Mariusz Poński

ZASTOSOWANIE RACHUNKU OPERATORÓW MIKUSIŃSKIEGO W PEWNYCH ZAGADNIENIACH DYNAMIKI KONSTRUKCJI

1. Metody transformacji całkowych

Najczęściej spotykaną metodą rozwiązywania problemów dynamiki budowli opisanych za pomocą równań różniczkowych o stałych współczynnikach jest metoda transformacji całkowych, między innymi transformacja Laplace'a (jako inne przykłady można wymienić transformację Fouriera lub Hankela) [1]. Metoda ta przekształca równanie różniczkowe w równanie algebraiczne, co w wielu przypadkach znacznie upraszcza rozwiązanie danego zagadnienia. Mając funkcję czasu $q(t)$, nazywaną oryginałem, można wyznaczyć transformatę Laplace'a, będącą funkcją zmiennej zespolonej $s = r + iu$ za pomocą wzoru [2]:

$$\mathcal{L}\{q(t)\} = \int_0^\infty q(t)\, e^{-st} dt = F(s) \tag{1}$$

Po dokonaniu odpowiednich operacji algebraicznych dokonuje się przekształcenia odwrotnego. Transformację odwrotną definiuje się za pomocą następującego wzoru [2]:

$$q(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \lim_{u \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iu}^{x+iu} F(s)\, e^{st} ds \tag{2}$$

Ponieważ całka (2) jest niewłaściwa, więc nie dla wszystkich funkcji jest ona zbieżna lub jest zbieżna przy pewnych wartościach s, przy innych zaś jest rozbieżna. Warunkiem istnienia transformaty Laplace'a jest [2]:

$$|q(t)| < K \cdot e^{\rho t} \tag{3}$$

w którym ρ i K>0 to liczby rzeczywiste.

Dodatkowym problemem jest retransformata, która często wymaga całkowania po płaszczyźnie zespolonej, co może znacznie utrudnić rozwiązanie problemu (w praktyce korzysta się z gotowych tablic).

Metoda ta w wymienionych wyżej trzech etapach jest efektywna tylko wtedy, gdy cykl rozwiązywania będzie krótszy niż użycie metody bezpośredniej.

1.1. Podstawowe założenia metody operatorów Mikusińskiego

Nawiązując do pojęcia splatania funkcji oraz operacji do niej odwrotnej, Mikusiński podał matematyczne podstawy rachunku operatorów bez użycia przekształceń całkowych. Wyjściowym punktem teorii jest pojęcie splotu określonego za pomocą całki [3]:

$$f(t) = \int_0^t a(t-\tau)\, b(\tau) d\tau \tag{4}$$

co można zapisać w postaci[1][3]:

$$\{f(t)\} = \left\{ \int_0^t a(t-\tau)\, b(\tau) d\tau \right\} = \{a(t)\} \cdot \{b(t)\} \tag{5}$$

Operatory wprowadzone są jako pewnego rodzaju ułamki i stanowią uogólnienie pojęcia liczby. Działania na nich wykonuje się tak jak na liczbach.

Przy uwzględnieniu twierdzenia Titchmarsha (mówiącego, że jeżeli funkcje określone i ciągłe w przedziale $0 \le t$ nie są tożsamościowo równe zero, to ich splot również nie jest tożsamościowo równy zero), można wprowadzić operację odwrotną do splotu (dzielenie splotowe) [3]:

$$\{a(t)\} = \frac{\{f(t)\}}{\{b(t)\}} \tag{6}$$

dla b(t) ≠ 0.

W przypadku liczb całkowitych nie zawsze możliwa jest operacja dzielenia bez reszty, co prowadzi do nowego typu liczb, jakimi są ułamki. Analogicznie do wyżej wymienionego przykładu, niewykonalność działania odwrotnego do splotu prowadzi do nowego pojęcia, jakim jest operator (jeżeli nie istnieje funkcja b spełniająca równanie $f = a \cdot b$, to ułamek (6) jest operatorem).

1.2. Operatory i działania na operatorach

Wykonując operację mnożenia splotowego, można przyjąć jedną z funkcji jako jednostkową [3]:

[1] Nawias {·} został wprowadzony w celu odróżnienia funkcji od wartości funkcji w punkcie.

$$\{1\} \cdot \{f(t)\} = \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} \tag{7}$$

co prowadzi do scałkowania funkcji *f*(*t*) w granicach od 0 do *t*. Tak dobrana funkcja {1} została nazwana operatorem całkowym. Kolejne potęgi operatora całkowego można wyznaczyć za pomocą wzoru [3]:

$$\{1\}^n = l^n = \left\{ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right\} \tag{8}$$

a więc przyjmując $\{f(t)\} = f$ można zapisać (wzór Cauchy'ego) [3]:

$$l^n \cdot f = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f(\tau) d\tau \tag{9}$$

