



Weryfikacja metody sztywności zastępczej na przykładzie badań modelu dwuprzęsłowej belki składanej opartej na podporach stałych

JAN MARSZAŁEK, MIECZYŚLAW PIECHOTA

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Inżynierii Lądowej i Geodezji,
Katedra Budownictwa Komunikacyjnego i Inżynierii Wojskowej,
ul. Gen. W. Urbanowicza 2, 00-908 Warszawa,
jan.marszalek@wat.edu.pl, mieczyslaw.piechota@wat.edu.pl

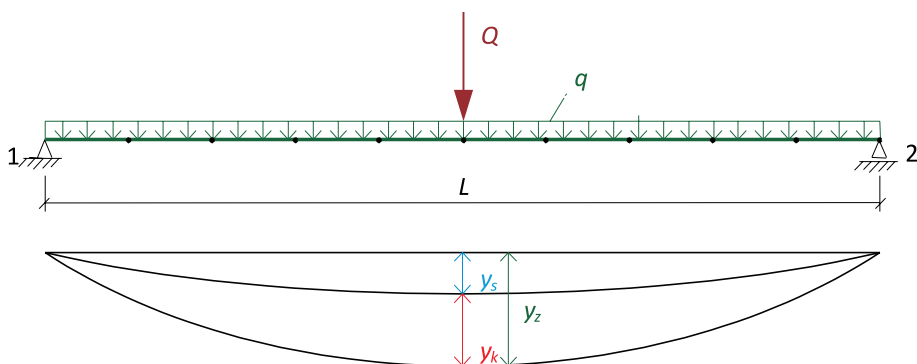
Streszczenie. Artykuł obejmuje analizę metody sztywności zastępczej w dwuprzęsłowej belce składanej opartej na podporach stałych, przeprowadzoną na podstawie badań modelowych. Istotą tej analizy było sprawdzenie odkształcenia całej belki dla stałej sztywności zastępczej. W tym celu wykonano szczegółowe pomiary ugięć w każdym połączeniu belki dla różnych: wielkości luzów montażowych, wartości obciążeń oraz długości przęseł. Następnie wyniki pomiarów porównano z wynikami teoretycznymi. Analizę teoretyczną przeprowadzono metodą ścisłą oraz metodą różnic skończonych. Analiza potwierdziła możliwość przyjmowania stałej sztywności zastępczej w dwuprzęsłowych belkach składanych. Jest to kontynuacja rozważań na temat pracy wieloprzęsłowych belek składanych.

Słowa kluczowe: budownictwo lądowe, belki składane, sztywność zastępcza, luzy montażowe

DOI: 10.5604/01.3001.0012.6661

1. Wprowadzenie

Dotychczas w teorii obliczania mostów składanych przedstawiona została metodyka wyznaczania sztywności zastępczej dla schematu belki wolnopodpartej i pierwszego przęsła dociążonego w belkach wieloprzęsłowych. Schemat przedstawiający istotę sztywności zastępczej dla belki składanej swobodnie podpartej przedstawia rysunek 1.1. Polega to na tym, że suma ugięć: sprężystego y_s i kinematycznego y_k dla belki składanej równa się ugięciu belki monolitycznej y_z o odpowiedniej sztywności zastępczej EJ_z (1.1).



Rys. 1.1. Schemat wyznaczenia sztywności zastępczej w belce składanej swobodnie podpartej [2]

$$y_s + y_k = y_z, \quad (1.1)$$

gdzie:
$$y_s = \frac{1}{EJ} \left(\frac{QL^3}{48} + \frac{5qL^3}{384} \right);$$

$$y_k = \frac{mL\varphi_0}{8};$$

$$y_z = \frac{1}{EJ_z} \left(\frac{QL^3}{48} + \frac{5qL^3}{384} \right);$$

Q — obciążenie zewnętrzne;

m — liczba składników w przęśle;

q — obciążenie ciężarem własnym;

L — rozpiętość przęsła;

EJ — sztywność składników belki;

φ_0 — kąt obrotu w połączeniach między składnikami [1].

