7)$$

Długość wybocheniowa słupa ramy  $h_{cr} = (\pi/\lambda)h = 0,878h$ .



Rys. 3.1. Rama portalowa: a) przyjęte obciążenie, b) symetryczna postać wybochenia, c) antysymetryczna postać wybochenia

W przypadku antysymetrycznej postaci wybochenia (rys. 3.1c) układ równań metody przemieszczeń przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} [\kappa\alpha(\lambda) + 6]\varphi_1 - \kappa\alpha(\lambda)\Delta/h &= 0 \\ \alpha(\lambda)\varphi_1 - \beta(\lambda)\Delta/h &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

gdzie:  $\beta(\lambda) = \lambda^3 \frac{\cos \lambda}{\sin \lambda - \lambda \cos \lambda}$ .

Przyrównując wyznacznik główny tego równania do zera, otrzymujemy:

$$\kappa\alpha(\lambda)[\alpha(\lambda) - \beta(\lambda)] - 6\beta(\lambda) = 0. \quad (3.9)$$

Najmniejszy pierwiastek tego równania przyjmuje wartość  $\lambda = 1,341$ . Siła krytyczna:

$$N_{cr} = \frac{\lambda^2 EI_s}{h^2} = \frac{1,341^2 \cdot 21000 \cdot 25170}{500^2} = 3802 \text{ kN}. \quad (3.10)$$

Długość wyboczeniowa słupa ramy  $h_{cr} = (\pi/\lambda)h = 2,343h$ . Z porównania wartości sił krytycznych wynika, że wcześniej zrealizuje się antysymetryczna postać wyboczenia. Współczynnik wrażliwości na efekty II rzędu dla tej postaci wyboczenia ma wartość

$$\alpha_{cr} = \frac{F_{cr}}{F_{Ed}} = \frac{2 \cdot 3802}{2 \cdot 1000 + 50 \cdot 10} = 3,04. \quad (3.11)$$

Wynik ten potwierdza wniosek uzyskany metodą uproszczoną.

#### 4. Wymiarowanie na podstawie sił wewnętrznych wynikających z analizy I rzędu

W najbardziej wyężonym przekroju słupa B-2 siły wewnętrzne wynikające z analizy I rzędu bez uwzględnienia imperfekcji przyjmują wartości:

$$M_{Ed} = 279,04 \text{ kNm}, V_{Ed} = 55,81 \text{ kN}, N_{Ed} = 1255 \text{ kN}. \quad (4.1)$$

#### Klasyfikacja przekroju (na podstawie tablicy 5.2 w EN 1993-1-1)

Określając klasę środnika, przyjęto najbardziej niekorzystny rozkład naprężeń — jak dla osiowego ściskania. Parametr mechaniczny dla stali S355 przy nominalnej wartości granicy plastyczności  $f_y = 355 \text{ MPa}$  ( $t \leq 40 \text{ mm}$ ) przyjmuje wartość:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}} = \sqrt{\frac{235}{355}} = 0,81. \quad (4.2)$$



Szerokość miarodajna środника:

$$c_w = h - 2(t_f + r) = 300 - 2 \cdot (19 + 27) = 208 \text{ mm.} \quad (4.3)$$

Smukłość geometryczna środnika:

$$\lambda_w = c_w / t_w = 208 / 11 = 18,9 < 33\varepsilon = 33 \cdot 0,81 = 26,7, \text{ klasa 1.} \quad (4.4)$$

Szerokość miarodajna stopki:

$$c_f = 0,5(b_f - t_w) - r = 0,5 \cdot (300 - 11) - 27 = 117,5 \text{ mm.} \quad (4.5)$$

Smukłość geometryczna stopki:

$$\lambda_f = c_f / t_f = 117,5 / 19 = 6,2 < 9\varepsilon = 9 \cdot 0,81 = 7,29, \text{ klasa 1.} \quad (4.6)$$

Przekrój słupa należy do klasy 1, jest zatem niewrażliwy na utratę stateczności miejscowej i ma pewną rezerwę plastycznej nośności.