Przy tak zdefiniowanym operatorze całkowym można wprowadzić jego odwrotność, czyli operator różniczkowy:

$$s = \frac{1}{l}$$

wobec czego:

$$s \cdot l = l \cdot s = 1$$

Jeżeli założymy że funkcja $f = \{f(t)\}$ ma ciągłą pochodną rzędu n dla $t \leq 0$, to można zapisać [3]:

$$sf = f' + f(0) \tag{10}$$

$$s^2 f = f'' + f'(0) + s \cdot f(0) \tag{11}$$

$$s^n f = f^{(n)} + f^{(n-1)}(0) + s f^{(n-2)}(0) + \ldots + s^{n-1} f(0) \tag{12}$$

2. Drgania układu o jednym stopniu swobody wymuszone siłą harmoniczną tłumione

Za pomocą zasady prac wirtualnych, równań Lagrange'a lub zasady Hamiltona można wyprowadzić równanie ruchu modelu obliczeniowego konstrukcji o jednym stopniu swobody z uwzględnieniem liniowego tłumienia wiskotycznego, wymuszonego siłą harmoniczną [4]:

$$\{mq''(t)\} + \{cq'(t)\} + \{kq(t)\} = \{P_0 \sin(pt)\} \tag{13}$$

W celu wyznaczenia funkcji $\{q(t)\}$ z warunkami początkowymi:

$$q(0) = q_0 \qquad q'(0) = v_0$$

należy wykorzystać wzory (10,11) oraz uwzględnić powyższe warunki, co prowadzi do:

$$s\{q(t)\} = \{q'(t)\} + q_0$$

$$s^2\{q(t)\} = \{q''(t)\} + v_0 + s \cdot q_0$$

Po wyznaczeniu z powyższych zależności $\{q'(t)\}$ oraz $\{q''(t)\}$ oraz podstawieniu do równania (13) otrzymuje się:

$$m(s^2\{q(t)\} - v_0 - s \cdot q_0) + c(s\{q(t)\} - q_0) + k\{q(t)\} = P_0 \frac{p}{(s^2 + p^2)}$$

następnie, wykonując kolejne operacje:

$$ms^2\{q(t)\} - mv_0 - msq_0 + csq\{(t)\} - cq_0 + k\{q(t)\} = P_0 \frac{p}{(s^2 + p^2)}$$

$$ms^2\{q(t)\} + cs\{q(t)\} + k\{q(t)\} = P_0 \frac{p}{(s^2 + p^2)} + (mv_0 + msq_0 + cq_0)$$

$$\{q(t)\}(ms^2 + cs + k) = P_0 \frac{p}{(s^2 + p^2)} + (mv_0 + msq_0 + cq_0)$$

uzyskuje się rozwiązanie w postaci operatorowej:

$$\{q(t)\} = \frac{P_0}{m} \frac{p}{(s^2 + p^2)(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m})} + \frac{v_0 + sq_0 + \frac{c}{m}q_0}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}} \tag{14}$$

Wykorzystując związki operatora różniczkowego z funkcją wykładniczą oraz wzorów Eulera wiążących funkcje sin(t), cos(t) z funkcją wykładniczą, można otrzymać następujące zależności[2] [3]:

$$\frac{\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} = \{e^{\alpha t}\sin(\beta t)\} \tag{15}$$

$$\frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} = \{e^{\alpha t}\cos(\beta t)\} \tag{16}$$

A w szczególności dla $\alpha = 0$:

$$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2} = \{\sin(\beta t)\} \tag{17}$$

[2] Podstawowe wzory rachunku operatorów oraz ich wyprowadzenie można znaleźć w monografii [3].

$$\frac{s}{(s)^2+\beta^2}=\{\cos(\beta t)\} \tag{18}$$

Dla uproszczenia dalszych rachunków równanie (14) można zapisać:

$$\{q(t)\}=q_a+q_b \tag{19}$$

gdzie:

$$q_a=\frac{P_0}{m}\frac{p}{(s^2+p^2)(s^2+\frac{c}{m}s+\frac{k}{m})} \tag{20}$$

$$q_b=\frac{v_0+sq_0+\frac{c}{m}q_0}{s^2+\frac{c}{m}s+\frac{k}{m}} \tag{21}$$

W celu dokonania przekształcenia odwrotnego w równaniu (20) należy wykorzystać wzory (15, 18) oraz przekształcić trójmian kwadratowy do postaci kanonicznej:

$$q_a=\frac{P_0}{m}\frac{p}{(s^2+p^2)}\frac{1}{\left(s+\frac{c}{2m}\right)^2+\left(\frac{k}{m}-\frac{c^2}{4m^2}\right)} \tag{22}$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$\alpha=-\frac{c}{2m}=-\xi\omega_0$$

oraz:

$$\beta=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{4m^2}}=\omega_0\sqrt{1-\xi^2}=\omega_d$$

równanie (22) można zapisać w postaci:

$$q_a=\left\{\frac{P_0}{m}\sin(pt)\right\}\left\{\frac{1}{\omega_d}e^{-\xi\omega_0 t}\sin(\omega_d t)\right\} \tag{23}$$