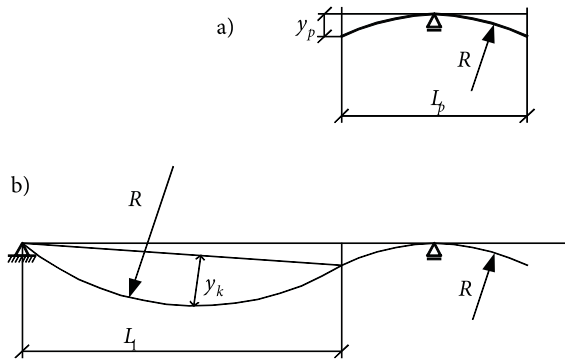
Po przekształceniu równania 1.1 otrzymamy wzór na sztywność zastępczą EJ_z w postaci:

$$EJ_z = \frac{EJ\gamma}{\gamma + \beta_z}, \quad (1.2)$$

gdzie: $\gamma = 8PL + 5qL^2;$

$$\beta_z = \frac{48EJm\varphi_0}{L}.$$

W przypadku belek swobodnie podpartych metoda ta daje wyniki dokładne. Inaczej jest w przypadku belek składanych wieloprzęsłowych. W pracy [2] przedstawiono metodykę określenia ugięcia kinematycznego belki dwuprzęsłowej w sposób przybliżony, uwzględniając tylko ciężar własny konstrukcji. Schemat takiego rozwiązania przedstawia rysunek 1.2.



Rys. 1.2. Ugięcia kinematyczne: a) ogniska, b) środka przęsła [2]

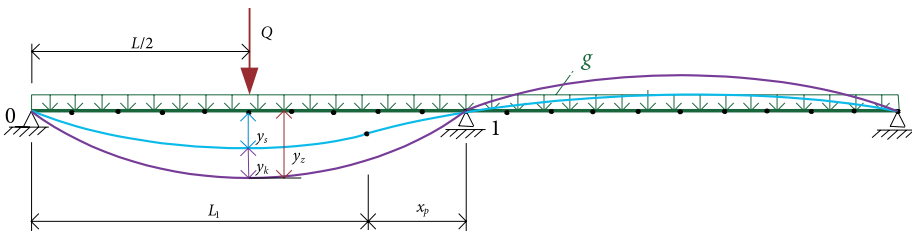
Ugięcia kinematyczne wyznaczono z analizy krzywizn zdeformowanego przęsła. Jest to podejście przybliżone dla symetrycznego obciążenia obu przęsła oraz pełnego zwarcia luzów nad podporą na długości l_p oraz w przęsle na długości L_1 . Zgodnie z tą metodyką ugięcie kinematyczne w środku przęsła można wyznaczyć ze wzoru 1.3.

$$y_k = \frac{L}{4R} \left(L_1 - \frac{L}{2} \right) + \frac{y_p L}{2L_1}, \quad (1.3)$$

gdzie: L_1 — miejsce zerowe momentu $M(x)$;

$$y_p = \frac{L_p^2}{8R}.$$

W pracy [4] zaproponowano metodykę wyznaczenia sztywności zastępczej dla analizy dynamicznej pracy przęsła obciążonego w środku obciążeniem zewnętrznym (rys. 1.3).



Rys. 1.3. Schemat wyznaczenia sztywności zastępczej dla belki składanej dwuprzęsłowej [4]

Weryfikacja ta polegała na uwzględnieniu we wzorach na y_s i y_z wpływu momentów podporowych na zmniejszenie wartości ugięć. Tak zmodyfikowane równania przyjmują postać:

$$y_s = \frac{1}{EJ} \left(\frac{QL^3}{48} + \frac{5qL^4}{384} + \frac{M_p L^2}{16} \right), \quad (1.4)$$

$$y_z = \frac{1}{EJ_z} \left(\frac{QL^3}{48} + \frac{5qL^4}{384} + \frac{M_p F_k L^2}{16} \right). \quad (1.5)$$

Zmodyfikowany wzór na sztywność zastępczą przyjmuje postać:

$$EJ_z = \frac{EJ(\gamma + \mu F_k)}{(\gamma + \beta_z + \mu)}, \quad (1.6)$$

gdzie: $\mu = 24M_p$;

F_k — funkcja kompensacji momentów podporowych [2].

Tok postępowania został opisany szczegółowo w pracy [4], poparto go przykładowymi badaniami modelowymi. Rozważania dotyczyły tylko przęsła obciążonego.

