Optymalizacja procesu betonowania płyty fundamentowej przy użyciu teorii masowej obsługi

dr inż. Daniel Przywara, dr hab. inż. Adam Rak, prof. uczelni, Wydział Budownictwa i Architektury, Politechnika Opolska w Opolu

1. Wprowadzenie

Teoria masowej obsługi, zwana także teorią kolejek, jest algorytmem należącym do metod probabilistycznych planowania procesów budowlanych, uwzględniających losowy charakter rozpatrywanych problemów [1]. Punktem wyjściowym w tym zagadnieniu jest wyznaczenie rozkładów gęstości prawdopodobieństwa zmiennych losowych, opisujących badane zjawisko.

Przyczyną zjawiska tworzenia się kolejek jest przypadkowość zgłaszania się kolejnych jednostek (np. wywrotek, mieszalników) do systemu (procesu budowlanego, np. robót ziemnych, betoniarskich) obsługiwanego przez jego aparaty (np. koparki, ładowarki, pompowozy).

Rozwiązania analityczne prostych modeli teorii masowej obsługi są efektywne, gdy jednostki zgłaszają się w celu wykonania określonej obsługi/usługi zgodnie z rozkładem Poissona, natomiast rozkład czasów trwania obsługi jest rozkładem wykładniczym Erlanga [1].

Głównym kryterium oceny efektywności realizacji procesu budowlanego w teorii masowej obsługi jest określenie statystycznej równowagi systemu.

Wielkościami charakteryzującymi proces wejścia i obsługi są odpowiednio [2]:

- Średnia stopa przybyć: $\lambda = \frac{1}{T}$
- Średnia stopa obsługi: $\mu = \frac{1}{U}$

gdzie:

T – średni odstęp czasu między kolejnymi zgłoszeniami [jednostki czasu],

U – średni czas obsługi jednostki w systemie [jednostki czasu].

Warunek statystycznej równowagi systemu uważa się za spełniony, gdy:

$$\mu \geq \lambda$$

Jeżeli warunek nie jest spełniony ($\lambda > \mu$), jednostki przybywają do systemu średnio szybciej, niż z niego ubywają, czyli długość kolejki, z matematycznego punktu widzenia, rośnie do nieskończoności.

Podstawowymi pojęciami w teorii masowej obsługi są proces wejścia oraz zespół kanałów.

Proces wejścia, zwany też strumieniem zgłoszeń, tworzony jest przez ciąg zgłoszeń nadchodzących do systemu. W zespole kanałów przebiega proces obsługi. Równolegle kanały mogą składać się z wielu stanowisk (aparatów obsługi), na których wykonuje się kolejne czynności procesu obsługi danego zgłoszenia.

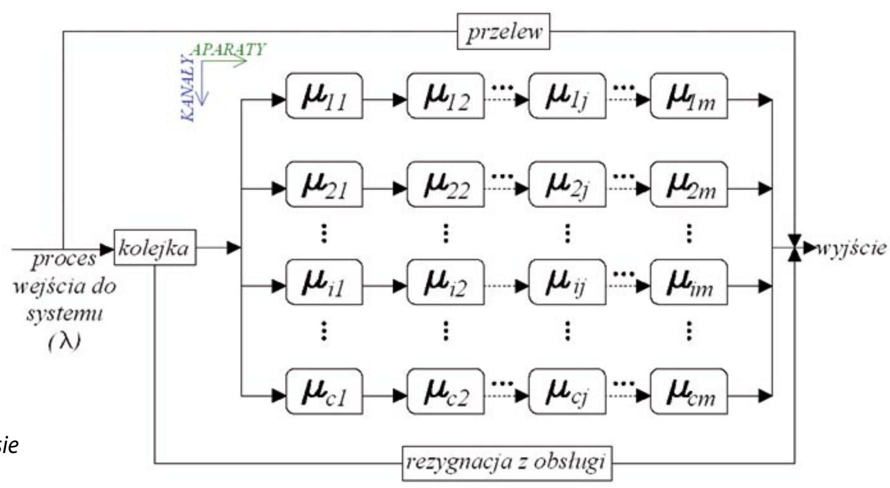
W procesie wejścia do systemu mogą zachodzić różne scenariusze (rys. 1).