### Nośność przekroju z uwagi na ściskanie

Obliczeniową nośność przekroju ze względu na ściskanie oblicza się wg wzoru (EN 1993-1-1/ p. 6.2.4):

$$N_{c,Rd} = Af_y / \gamma_{M0} = 149,0 \cdot 35,5 / 1,0 = 5290 \text{ kN,} \quad (4.7)$$

$$N_{Ed} / N_{c,Rd} = 1255 / 5290 = 0,24 < 1,0.$$

### Nośność przekroju z uwagi na zginanie

Nośność przekroju sprężystą (bez uwzględnienia rezerwy plastycznej) i plastyczną (z uwzględnieniem rezerwy plastycznej) oblicza się wg wzorów (EN 1993-1-1/ p. 6.2.5):

$$M_{el,y,Rd} = W_{el,y} f_y / \gamma_{M0} = 1680 \cdot 35,5 / 1,0 = 59640 \text{ kNcm} = 596,0 \text{ kNm,}$$

$$M_{pl,y,Rd} = W_{pl,y} f_y / \gamma_{M0} = 1869 \cdot 35,5 / 1,0 = 66350 \text{ kNcm} = 664,0 \text{ kNm,}$$

(4.8)

$$M_{Ed} / M_{el,y,Rd} = 279,04 / 596,0 = 0,47 < 1,0,$$

$$M_{Ed} / M_{pl,y,Rd} = 279,04 / 664,0 = 0,42 < 1,0.$$

**Obliczeniowa nośność przekroju ścinanego (EN 1993-1-1/ p. 6.2.6)**

Wysokość środka w świetle pasów:

$$h_w = 30,0 - 2 \cdot 1,9 = 26,2 \text{ cm.} \quad (4.9)$$

Pole przekroju czynnego przy ścinaniu ( $\eta = 1,0$ ):

$$A_v = A - 2bt_f + (t_w + 2r)t_f = 149,0 - 2 \cdot 30,0 \cdot 1,9 + (1,1 + 2 \cdot 2,7) \cdot 1,9 = 47,4 \text{ cm}^2, \quad (4.10)$$

$$A_v = 47,4 \text{ cm}^2 > \eta h_w t_w = 1,0 \cdot 26,2 \cdot 1,1 = 28,8 \text{ cm}^2.$$

Nośność przekroju przy ścinaniu:

$$V_{pl,Rd} = \frac{A_v f_y / \sqrt{3}}{\gamma_{M0}} = \frac{47,4 \cdot 35,5 / \sqrt{3}}{1,0} = 972 \text{ kN}, \quad (4.11)$$

$$V_{Ed} / V_{pl,Rd} = 55,81 / 972 = 0,06 < 0,5.$$

Warunek stateczności środka nieuźbrowanego ma postać:

$$h_w / t_w = 26,2 / 1,1 = 23,8 < 72\varepsilon / \eta = 72 \cdot 0,81 / 1,0 = 58,6. \quad (4.12)$$

Zatem nie ma potrzeby uwzględniania wpływu niestateczności miejscowej z uwagi na ścinanie. Pominiemy także wpływ siły poprzecznej na nośność przy zginaniu.

**Nośności przekroju przy jednoczesnym działaniu momentu zginającego siły podłużnej**

Dla sprężystego zakresu odkształceń warunek nośności ma postać:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{c,Rd}} + \frac{M_{Ed}}{M_{el,y,Rd}} = \frac{1255}{5290} + \frac{279,04}{596} = 0,71 < 1,0. \quad (4.13)$$