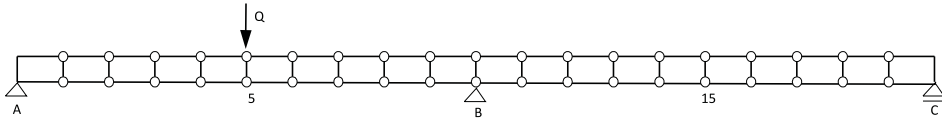
W artykule podjęto się sprawdzenia sposobu wyznaczania stałej sztywności zastępczej zarówno dla przęsła obciążonego, jak i odciążonego. W tym celu wykonano pomiary ugięć dwuprzęsłowej belki składanej dla różnych rozpiętości przęseł, różnego obciążenia oraz różnych wielkości luzów montażowych. W badaniach wykorzystano model belki składanej wykonany na potrzeby rozprawy doktorskiej [4], w której przedstawiono szczegółową jego charakterystykę. Istotą tych analiz jest wykorzystanie sztywności zastępczej do określenia deformacji belki sposobem analitycznym, a następnie porównanie jej z deformacją wynikającą z pomiarów. Analizę teoretyczną przeprowadzono dwoma sposobami: metodą ścisłą oraz z wykorzystaniem metody różnic skończonych. Rozważania przeprowadzone w tym artykule pozwolą na szybsze określanie przybliżonej deformacji konstrukcji mostów składanych.

2. Badania deformacji kinematycznej modelu belki składanej

2.1. Pomiary ugięć

Pomiary ugięć wykonano dla modelu dwuprzęsłowej belki składanej o liczbie składników w przęśle odpowiednio: 10 i 12. Belki połączono sworzniami w trzech wariantach (różne średnice sworzni). Schemat pomiarowy przedstawiono na rysunku 2.1. Wartości kątów obrotu między składnikami dla poszczególnych połączeń sworzniowych przedstawiono w tabeli 2.1. Pomiary ugięć wykonano dla dwóch

obciążeń $Q_1 = 1,139$ kN oraz $Q_2 = 1,401$ kN zgodnie z charakterystyką obciążeń przedstawionych w pracy [4].



Rys. 2.1. Schemat pomiarowy dla dwuprzęsłowej belki składanej

TABELA 2.1

Wartości kątów φ_0 obrotu dla poszczególnych połączeń

| Numer sworznia w połączeniu | Kąt obrotu φ_0 [rad] |
|-----------------------------|------------------------------|
| S_{w2} | 0,00535 |
| S_{w3} | 0,01295 |
| S_{w4} | 0,02493 |

Wyniki pomiarów ugięć modelu w środku pierwszego (nr 5 lub 6) i drugiego przęsła (nr 15 lub 18) dla wybranych przypadków przedstawiono w tabeli 2.2.

TABELA 2.2

Wyniki pomiarów

| Schemat pomiarowy | $2 \times 10, S_{w2}, Q_2$ | | $2 \times 10, S_{w3}, Q_2$ | | $2 \times 10, S_{w4}, Q_1$ | | $2 \times 12, S_{w2}, Q_1$ | | $2 \times 12, S_{w4}, Q_1$ | |
|------------------------------------|----------------------------|-------|----------------------------|-------|----------------------------|--------|----------------------------|-------|----------------------------|---------|
| Miejsce wykonania pomiarów | 5 | 15 | 5 | 15 | 5 | 15 | 6 | 18 | 6 | 18 |
| Przemieszczenia pionowe y_p [mm] | 8,446 | -2,82 | 19,89 | -6,40 | 37,71 | -11,35 | 12,03 | -3,57 | 54,40 | -15,893 |

2.2. Weryfikacja wyników obliczeniowych

Weryfikację uzyskanych wyników pomiarów modelu przeprowadzono dwoma sposobami: metodą różnic skończonych i metodą ścisłą, rozwiązując belkę dwuprzęsłową o sztywności zastępczej.

2.2.1. Metoda różnic skończonych

Jednym ze sposobów weryfikacji wyników pomiarowych jest metoda różnic skończonych. Analizę MRS oparto na równaniu 2.1, które powstało z przekształcenia równania różnicowego ruchu dla prędkości $v = 0$ [4].