Pierwszym z nich jest kolejka – tworzona zgodnie z tzw. regulaminem kolejek, precyzującym kilka przypadków kolejności obsługi, np. obsługa według kolejności zgłoszeń (FIFO – *first in first out*: „pierwsze przyszło, pierwsze wyszło", LIFO – *last in first out*: „ostatnie przyszło, pierwsze wyszło"), obsługa z priorytetem (zgłoszenia o różnym stopniu uprzywilejowania), obsługa losowa (SIRO – *selected in random order*), w której każde zgłoszenie ma taką samą szansę obsługi.

Drugim scenariuszem procesu wejścia do systemu jest tzw. przelew, rozumiany jako odmowa obsługi. Występuje wówczas, gdy w kolejce zabraknie miejsca i nowe zgłoszenia zmuszane są do opuszczenia systemu.

Trzecią alternatywą jednostki jest jej dobrowolna decyzja o rezygnacji z obsługi i oczekiwania w kolejce, połączona z opuszczeniem systemu.

Ze względu na charakter zachowania się zgłoszenia w systemie wyróżnia się system ze stratami, bez strat, system



Rys. 1. *Scenariusze pobytu jednostki w procesie wejścia do systemu (opis w tekście) [1]*

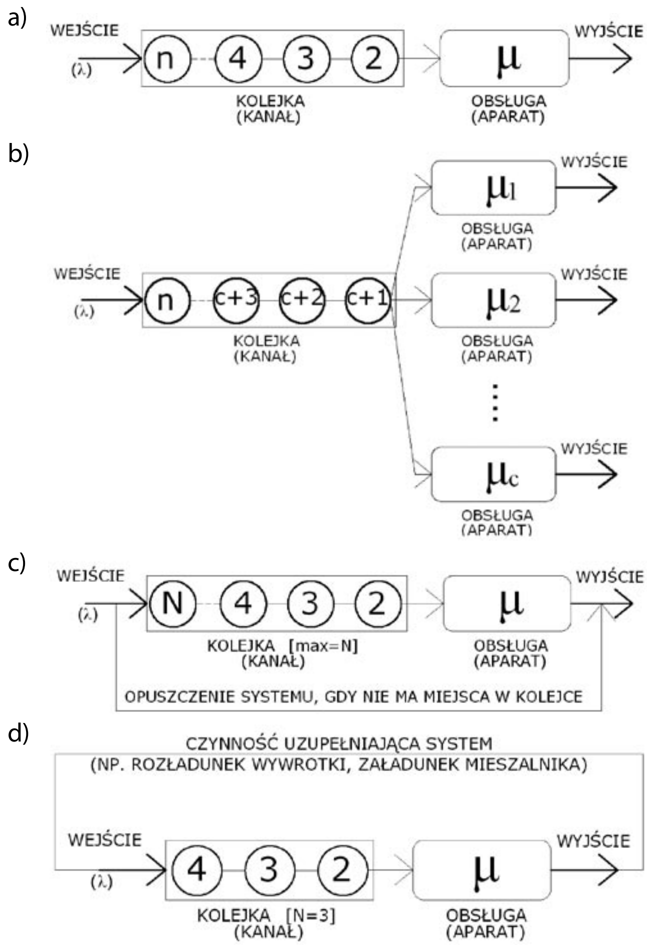
z ograniczoną kolejką oraz z ograniczonym strumieniem zgłoszeń [1].
System bez strat nie przyjmuje zgłoszenia wówczas, gdy wszystkie kanały obsługi są zajęte – w systemie nie może tworzyć się kolejka.
W systemie bez strat (z oczekiwaniem) zgłoszenia wchodzące do niego mogą go opuścić dopiero po zakończeniu obsługi – w systemie tworzy się kolejka.
W przypadku systemu z ograniczoną kolejką (np. plac budowy o ograniczonej powierzchni) zgłoszenie nie jest przyjęte do obsługi, jeżeli w kolejce znajduje się pewna, określona z góry liczba zgłoszeń [8].
W systemie z ograniczonym czasem przebywania zgłoszenie musi opuścić go po upływie pewnego, z góry określonego czasu przebywania w nim.
Ze względu na liczebność strumienia zgłoszeń w teorii masowej obsługi wyróżnia się z nieograniczoną oraz ograniczoną liczbą zgłoszeń [1], zaś ze względu na liczbę kanałów obsługi zastosowanie znajdują systemy jedno- i wielokanałowe.
Ważnym zagadnieniem w rozpatrywanym algorytmie jest tzw. stopień uporządkowania systemu, rozróżniający systemy uporządkowane i nieuporządkowane.
W przypadku systemów uporządkowanych poszczególne kanały obsługi są ponumerowane, a kolejne zgłoszenie przyjmowane jest do obsługi przez pierwszy z wolnych kanałów, czyli kanał o najniższym numerze. Systemy nieuporządkowane cechują się dowolnością obsługi przez jeden z niezajętych kanałów.
Geneza teorii masowej obsługi wywodzi się ze sfery systemów telekomunikacyjnych, które szczegółowo badał A. K. Erlang [4, 5].
Oznaczenia modeli w teorii masowej obsługi podane zostały przez M. G. Kendalla [1], symbolizują trzy charakterystyki modelu:

$$X/Y/c$$

gdzie:
X – rozkład na wejściu do systemu,
Y – rozkład czasu obsługi jednostki,
c – liczba kanałów obsługi.
W rozkładach na wejściu do systemu oraz czasu obsługi jednostki przyjmuje się:
M – wykładniczy rozkład Poissona/odstępów między zgłoszeniami/czasów obsługi,
E_k – rozkład Erlanga/odstępów między zgłoszeniami/czasów obsługi,
K_n – rozkład χ^2/odstępów między zgłoszeniami/czasów obsługi,
D – regularne zgłoszenia deterministyczne,
G – brak jakichkolwiek założeń/dowolny proces zgłoszeń i obsługi.

W myśl powyższych zunifikowanych oznaczeń modeli dla systemów z nieograniczonym strumieniem zgłoszeń wyróżnia się standardowe modele (rys. 2) [6, 7].

Model systemu M/M/1 bez strat składa się z jednego kanału obsługi oraz nieograniczonego strumienia zgłoszeń: jeżeli kanał jest zajęty, zgłoszenia oczekują w kolejce i obsługiwane są w kolejności przybyć.
Model ten obliczany jest przy użyciu następujących zależności: (oznaczenia jak wyżej)



Rys. 2. *Graficzna interpretacja modeli systemów w teorii masowej obsługi: a) model systemu M/M/1 bez strat, b) model systemu M/M/c bez strat, c) model systemu M/M/1 z ograniczoną kolejką, d) model systemu M/M/1 + N ze stratami (opis w tekście) [1]*

Prawdopodobieństwo zajęcia kanału obsługi wyznacza się ze wzoru:

$$P_{n>0} = \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że kanał obsługi jest wolny:

$$P_0 = 1 - \rho$$

Prawdopodobieństwo znajdowania się *n* jednostek w systemie:

$$P_n = (1 - \rho) \cdot \rho^n$$

Prawdopodobieństwo wystąpienia kolejki:

$$P_{n>1} = 1 - P_0 - P_1 = 1 - (1 - \rho) - (1 - \rho) \cdot \rho = \rho^2$$

Średnia liczba jednostek w systemie:

$$\bar{n} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Średnia długość kolejki:

$$Q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

Średni czas przebywania jednostki w systemie: (oczekiwanie + obsługa)

$$T_u = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Średni czas przebywania jednostki w kolejce: (bez czasu obsługi)

$$T_Q = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

W modelu systemu M/M/c bez strat występuje „c" kanałów obsługi i nieograniczony strumień zgłoszeń. Jeżeli kanał jest zajęty, zgłoszenia oczekują w kolejce i obsługiwane są w kolejności przybyć, a kanały wykonują te same czynności.
Model systemu M/M/1 z ograniczoną kolejką składa się z jednego kanału obsługi i nieograniczonego strumienia zgłoszeń, przy czym liczba miejsc w systemie/kolejce jest ograniczona:

$$L = N + 1$$

gdzie:
L – liczba miejsc w systemie (oczekiwanie + obsługa),
N – liczba miejsc w kolejce (oczekiwanie).
Najbardziej zbliżonym do rzeczywistych warunków produkcji budowlanej jest model systemu M/M/1+N ze stratami. Charakteryzuje się on cyklicznym powracaniem jednostek do systemu, stąd nazywany bywa modelem ze sprzężeniem zwrotnym [2].
Czas obiegu środków transportowych jest zależny od wydajności eksploatacyjnej zbudowanego zestawu maszyn, odległości miejsca uzupełniającego system (np. wyładunek urobku z robót ziemnych, załadunek mieszanki betonowej do samochodu mieszalnika w węźle betoniarskim) i losowych zakłóceń, występujących w czasie jazdy [3] – im większe wartości mają te czynniki, tym więcej jednostek potrzebnych jest do obsługi aparatu.
Jeżeli nie przeprowadza się dokładnej analizy, to optymalne wykorzystanie maszyn współpracujących ze środkami transportowymi przyjmuje się na poziomie 75–85%.
W przypadku obliczania parametrów modelu systemu M/M/1+N ze stratami podstawowe zależności przyjmują bardziej skomplikowaną postać w porównaniu z modelem M/M/1 bez strat (oznaczenia jak wyżej).
Prawdopodobieństwo zdarzenia, że kanał obsługi jest wolny:

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]^{-1}$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że w systemie znajduje się *n* zgłoszeń ($0 \le n \le N$):

$$P_n = \frac{N!}{(N-n)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0$$

Średnia długość kolejki:

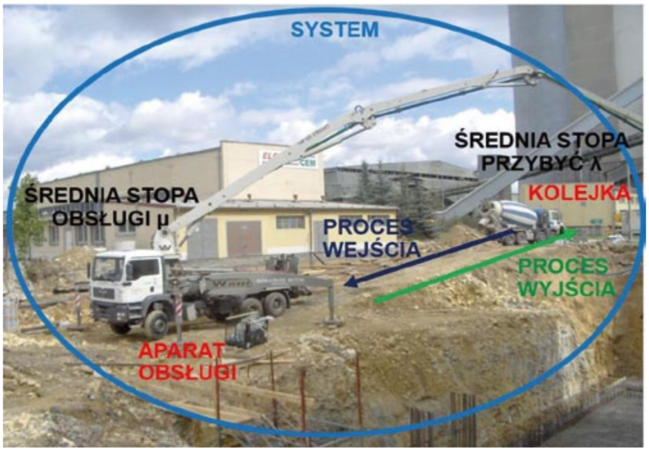
$$Q = \sum_{n=2}^{N} \frac{(n-1) \cdot N!}{(N-n)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0$$

2. Zastosowanie inżynierskie

2.1. Opis badanego procesu budowlanego

W próbie implementacji teorii masowej obsługi na potrzeby optymalizacji czasu trwania i ponoszonych kosztów sprzętowych procesu budowlanego posłużono się przykładem realizacji płyty fundamentowej (betonowanie) budynku magazynu paliw zastępczych na terenie cementowni Heidelberg Group w Górażdżach koło Opola.
W przypadku tego procesu jedna pompa samochodowa do mieszanki betonowej zatrudniona była przy wykonaniu płyty fundamentowej o dużej objętości (ponad 1100 m³), mieszanka zaś dostarczana była mieszalnikami samochodowymi z jednego węzła betoniarskiego.
Założono że strumień zgłoszeń utworzony przez środki transportowe rozładowywane przez pompę jest nieograniczony (rys. 3).

***Rys. 3.** Proces betonowania płyty fundamentowej: obliczenia częstotliwości przybyć mieszalników na budowę (źródło: badania własne)*



Rys. 4. *Proces betonowania płyty fundamentowej: założenie modelu systemu M/M/1 bez strat (źródło: badania własne)*

Do celów obliczeniowych przyjęto zatem model systemu M/M/1 bez strat (rys. 4).
Badania empiryczne wykazały średni czas rozładunku jednego mieszalnika: $U = 16{,}5$ minut, średni zaś czas między kolejnymi zgłoszeniami „gruszek" do systemu: $T = 27$ minut (w ciągu ośmiu godzin (480 minut) zgłosiło się średnio 480: 27 = 18 mieszalników).

2.2. Sprawdzenie statystycznej równowagi systemu
Średnia stopa przybyć:

$$\lambda = \frac{1}{T} = \frac{1}{27} = 0{,}0370$$

Średnia stopa obsługi:

$$\mu = \frac{1}{U} = \frac{1}{16{,}5} = 0{,}0606$$

Warunek statystycznej równowagi systemu: $\mu \geq \lambda$

$$0{,}0606 \geq 0{,}0370$$

Warunek jest spełniony: samochody średnio szybciej ubywają z systemu, niż do niego przybywają – czyli kolejka maleje w nieskończoności.