Jeżeli wartość obliczeniowa siły podłużnej przekracza przynajmniej jedną z poniżej wyliczonych wartości, to można wykorzystać rezerwę plastycznej nośności przekroju przy jednoczesnym działaniu momentu zginającego i siły podłużnej (EN 1993-1-1/ p. 6.2.9.1):

$$N_{Ed,B} = 1255 \text{ kN} < 0,25N_{pl,Rd} = 0,25 \cdot 5290 = 1323 \text{ kN}, \quad (4.14)$$

$$N_{Ed,B} = 1255 \text{ kN} > 0,5h_w t_w f_y / \gamma_{M0} = 0,5 \cdot 26,2 \cdot 1,1 \cdot 35,5 / 1,0 = 512 \text{ kN}.$$

Parametry krzywej granicznej:

$$a = (A - 2b_f t_f) / A = (149 - 2 \cdot 30,0 \cdot 1,9) / 149 = 0,235 < 0,5, \quad (4.15)$$

$$\xi = 1 - 0,5a = 1 - 0,5 \cdot 0,235 = 0,883.$$

Warunek nośności

$$\frac{N_{Ed}}{N_{c,Rd}} + \xi \frac{M_{Ed}}{M_{pl,y,Rd}} = \frac{1255}{5290} + 0,883 \cdot \frac{279,04}{664} = 0,61 < 1,0. \quad (4.16)$$

Warunek ten jest spełniony.

### Nośność na wyboczenie

Założymy, że słup jest zabezpieczony przed wyboczeniem z płaszczyzny ramy,  $\chi_z = 1,0$ . Długość wyboczeniowa dla antysymetrycznej postaci wyboczenia  $L_{cr,y} = 2,343 \cdot 5,0 = 11,72$  m, siła krytyczna w sensie Eulera  $N_{cr,y} = 3802$  kN. Smukłość względna (EN 1993-1-1/ p. 6.3)

$$\bar{\lambda}_y = \sqrt{\frac{A f_y}{N_{cr,y}}} = \sqrt{\frac{149,0 \cdot 35,5}{3802}} = 1,18. \quad (4.17)$$

Krzywa wyboczeniowa „b” z parametrem imperfekcji  $\alpha = 0,34$ ; dwuteownik walcowany o charakterystyce  $h/b < 1,2$  i  $t_f < 100$  mm oraz wyboczenie względem osi  $y$ - $y$ .

Funkcja imperfekcji

$$\Phi_y = 0,5[1 + \alpha(\bar{\lambda}_y - 0,2) + \bar{\lambda}_y^2] = 0,5 \cdot [1 + 0,34 \cdot (1,18 - 0,2) + 1,18^2] = 1,36. \quad (4.18)$$

Współczynnik wyboczeniowy

$$\chi_y = \frac{1}{\Phi_y + \sqrt{\Phi_y^2 - \bar{\lambda}_y^2}} = \frac{1}{1,36 + \sqrt{1,36^2 - 1,18^2}} = 0,491. \quad (4.19)$$

Nośność obliczeniowa słupa

$$N_{b,y,Rd} = \chi_y A f_y / \gamma_{M1} = 0,491 \cdot 149,0 \cdot 35,5 / 1,0 = 2597 \text{ kN}. \quad (4.20)$$

Warunek nośności

$$N_{Ed} / N_{b,y,Rd} = 1255 / 2597 = 0,48 < 1,0. \quad (4.21)$$

Warunek nośności został spełniony.

## Warunki interakcyjne

Według Eurokodu EN 1993-1-1, w przypadku jednoczesnego występowania momentu zginającego i ściskającej siły podłużnej należy sprawdzać tzw. formuły interakcyjne. Współczynniki interakcji wyznacza się za pomocą jednej z dwóch alternatywnych metod (EN 1993-1-1), metoda 1 według załącznika A jest ogólna, przez co bardziej złożona i dokładniejsza, natomiast metoda 2 według załącznika B jest uproszczona, [3]. Z uwagi na potrzebną dokładność analizy porównawczej wykorzystano metodę 1. W przypadku zadania płaskiego formuły te redukują się do jednego warunku nośności:

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rk} / \gamma_{M1}} \leq 1,0. \quad (4.22)$$