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + (6 + D)y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = (q + p) \frac{h^4}{EJ_z}, \quad (2.1)$$

gdzie: D — parametr uwzględniający sztywność podpór dążący do nieskończoności;
 h — krok dyskretyzacji równy długości składnika l_0 ;
 q — ciężar jednostki długości mostu [kN/m];
 p — intensywność obciążenia zewnętrznego, rozłożonego równomiernie na odcinku kroku h [kN/m].

Dla skrajnych podpór wprowadzono warunki brzegowe (2.2 i 2.3):

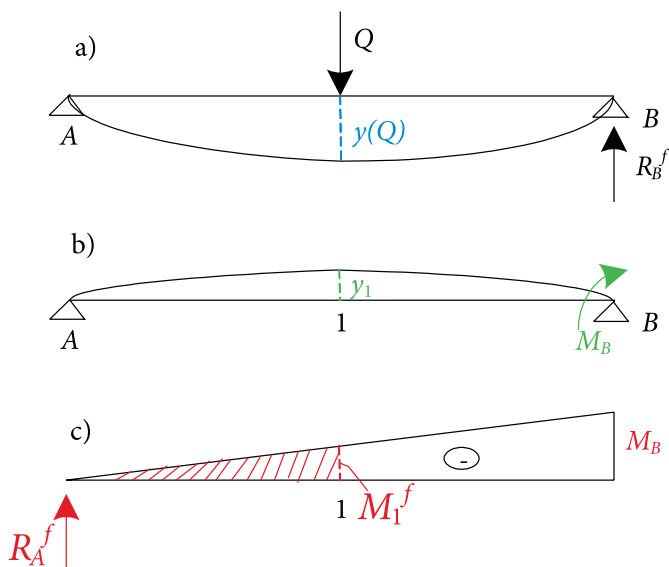
$$y_{-1} = y_1, \quad (2.2)$$

$$y_{2m-1} = y_{2m+1}. \quad (2.3)$$

gdzie: m — liczba składników w przęśle.

2.2.2. Metoda ścisła

W podejściu ścisłym wykorzystano metodę trzech momentów. Wartość momentu podporowego M_B (rys. 2.1) wyznaczmy z zależności 2.4. Schemat postępowania przy wyznaczeniu ugięcia w środku pierwszego przęsła przedstawia rysunek 2.2.



Rys. 2.2. Schemat obliczeniowy: a) ugięcia od siły Q , b) ugięcia od momentu podporowego M_B , c) moment fikcyjny w punkcie 1

$$M_B = -\frac{3 R_B^f}{2 L}, \quad (2.4)$$

gdzie: $R_B^f = \frac{QL^2}{16}$ — reakcja fikcyjna na podporze B.

Moment fikcyjny M_1^f wyznaczmy ze wzoru 2.5:

$$M_1^f = R_A^f \frac{L}{2} - \frac{M_B L}{8} \frac{1}{3} \frac{L}{2}, \quad (2.5)$$

gdzie: $R_A^f = \frac{M_B}{6} L$.

Ugięcie od momentu podporowego środka przęsła (pkt 1) wyznaczmy ze wzoru 2.6, natomiast ugięcie całkowite ze wzoru 2.7:

$$y_1 = \frac{M_1^f}{EJ_z}, \quad (2.6)$$

$$y_c = y(Q) + y_1. \quad (2.7)$$

2.2.3. Analiza porównawcza

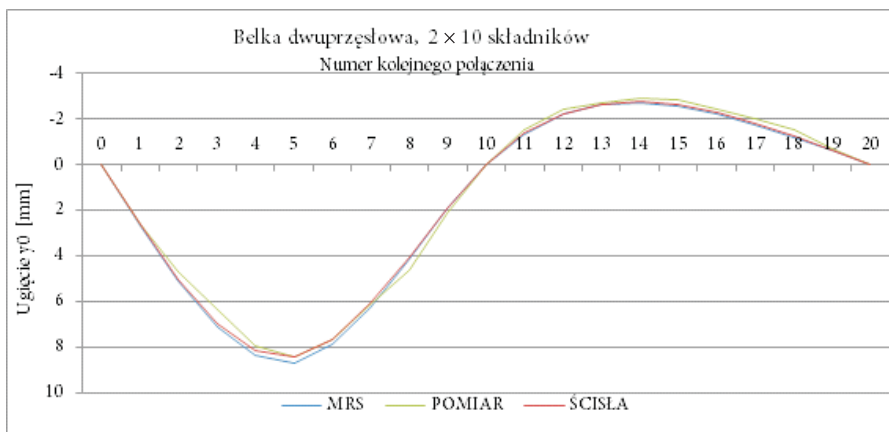
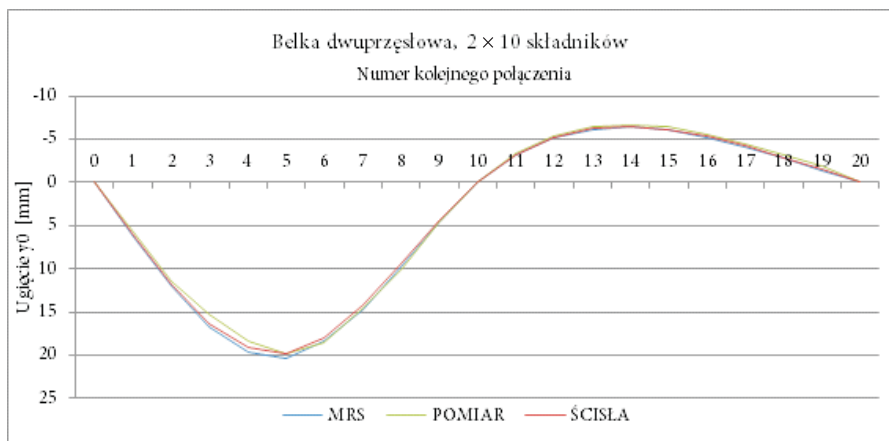
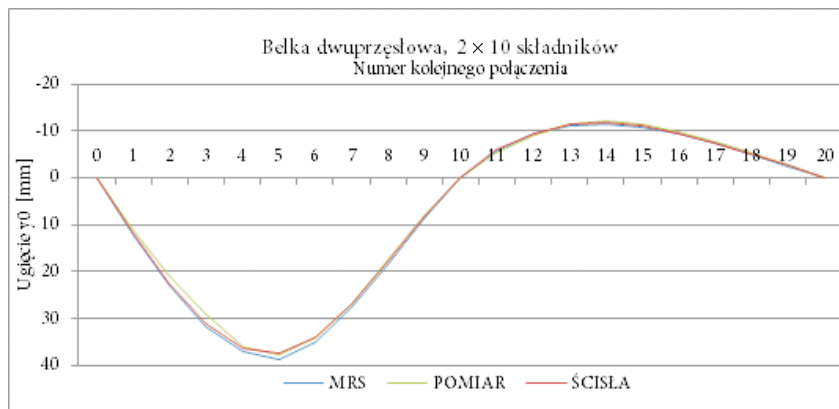
Dla poszczególnych rozpiętości przęseł, obciążeń i kątów obrotu między składnikami określono sztywności zastępcze na podstawie zależności (1.6). Wartości tych sztywności zestawiono w tabeli 2.3.

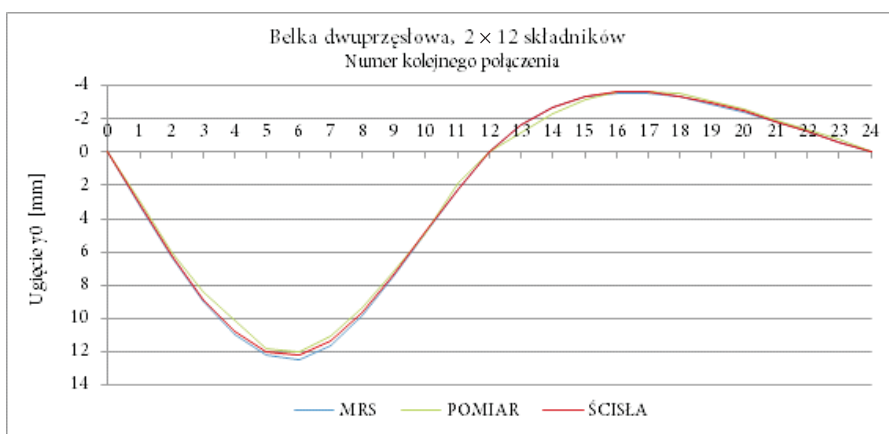
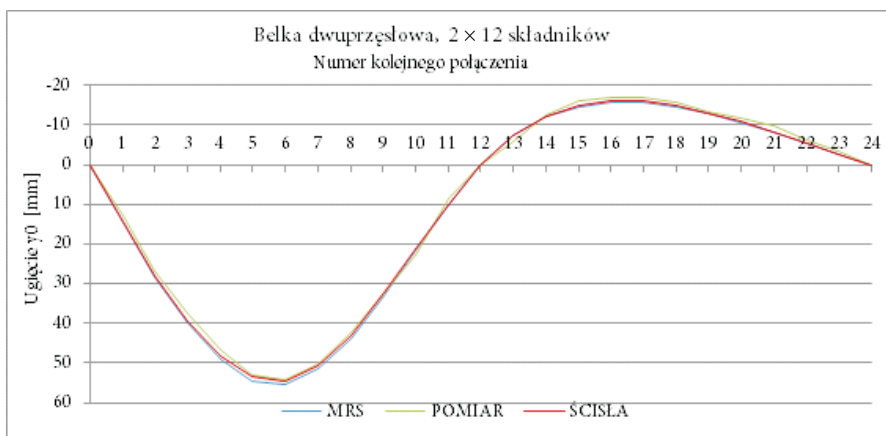
TABELA 2.3