2.3. Obliczenie pozostałych parametrów systemu
Współczynnik wykorzystania kanału obsługi (prawdopodobieństwo jego zajęcia):

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}0370}{0{,}0606} = 0{,}6110$$

Prawdopodobieństwo, że kanał obsługi jest wolny:

$$P_0 = 1 - \rho$$
$$P_0 = 1 - 0{,}6110 = 0{,}389$$

Prawdopodobieństwo znajdowania się n mieszalników w systemie (w kolejce i kanale obsługi):

$$P_n = (1 - \rho) \cdot \rho^n$$

STAN: $n = 0$ mieszalników: $P_0 = (1 - 0{,}6110) \cdot 0{,}6110^0 = 0{,}3890$
STAN: $n = 1$ mieszalników: $P_1 = (1 - 0{,}6110) \cdot 0{,}6110^1 = 0{,}2377$
STAN: $n = 2$ mieszalników: $P_2 = (1 - 0{,}6110) \cdot 0{,}6110^2 = 0{,}1452$
STAN: $n = 3$ mieszalników: $P_3 = (1 - 0{,}6110) \cdot 0{,}6110^3 = 0{,}0087$
STAN: $n = \infty$ mieszalników: $P_\infty = (1 - 0{,}6110) \cdot 0{,}6110^\infty = 0{,}000$

Prawdopodobieństwo wystąpienia kolejki w kanale obsługi:

$$P_{n>1} = 1 - P_0 - P_1$$
$$P_{n>1} = 1 - (1 - \rho) - (1 - \rho) \cdot \rho = 1 - 1 + \rho - \rho + \rho^2$$
$$P_{n>1} = \rho^2 = 0{,}6110^2 = 0{,}3733$$

Średnia liczba samochodów „gruszek" w systemie:

$$\bar{n} = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{0{,}6110}{1 - 0{,}6110} = 1{,}5707$$

Średnia długość kolejki samochodów „gruszek" w systemie:

$$Q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{0{,}6110^2}{1 - 0{,}6110} = 0{,}9597$$

Średni czas oczekiwania samochodów „gruszek" w systemie (czas oczekiwania łącznie z czasem obsługi):

$$T_u = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{0{,}0606 - 0{,}0370} = 42{,}4 \text{ min} = 0{,}707 \text{ godz}$$

Średni czas przebywania samochodów mieszalników w kolejce (czas oczekiwania bez czasu obsługi):

$$T_Q = \frac{\rho}{\mu - \lambda} = \frac{0{,}6110}{0{,}0606 - 0{,}0370} = 25{,}89 \text{ min} = 0{,}432 \text{ godz}$$

Dopuszczalna stopa przybyć samochodów mieszalników do systemu:

$$T_Q = \frac{\rho}{\mu - \lambda} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\mu - \lambda}$$

Przy założeniu, że średni czas oczekiwania w kolejce nie powinien przekroczyć czasu $T_Q = 10$ minut, w średniej stopie przybyć λ można obliczyć dopuszczalną stopę przybyć λ (samochodów na minutę) – po przekształceniu wzoru:

$$\lambda = \frac{T_Q \cdot \mu^2}{T_Q \cdot \mu + 1} \qquad \lambda = \frac{10 \cdot 0{,}0606^2}{10 \cdot 0{,}0606 + 1} = 0{,}023$$

2.4. Optymalny średni koszt pracy maszyn (ekonomika pracy)
W obliczeniach doboru zestawu maszyn najefektywniejszym jest kryterium ekonomiczne – kosztów poniesionych na pracę sprzętu. Dla samochodów mieszalników pominięto koszty związane z dowozem mieszanki na plac budowy, traktując je jako współmierne z kosztami rozładunku mieszalnika i oczekiwania w kolejce na rozładunek.
Spodziewany koszt postoju samochodu w kolejce i w obsłudze (mieszalnik):

$$K_p = K_s \cdot T_u$$

gdzie:
K_s – jednostkowy koszt postoju samochodu w kolejce i w obsłudze (praca taboru); przyjęto stawkę maszynogodziny: $K_S = 70{,}00$ zł/m-g,

T_u – średni czas przebywania samochodów w systemie (oczekiwanie + obsługa).

Koszt cyklu mieszalnika (rozładunek+oczekiwanie na rozładunek):

$$K_p = 70{,}00\ zł/m-g \cdot 0{,}707m-g = 49{,}50\ zł$$

Spodziewany koszt obsługi (pompa do betonu):

$$K_o = K_n \cdot (T_u - T_Q)$$

gdzie:
K_n – koszt rozładunku jednego samochodu (praca sprzętu: pompy); przyjęto stawkę maszynogodziny: K_n = 65,00 zł/m-g,
T_Q – średni czas przebywania samochodów w kolejce (oczekiwanie).