Odpowiednie nośności wynoszą:

$$\begin{aligned} N_{Rk} &= Af_y = 149,0 \cdot 35,5 = 5290 \text{ kN}, \\ M_{el,y,Rk} &= W_{el,y} f_y = 1680 \cdot 35,5 = 59640 \text{ kNcm} = 596,0 \text{ kNm}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Współczynnik równoważnego, stałego momentu,  $\Psi_y = 0,0/279,04 = 0,0$  (EN 1993-1-1/tab. A.2):

$$C_{my} = 0,79 - 0,12 \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}} = 0,79 - 0,12 \cdot \frac{1255}{3802} = 0,75. \quad (4.24)$$

Dla sprężystego zakresu odkształceń współczynnik interakcyjny wyraża się wzorem

$$k_{yy} = \frac{C_{my}}{1 - \chi_y N_{Ed} / N_{cr,y}} = \frac{0,75}{1 - 0,491 \cdot 1255 / 3802} = 0,895. \quad (4.25)$$

Warunek nośności

$$\begin{aligned} &\frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed}}{M_{el,y,Rk} / \gamma_{M1}} = \\ &= \frac{1255}{0,491 \cdot 5290 / 1,0} + 0,895 \cdot \frac{279,04}{596 / 1,0} = 0,90 < 1,0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Wykorzystamy jeszcze plastyczną rezerwę nośności przekroju. Nośność przekroju uplastycznionego

$$M_{pl,y,Rk} = W_{pl,y} f_y = 1869 \cdot 35,5 = 66350 \text{ kNcm} = 664,0 \text{ kNm}. \quad (4.27)$$

Współczynniki określające stopień uplastycznienia przekroju:

$$w_y = W_{pl,y}/W_{el,y} = 1869/1680 = 1,11, \quad n_{pl} = \frac{N_{Ed}}{N_{Rk} / \gamma_{M1}} = \frac{1255}{5290 / 1,0} = 0,237. \quad (4.28)$$

Współczynnik  $C_{yy}$ :

$$\begin{aligned} C_{yy} &= 1 + (w_y - 1) \left[ 2 - \frac{1,6}{w_y} C_{my}^2 (\bar{\lambda}_y + \bar{\lambda}_y^2) \right] n_{pl} = \\ &= 1 + (1,11 - 1) \cdot \left[ 2 - \frac{1,6}{1,11} \cdot 0,75^2 (1,18 + 1,18^2) \right] \cdot 0,237 = \\ &= 0,998 > \frac{W_{el,y}}{W_{pl,y}} = \frac{1680}{1869} = 0,899. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Współczynnik interakcji

$$k_{yy} = \frac{C_{my}}{(1 - \chi_y N_{Ed} / N_{cr,y}) C_{yy}} = \frac{0,75}{(1 - 0,491 \cdot 1255 / 3802) \cdot 0,998} = 0,897 \quad (4.30)$$

Formuła interakcyjna:

$$\begin{aligned} &\frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed}}{M_{pl,y,Rk} / \gamma_{M1}} = \\ &= \frac{1255}{0,491 \cdot 5290 / 1,0} + 0,897 \cdot \frac{279,04}{664 / 1,0} = 0,86 < 1,0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Warunek interakcyjny jest spełniony.

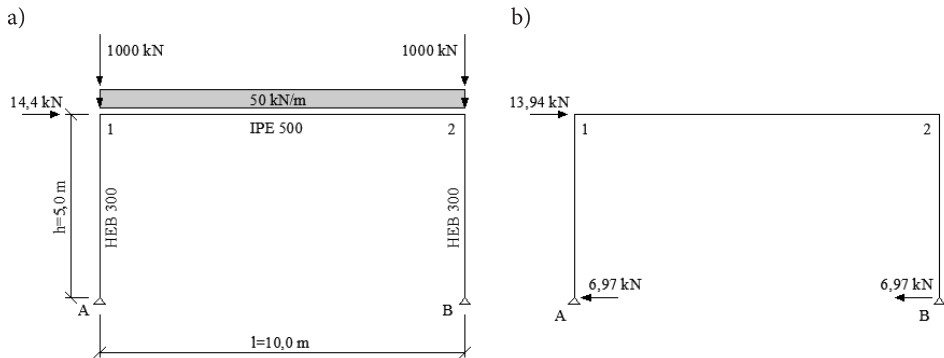
## 5. Uproszczona analiza II rzędu

Przechyłowe efekty II rzędu uwzględnimy zwiększając zewnętrzne obciążenie poziome, także to od imperfekcji globalnej, za pomocą współczynnika amplifikacji