Sztywności zastępcze dla poszczególnych wariantów

| Schemat belki | Obciążenie Q [kN] | Sztywność zastępcza EJ_z [kNm ²] | | |
|--|-------------------|--|---------------|---------------|
| | | Kąt obrotu φ_0 | | |
| | | 0,00535 | 0,01295 | 0,02493 |
| Belka 2 × 10 składników $L = 2 \times 1,25$ m | 1,139 | 4,3013 | 1,8274 | 0,9584 |
| | 1,401 | 5,1615 | 2,2054 | 1,1590 |
| Belka 2 × 12 składników $L = 2 \times 1,50$ m | 1,139 | 5,1430 | 2,1974 | 1,1548 |
| | 1,401 | 6,1456 | 2,6434 | 1,3925 |

Na rysunkach 2.3÷2.7 dla wybranych pięciu przykładów przedstawiono porównanie przemieszczenia modelu belki z pomiarów metodą analityczną MRS oraz sposobem ścisłym, w którym przemieszczenia określono na podstawie klasycznych wzorów na ugięcie belek monolitycznych. Uwzględniono przy tym sztywności zastępcze z tabeli 2.3.

Rys. 2.3. Odształcenie belki dla połączenia S_{w2} oraz obciążenia Q_2 Rys. 2.4. Odształcenie belki dla połączenia S_{w3} oraz obciążenia Q_2 Rys. 2.5. Odształcenie belki dla połączenia S_{w4} oraz obciążenia Q_1

Rys. 2.6. Odształcenie belki dla połączenia S_{w2} oraz obciążenia Q_1 Rys. 2.7. Odształcenie belki dla połączenia S_{w4} oraz obciążenia Q_1

2.2.4. Wnioski z przeprowadzonej analizy

Analizując powyższe wykresy, widać zbieżność wyników z pomiarów z wynikami MRS i metodą ścisłą. Dla poszczególnych przykładów w tabeli 2.4 przedstawiono różnice ugięć w środku pierwszego i drugiego przęsła w stosunku do pomierzonych. Różnice w metodzie MRS nie przekraczają 4% w pierwszym przęsle i 7% w przęsle drugim. W przypadku metody ścisłej różnice maksymalne nie przekraczają odpowiednio 2 i 6%.