Koszt fragmentu cyklu pompy (rozładunek mieszalnika):

$$K_O = 65{,}00\ zł/m-g \cdot (0{,}707m-g - 0{,}432m-g) = 17{,}87\ zł$$

Spodziewany koszt całkowity jednego cyklu zestawu (pompa+mieszalnik):

$$K_c = K_p + K_o = 49{,}50\ zł + 17{,}87\ zl = 67{,}38\ zł$$

2.5. Optymalna średnia wydajność pracy maszyn (organizacja pracy)

Spodziewany koszt postoju samochodów w kolejce i obsłudze („gruszki"):

$$K_p = K_n \cdot \bar{n} = K_s \cdot \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Spodziewany koszt obsługi (pompa):

$$K_o = K_n \cdot \mu$$

Spodziewany koszt całkowity (pompa + „gruszka"):

$$K_p = K_n \cdot \bar{n} = K_s \cdot \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Różniczkując otrzymaną funkcję względem μ (średniej stopy obsługi), a także przyrównując pochodną do zera, otrzymamy:

$$\frac{dK_c}{d\mu} = -K_s \cdot \lambda(\mu - \lambda)^{-2} + K_n = 0$$

Równanie ma dwa pierwiastki:

$$\mu_1 = \lambda + \sqrt{\frac{K_s \cdot \lambda}{K_n}},\ \mu_2 = \lambda - \sqrt{\frac{K_s \cdot \lambda}{K_n}}$$

Po podstawieniu wartości:

$$\mu_1 = 0{,}0370 + \sqrt{\frac{70{,}00\ zł/m - g \cdot 0{,}0370}{65{,}00\ zł}} = 0{,}237$$

$$\mu_1 = 0{,}0370 - \sqrt{\frac{70{,}00\ zł/m - g \cdot 0{,}0370}{65{,}00\ zł}} = -0{,}163 < 0$$

Drugi pierwiastek równania należy pominąć, ze względu na ujemny znak wartości średniej stopy obsługi – wydajności maszyny. Z obliczeń wynika, że należy zastosować taką pompę do mieszanki, której wydajność eksploatacyjna powinna wynosić 0,237 gruszki/minutę, czyli:

$$0{,}237 \cdot 60 = 14{,}22\ \text{gruszki/godz}$$

Należy zatem do betonowania zastosować zestaw dwóch pomp do mieszanki betonowej, o łącznej wydajności obliczonej wyżej. Ich wykorzystanie wyniesie:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu_1} = \frac{0{,}0370}{0{,}237} = 0{,}16$$

Budowa zestawu maszyn składających się z większej liczby pomp do mieszanki betonowej/aparatów obsługi (>1) wymaga zmiany algorytmu obliczeniowego oraz przejścia z modelu M/M/1 bez strat na model M/M/c bez strat.

3. Podsumowanie

Przeprowadzona optymalizacja stopnia harmonizacji zestawu maszyn przy realizacji robót betoniarskich z wykorzystaniem założeń teorii masowej obsługi pozwoliła na określenie wymaganej wydajności eksploatacyjnej pompy (średniego czasu obsługi) przy zaobserwowanym średnim czasie przybywania kolejnych samochodów mieszalników na plac budowy.

Wyeliminowanie kolejki z systemu, generującej koszty postojowe środków transportowych, możliwe byłoby poprzez przyjęcie dwóch pompowozów, co spowodowałoby konieczność ponownej analizy w oparciu o złożony model systemu M/M/c.

Alternatywnym rozwiązaniem jest ograniczenie liczby samochodów mieszalników (redukcja strumienia zgłoszeń). W tym przypadku jednak również należałoby powtórzyć optymalizację, zakładając model M/M/1+N.

BIBLIOGRAFIA

[1] Jaworski K. M., Metodologia projektowania realizacji budowy, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2009
[2] Mrozowicz J., Hoła B., Modelowanie procesów budowlanych o charakterze losowym, Dolnośląskie Wydawnictwo Ekonomiczne DWE, Wrocław, 2003
[3] Więckowski A., Roboty budowlane. Przerwy w równomiernej realizacji prac, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2018
[4] Ficoń K., Wykorzystanie teorii kolejek w procesie decyzyjnym przedsiębiorstwa Transportowego, Akademia Marynarki Wojennej, Systemy Logistyczne Wojsk 50/2019
[5] Tihonenko M., Modele obsługi masowej w systemach informacyjnych, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, 2003
[6] Knast P., Żurek J., Modelowanie procesów technologicznych montażu za pomocą Sieci Petriego, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 1998
[7] Allen A., Probability Statistics and queueing theory with computer science applications, Boston Academic pross., 1990
[8] Ostasiewicz S., Rusnak Z., Siedlecka U., Statystyka. Elementy teorii i zadania, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław, 1999