$$\alpha_{amp} = \frac{1}{1 - 1 / \alpha_{cr}} = \frac{1}{1 - 1 / 3,28} = 1,44 \quad (5.1)$$

Zmodyfikowany w ten sposób układ obciążeń przedstawiono na rysunku 5.1. W najbardziej wyężonym przekroju słupa B-2 siły wewnętrzne przyjmują wartości:

$$M_{Ed} = 324,9 \text{ kNm}, \quad V_{Ed} = 64,97 \text{ kN}, \quad N_{Ed} = 1264,2 \text{ kN}. \quad (5.2)$$



Rys. 5.1. Zmodyfikowane ze względu na przechyłowe efekty II rzędu obciążenia: a) zewnętrzne, b) równoważne dla imperfekcji globalnej

### Nośności przekroju przy jednoczesnym działaniu momentu zginającego siły podłużnej

Dla sprężystego zakresu odkształceń warunek nośności ma postać:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{c,Rd}} + \frac{M_{Ed}}{M_{el,y,Rd}} = \frac{1264,2}{5290} + \frac{324,9}{596} = 0,78 < 1,0. \quad (5.3)$$

Jeżeli wartość obliczeniowa siły podłużnej przekracza przynajmniej jedną z poniżej wyliczonych wartości, to można wykorzystać rezerwę plastycznej nośności przekroju przy jednoczesnym działaniu momentu zginającego i siły podłużnej (EN 1993-1-1/ p. 6.2.9.1):

$$N_{Ed,B} = 1264,2 \text{ kN} < 0,25N_{pl,Rd} = 0,25 \cdot 5290 = 1323 \text{ kN}, \quad (5.4)$$

$$N_{Ed,B} = 1264,2 \text{ kN} > 0,5h_w t_w f_y / \gamma_{M0} = 0,5 \cdot 26,2 \cdot 1,1 \cdot 35,5 / 1,0 = 512 \text{ kN}.$$

Parametry krzywej granicznej:

$$a = (A - 2b_f t_f) / A = (149 - 2 \cdot 30,0 \cdot 1,9) / 149 = 0,235 < 0,5, \quad (5.5)$$

$$\xi = 1 - 0,5a = 1 - 0,5 \cdot 0,235 = 0,883.$$

Warunek nośności

$$\frac{N_{Ed}}{N_{c,Rd}} + \xi \frac{M_{Ed}}{M_{pl,y,Rd}} = \frac{1264,2}{5290} + 0,883 \cdot \frac{324,9}{664} = 0,67 < 1,0. \quad (5.6)$$

Warunek ten jest spełniony.

## Nośność na wyboczenie

W odróżnieniu do poprzedniego podejścia długość wyboczeniową słupa przyjmujemy jako równą jego teoretycznej wysokości,  $L_{cr,y} = 5$  m. Siła krytyczna:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI_s}{h^2} = \frac{\pi^2 \cdot 21000 \cdot 25170}{500^2} = 20867 \text{ kN.} \quad (5.7)$$

Smukłość względna:

$$\bar{\lambda}_y = \sqrt{\frac{Af_y}{N_{cr,y}}} = \sqrt{\frac{149,0 \cdot 35,5}{20867}} = 0,5. \quad (5.8)$$

Funkcja imperfekcji:

$$\Phi_y = 0,5[1 + \alpha(\bar{\lambda}_y - 0,2) + \bar{\lambda}_y^2] = 0,5 \cdot [1 + 0,34 \cdot (0,5 - 0,2) + 0,5^2] = 0,676. \quad (5.9)$$