TABELA 2.4

Porównanie ugięć w środkach przęseł

| Schemat belki | Miejsce pomiaru | Pomiar | Metoda MRS | | | Metoda ścisła | | |
|--------------------------------|-----------------|------------|------------|-------------|------|---------------|-------------|------|
| | | y_P [mm] | y_M [mm] | $y_M - y_P$ | % | y_B [mm] | $y_B - y_P$ | % |
| 2×10 S_{w2}, Q_2 | 5 | 8,446 | 8,689 | 0,243 | 2,9 | 8,432 | -0,014 | -0,2 |
| | 15 | -2,776 | -2,728 | 0,048 | -1,7 | -2,613 | 0,163 | -5,9 |
| 2×10 S_{w3}, Q_2 | 5 | 19,887 | 20,336 | 0,449 | 2,3 | 19,734 | -0,153 | -0,8 |
| | 15 | -6,395 | -6,031 | 0,364 | -5,7 | -6,116 | 0,279 | -4,4 |
| 2×10 S_{w4}, Q_1 | 5 | 37,712 | 38,561 | 0,849 | 2,3 | 37,411 | -0,301 | -0,8 |
| | 15 | -11,347 | -10,764 | 0,583 | -5,1 | -10,947 | 0,4 | -3,5 |
| 2×12 S_{w2}, Q_1 | 6 | 12,025 | 12,48 | 0,455 | 3,8 | 12,218 | 0,193 | 1,6 |
| | 18 | -3,551 | -3,308 | 0,243 | -6,8 | -3,354 | 0,197 | -5,5 |
| 2×12 S_{w4}, Q_1 | 6 | 54,397 | 55,572 | 1,175 | 2,2 | 54,414 | 0,017 | 0,0 |
| | 18 | -15,793 | -14,729 | 1,064 | -6,7 | -14,936 | 0,857 | -5,4 |

3. Podsumowanie i wnioski końcowe

W artykule podjęto problem zbadania odkształceń składanej belki dwuprzęsłowej, które następnie porównano z dwoma sposobami teoretycznymi. Jest to kontynuacja prowadzonych analiz opartych na badaniach modelowych pracy wieloprzęsłowych belek składanych. Z przeprowadzonych w tym artykule analiz można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Przedstawiona metodyka wyznaczenia sztywności zastępczej dla pierwszego przęsła obciążonego pozwala dość dokładnie odzwierciedlić odkształcenie konstrukcji dwuprzęsłowej belki składanej na całej jej długości. Różnice ugięć w środku przęseł nie przekraczają 4% w przęśle obciążonym i 7% w przęśle odciążonym.
2. Na podstawie przeprowadzonych badań doświadczalnych i analiz obliczeniowych można stwierdzić, że zasadne jest przyjmowanie stałej sztywności zastępczej w obu przęsłach dwuprzęsłowego mostu składanego.
3. Inaczej będzie z mostem składanym o większej liczbie przęseł. Przyjmowanie stałej sztywności zastępczej na całej długości powoduje duże rozbieżności ugięć w następnych przęsłach. Problem ten został zasygnalizowany już wcześniej w pracy [4] na podstawie analizy teoretycznej. Dlatego też kolejnym etapem będą badania modelowe na belce trójprzęsłowej opartej na podporach stałych.

Źródło finansowania artykułu — PBS-662/2017

Artykuł wpłynął do redakcji 10.07.2018. Zweryfikowaną wersję po recenzjach otrzymano 9.08.2018.

LITERATURA

- [1] BURSZTYNOWSKI Z., *Mosty składane. Podstawy obliczeń*, PWN, Warszawa, 1985.
- [2] MARSZAŁEK J. i in., *Mosty składane. Projektowanie, badania i eksploatacja*, podręcznik, Wydawca GDDKiA i WAT, Warszawa, 2005.
- [3] MARSZAŁEK J., PIECHOTA M., *Wyznaczanie funkcji kompensacji momentów podporowych z badań modelu belki składanej opartej na podporach podatnych*, Biuletyn WAT, 64, 3, 2015.
- [4] PIECHOTA M., *Analiza pracy mostów składanych na podporach podatnych obciążonych pojazdem w ruchu*, rozprawa doktorska, WAT, Warszawa, 2016.

J. MARSZAŁEK, M. PIECHOTA

**Verification of the equivalent stiffness method on the example of a model study
of a two-span folding beam based on fixed supports**

Abstract. The article covers the analysis of the equivalent stiffness method in a two-span folding beam based on fixed supports, carried out on the basis of model tests. The essence of this analysis was to check the deformation of the entire beam for the constant equivalent stiffness. For this purpose, detailed measurements of deflections at each beam connection were made for different: size of assembly clearances, load values and length of the spans. Then, the results of the measurements were compared with the theoretical results. Theoretical analysis was carried out using the strict method and the Finite Difference Method. The conducted analysis confirmed the possibility of adopting constant equivalent stiffness in two-span folding beams. This is a continuation of considerations regarding the work of multi-span folding beams.

Keywords: civil engineering, folding bridges, equivalent stiffness, assembly clearance

DOI: 10.5604/01.3001.0012.6661