Wykorzystując twierdzenie o mnożeniu splotowym (5), równanie (23) można przedstawić w postaci całki:

$$q_a=\left\{\int_0^t\frac{P_0}{m}\sin(p(t-\tau))\frac{1}{\omega_d}e^{-\xi\omega_0\tau}\sin(\omega_d\tau)d\tau\right\} \tag{24}$$

Stosując podobne przekształcenia w równaniu (21), można otrzymać:

$$q_b = \left\{ \left(v_0 + \frac{c}{2m} q_0 \right) e^{-\xi \omega_0 t} \cos(\omega_d t) \right\} + \left\{ \frac{q_0}{\omega_d} e^{-\xi \omega_0 t} \sin(\omega_d t) \right\} \qquad (25)$$

Po wyznaczeniu całki (24) oraz po odpowiednich przekształceniach i wykorzystaniu podstawowych zależności znanych z dynamiki można otrzymać zamknięte rozwiązanie z uwzględnionymi warunkami początkowymi. Otrzymana zależność przedstawia drgania będące sumą drgań harmonicznych:

$$q(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t) + q_4(t)$$

gdzie:

$$q_1(t) = \frac{P_0}{k} \left(\frac{(1-\beta^2)\sin(pt) - 2\xi \cos(pt)\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right)$$

$$q_2(t) = e^{-\xi \omega_0 t} \left(\frac{P_0}{k} \frac{\beta v_0 + \xi p q_0}{p\sqrt{1-\xi^2}} \right) \sin(\omega_d t)$$

$$q_3(t) = e^{-\xi \omega_0 t} \left(\frac{P_0}{k} \left(\frac{2\xi^2 + \beta^3 - \beta}{\sqrt{1-\xi^2}\left((1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2\right)} \right) \right) \sin(\omega_d t)$$

$$q_4(t) = e^{-\xi \omega_0 t} \left(\frac{P_0}{k} \left(\frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} + q_0 \right) \cos(\omega_d t) \right)$$

$$\beta = \frac{p}{\omega_0}$$

$$k = {\omega_0}^2 m$$

Wnioski

Przedstawione rozważania pokazują, że metoda operatorów Mikusińskiego jako alternatywna do metod transformacji całkowych jest dobrym narzędziem do rozwiązywania podstawowych modeli dynamiki konstrukcji. Metoda ta nie wymaga wyznaczania całki niewłaściwej (1, 2), co w wielu przypadkach jest znacznym uproszczeniem rachunków. Metodę Mikusińskiego można z powodzeniem zastosować do równań różniczkowych cząstkowych[3] opisujących wiele zagadnień mechaniki [5, 6] oraz dynamiki budowli, m.in. drgania płyt.

[3] Metoda ta z zastosowaniami do zagadnień mechaniki jest szczegółowo omówiona w pracy [3].

Literatura

[1] Nowacki W., Dynamika budowli, Arkady, Warszawa 1971.
[2] Osiowski J., Zarys rachunku operatorów. Teoria i zastosowania w elektrotechnice, WNT, Warszawa 1981.
[3] Mikusiński J., Operational calculus, PWN - Pergamon Press, London, Warszawa, New York 1966.
[4] Chmielewski T., Zembaty Z., Podstawy dynamiki budowli, Arkady, Warszawa 1998.
[5] Paluszyński J., Pokorska I., Termomechanika materiałów porowatych poddanych skończonym deformacjom, ZN Politechniki Częstochowskiej 1997 nr 151, Budownictwo 7, 29-40.
[6] Kysiak A., Pokorska I., Numeryczna symulacja powstawania naprężeń spawalniczych w złączach elementów konstrukcji rurowych wykonanych ze stali stopowych o różnych strukturach, ZN Politechniki Częstochowskiej 1997 nr 151, Budownictwo 7, 41-47.

Streszczenie

W pracy przedstawiono zastosowanie rachunku operatorów Mikusińskiego do podstawowych zagadnień dynamiki konstrukcji budowlanych na przykładzie prostego modelu obliczeniowego drgań układu o jednym stopniu swobody. Metoda ta, nie oparta na metodach transformacji całkowych, jest efektywnym narzędziem do rozwiązywania liniowych równań różniczkowych o współczynnikach stałych.

The application of Mikusiński operators method in certain problems of dynamics of structures

Abstract

This article describes the use of Mikusiński operators method on basis of dynamics of structures, as an example of a simple computational model of vibration system with one degree of freedom. This method, not based on the methods of integral transform, is an effective tool for solving differential equations with constant coefficients.