Współczynnik wyboczeniowy:

$$\chi_y = \frac{1}{\Phi_y + \sqrt{\Phi_y^2 - \bar{\lambda}_y^2}} = \frac{1}{0,676 + \sqrt{0,676^2 - 0,5^2}} = 0,884. \quad (5.10)$$

Nośność obliczeniowa słupa:

$$N_{b,y,Rd} = \chi_y Af_y / \gamma_{M1} = 0,884 \cdot 149,0 \cdot 35,5 / 1,0 = 4675,9 \text{ kN.} \quad (5.11)$$

Warunek nośności:

$$N_{Ed} / N_{b,y,Rd} = 1264,2 / 4675,9 = 0,27 < 1,0. \quad (5.12)$$

Warunek nośności został spełniony.

## Warunki interakcyjne

Podobnie jak poprzednio rozważania ograniczymy do płaszczyzny ramy. Współczynnik równoważnego, stałego momentu,  $\Psi_y = 0,0/324,9 = 0,0$  (EN 1993-1-1/tab. A.2):

$$C_{my} = 0,79 - 0,12 \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}} = 0,79 - 0,12 \cdot \frac{1264,2}{20867} = 0,783. \quad (5.13)$$

Dla sprężystego zakresu odkształceń współczynnik interakcyjny wyraża się wzorem:

$$k_{yy} = \frac{C_{my}}{1 - \chi_y N_{Ed} / N_{cr,y}} = \frac{0,783}{1 - 0,884 \cdot 1264,2 / 20867} = 0,827. \quad (5.14)$$

Warunek nośności:

$$\begin{aligned} & \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed}}{M_{el,y,Rk} / \gamma_{M1}} = \\ & = \frac{1264,2}{0,884 \cdot 5290 / 1,0} + 0,827 \cdot \frac{324,9}{596 / 1,0} = 0,72 < 1,0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Współczynniki określające stopień uplastycznienia przekroju:

$$w_y = W_{pl,y} / W_{el,y} = 1869 / 1680 = 1,11, \quad n_{pl} = \frac{N_{Ed}}{N_{Rk} / \gamma_{M1}} = \frac{1264,2}{5290 / 1,0} = 0,239. \quad (5.16)$$

Współczynnik  $C_{yy}$ :

$$\begin{aligned} C_{yy} &= 1 + (w_y - 1) \left[ 2 - \frac{1,6}{w_y} C_{my}^2 (\bar{\lambda}_y + \bar{\lambda}_y^2) \right] n_{pl} = \\ &= 1 + (1,11 - 1) \cdot \left[ 2 - \frac{1,6}{1,11} \cdot 0,783^2 (0,5 + 0,5^2) \right] \cdot 0,239 = \\ &= 1,035 > \frac{W_{el,y}}{W_{pl,y}} = \frac{1680}{1869} = 0,899. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Współczynnik interakcji:

$$k_{yy} = \frac{C_{my}}{(1 - \chi_y N_{Ed} / N_{cr,y}) C_{yy}} = \frac{0,783}{(1 - 0,884 \cdot 1264,2 / 20867) \cdot 1,035} = 0,8 \quad (5.18)$$

Formuła interakcyjna:

$$\begin{aligned} & \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed}}{M_{pl,y,Rk} / \gamma_{M1}} = \\ & = \frac{1264,2}{0,884 \cdot 5290 / 1,0} + 0,8 \cdot \frac{324,9}{664 / 1,0} = 0,66 < 1,0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Warunek interakcyjny jest spełniony.



## 6. Dokładna analiza II rzędu

W analizie II rzędu został uwzględniony wpływ wybożenia w płaszczyźnie rami oraz imperfekcje globalne i lokalne w postaci obciążeń zastępczych.

Obliczenia przeprowadzono metodą elementów skończonych, wykorzystując program Robot Structural Analysis Professional. W najbardziej wyężonym przekroju słupa B-2 siły wewnętrzne wynikające z analizy II rzędu z uwzględnieniem imperfekcji przyjmują wartości:

$$M_{Ed} = 329,1 \text{ kNm}, V_{Ed} = 80,0 \text{ kN}, N_{Ed} = 1265,7 \text{ kN}. \quad (6.1)$$

W tym przypadku sprawdzenie nośności słupa sprowadza się do sprawdzenia nośności jego najbardziej wyężonego przekroju. Warunki nośności dla sprężystego i niesprężystego zakresu odkształceń przyjmują odpowiednio postać:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{c,Rd}} + \frac{M_{Ed}}{M_{c,y,Rd}} = \frac{1265,7}{5290} + \frac{329,1}{596} = 0,79 < 1,0, \quad (6.2)$$

Parametry krzywej granicznej:

$$a = (A - 2b_f t_f) / A = (149 - 2 \cdot 30,0 \cdot 1,9) / 149 = 0,235 < 0,5, \quad (6.3)$$

$$\xi = 1 - 0,5a = 1 - 0,5 \cdot 0,235 = 0,883.$$

Warunek nośności:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{c,Rd}} + \xi \frac{M_{Ed}}{M_{c,y,Rd}} = \frac{1265,7}{5290} + 0,883 \cdot \frac{329,1}{664,0} = 0,68 < 1,0. \quad (6.4)$$

Warunki te są spełnione.

## 7. Zakończenie

W artykule przedstawiono analizę stateczności rami stalowej według trzech różnych podejść zaproponowanych w EN 1993-1-1. W tej analizie imperfekcje i efekty II rzędu uwzględniono na trzy sposoby:

- wyłącznie za pomocą analizy globalnej (dokładna analiza II rzędu),

- częściowo za pomocą analizy globalnej i częściowo poprzez indywidualne sprawdzenie stateczności elementów wg EN 1993-1-1/p. 6.3 (uproszczona analiza II rzędu),
- wyłącznie poprzez indywidualne sprawdzenie stateczności elementów wg EN 1993-1-1/p. 6.3, przyjmując długości wybocheniowe ustalone dla globalnej formy utraty stateczności (analiza I rzędu).

W tabeli 7.1 zestawiono wartości sił wewnętrznych w najbardziej wyężonym przekroju słupa B-2 obliczone trzema sposobami. Analizowana rama jest ustrojem wrażliwym na efekty II rzędu, stąd znaczny wzrost dominujących w jej wyężeniu sił wewnętrznych po uwzględnieniu tych efektów.

TABELA 7.1

Wartości sił wewnętrznych w najbardziej wyężonym przekroju słupa B-2 określone według różnych podejść

Siły wewnętrzne	Analiza I rzędu	Uproszczona analiza II rzędu	Dokładna analiza II rzędu
$M$ [kNm]	279,04	324,9	329,1
$N$ [kN]	1255,0	1264,2	1265,7
$V$ [kN]	55,81	64,97	80,0

TABELA 7.2

Ocena wyężenia słupa B-2 według rozważanych podejść

Analiza I rzędu		Uproszczona analiza II rzędu		Dokładna analiza II rzędu	
Wyężenie sprężyste	Wyężenie niesprężyste	Wyężenie sprężyste	Wyężenie niesprężyste	Wyężenie sprężyste	Wyężenie niesprężyste
<b>90%</b>	<b>86%</b>	<b>78%</b>	<b>67%</b>	<b>79%</b>	<b>68%</b>

Na uwagę zasługują rezultaty dotyczące wyężenia słupa B-2, przedstawione w tabeli 7.2. Okazuje się bowiem, że najbardziej zachowawczy sposób postępowania to ten, w którym ocenę stateczności ramy sprowadza się do kryterium stateczności słupa wg EN 1993-1-1/p. 6.3, wykorzystując wartości sił wewnętrznych wynikające z analizy I rzędu. W tym przypadku miarodajną ocenę wyężenia słupa otrzymuje się na podstawie warunków interakcyjnych, zarówno dla sprężystego, jak i niesprężystego zakresu odkształceń. Kluczową rolę odgrywa tutaj długość wybocheniowa słupa, odpowiadająca globalnej (niesymetrycznej) postaci wybożenia.

W uproszczonej analizie II rzędu, zarówno w zakresie sprężystym, jak i niesprężystym, bardziej miarodajny okazuje się warunek na nośność przy zginaniu z siłą podłużną. W analizowanym przypadku rami interakcja w sensie Eurokodu 3 wpływa korzystnie na wyężenie sprawdzanego słupa. Długość wybocheniowa

słupa nie jest już związana z jakąkolwiek formą wybożenia ramy. Przyjmuje się ją jako równą teoretycznej wysokości słupa. Siły wewnętrzne wynikają z analizy I rzędu przy odpowiednio zwiększonych obciążeniach zewnętrznych. W ten sposób uwzględnia się wpływ efektów II rzędu.

Poziom wyteżenia rozważanego słupa określony na podstawie dokładnej analizy II rzędu jest zbliżony do poziomu wynikającego z analizy uproszczonej, zarówno w zakresie odkształceń sprężystych, jak i niesprężystych. Warto podkreślić, że w podejściu dokładnym, na etapie wymiarowania nie wykorzystuje się warunków interakcyjnych. Efekty II rzędu i imperfekcje są uwzględniane w obliczeniach statycznych.

Źródło finansowania pracy – środki własne autorów.

Artykuł wpłynął do redakcji 16.05.2018 r. Zweryfikowaną wersję po recenzjach otrzymano 10.06.2019 r.

Sylwia Pogonowska-Płatek <https://orcid.org/0000-0003-4634-7766>

Wojciech Dornowski <https://orcid.org/0000-0002-6193-0944>

#### LITERATURA

- [1] BRÓDKA J., BRONIEWICZ M., *Projektowanie konstrukcji stalowych według Eurokodów*. Polskie Wydawnictwo Techniczne, Rzeszów, 2010.
- [2] EN 1993-1-1, Eurokod 3: *Projektowanie konstrukcji stalowych – Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków*.
- [3] GARDNER L., NETHERCOT D.A., *Designers' Guide to EN 1993-1-1 Eurocode 3: Design of Steel Structures – General Rules and Rules for Buildings*, Thomas Telford, London, 2005.
- [4] GIŻEJOWSKI M., ZIÓŁKO J. (red.), *Budownictwo ogólne, t. 5. Stalowe konstrukcje budynków. Projektowanie według eurokodów z przykładami obliczeń*, (red.) Giżejowski M., Ziółko J., Arkady, Warszawa, 2010.
- [5] STUDZIŃSKI R., ORDZINIAK P., *Analiza globalna konstrukcji stalowych w ujęciu Eurokodu 3*, Praktyka Budowlana, 9, 2014, 69-70.
- [6] WEBBER A., ORR J.J., SHEPHERD P., CROTHERS K., *The effective length of columns in multi-storey frames*, Engineering Structures, 102, 2015, 132-143.
- [7] WEISS S., GIŻEJOWSKI M., *Stateczność konstrukcji metalowych. Układy prętowe*, Arkady, Warszawa, 1991.

S. POGONOWSKA-PŁATEK, W. DORNOWSKI

#### Stability analysis of steel frames according to Eurocode 3

**Abstract.** In the paper, the qualitative and quantitative comparison of EC3 methods to verify the global stability of the structure is presented. The steel portal frame subjected to varied loads is considered. The initial global sway imperfection and the initial local bow imperfections of member frame are taken into account. The sensitivity of a structure to the 2nd order effects is assessed indirectly using the elastic critical load. The elastic critical load of a frame is calculated according to the buckling mode. The 2nd order effects are taken into account using the finite element method.

**Keywords:** second order effects, steel frame, global stability, critical load.

**DOI:** 10.5604/01.3001.0013.3008

