ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XLI (2005)

HENRYK ŻOŁĄDEK (Warszawa)

Twierdzenie Atiyaha–Singera o indeksie i jego okolice

1. Wstęp. Israel M. Gelfand w 1960 r. wysunął w [28] przypuszczenie, że indeks różniczkowego operatora eliptycznego, czyli liczba liniowo niezależnych rozwiązań odpowiedniego równania jednorodnego minus liczba liniowo niezależnych rozwiązań sprzężonego równania, nie zmienia się przy deformacjach i powinien wyrażać się w terminach topologicznych. Michael F. Atiyah i Isadore M. Singer [18] udowodnili, że to rzeczywiście ma miejsce i że indeks jest równy całce po cyklu fundamentalnym rozmaitości z iloczynu charakteru Cherna wiązki różnicowej skonstruowanej za pomocą symbolu operatora i genusu Todda rozmaitości.

To pozornie niewinne twierdzenie zdominowało świat matematyczny drugiej połowy XX wieku. W 2004 r. jego autorzy zostali uhonorowani nagrodą Abela.

W tym artykule[1] postaram się przedstawić genezę powstania twierdzenia o indeksie (poczynając od twierdzenia Riemanna–Rocha i jego uogólnień). Przy tym nie obejdzie się bez wprowadzenia elementów topologii i geometrii algebraicznej (np. kohomologie snopów i klasy charakterystyczne wiązek). Samo twierdzenie Atiyaha–Singera będzie przedstawione z różnych punktów widzenia, m.in. poprzez równanie przewodnictwa cieplnego oraz za pomocą całek Feynmana. Z jego pomocą zinterpretujemy pewne klasyczne niezmienniki rozmaitości (charakterystyka Eulera, genus algebraiczny, sygnatura i spin-genus).

Spośród zagadnień związanych z twierdzeniem o indeksie krótko omówię uogólnienie twierdzenia Lefschetza o punktach stałych (Atiyah–Bott), asymetrię spektralną (Atiyah–Patodi–Singer) i wyrażenie torsji Reidemeistera za pomocą zregularyzowanych wyznaczników (Ray–Singer). Nie można było pominąć także konstrukcji Atiyaha–Drinfelda–Hitchina–Manina instantonów. Na zakończenie przedstawię próbę konstrukcji 3-wymiarowej topologicznej kwantowej teorii pola podjętą przez Atiyaha w [7].

---

[1] Praca napisana w ramach tematu KBN No 1 P03A 015 29.

2. Twierdzenie Riemanna–Rocha

A. Funkcje meromorficzne z zadanynmi biegunami. Niech M będzie (zwartą i spójną) powierzchnią Riemanna genusu g. Niech $p_1, \dots, p_d$ będzie układem punktów w M. Formalną sumę $D = p_1 + \dots + p_d$ nazywamy *dywizorem* na M. Jest to szczególny przypadek ogólnego dywizora $D = \sum_{j=1}^{m} n_j \cdot p_j$, gdzie współczynniki n_j są całkowite. Jeśli wszystkie $n_j \geq 0$, to mówimy, że dywizor jest *efektywny* i piszemy $D \geq 0$. Przez $d = \deg D = \sum n_j$ oznaczamy *stopień* dywizora.

Na M nie ma zbyt wielu funkcji holomorficznych, są to tylko funkcje stałe. Ale jeśli dopuścić bieguny, to takich funkcji już może być więcej; na przykład $f(z) = z$ na $\mathbb{CP}^1$ z biegunem w $z = \infty$. Twierdzenie Riemanna–Rocha dotyczy pytania o wymiar przestrzeni funkcji meromorficznych z biegunami w zbiorze $\{p_1, \dots, p_d\}$ i rzędami biegunów co najwyżej 1. Tę przestrzeń oznacza się przez $H^0(M, \mathcal{O}(D))$, $D = p_1 + \dots + p_d$.

Z każdą funkcją meromorficzną f na M można związać jej dywizor zer i biegunów $(f) = \sum_{p-zera} n_p \cdot p - \sum_{q-bieguny} m_q \cdot q$ (n_p, m_q to rzędy zer i biegunów); jest to tzw. *dywizor główny*. Dla ogólnego dywizora mamy następującą przestrzeń

$$H^0(M, \mathcal{O}(D)) = \{f : (f) + D \geq 0\}.$$

Na przykład, jeśli $D = -p_0$, to $H^0(M, \mathcal{O}(D))$ składa się z funkcji holomorficznych zerujących się w p_0; zatem $H^0(M, \mathcal{O}(-p_0)) = 0$. Ogólniej, $H^0(M, \mathcal{O}(-D)) = 0$ dla efektywnego dywizora D. Widać też, że $H^0(M, \mathcal{O}(D)) \simeq H^0(M, \mathcal{O}(D'))$, jeśli różnica $D - D' = (h)$ jest dywizorem głównym; takie dywizory D, D' są często traktowane jako równoważne.

B. Różniczki holomorficzne. W monografii P. Griffithsa i J. Harrisa [31] znajduje się geometryczne wyprowadzenie wzoru na $h^0(D) = \dim H^0(M, \mathcal{O}(D))$. Jest ono wystarczająco elementarne, aby je tutaj przedstawić.

Dla uproszczenia załóżmy, że $D = p_1 + \dots + p_d$ i $d \geq g \geq 1$. Zamiast funkcji f takich, że $(f) + D \geq 0$, będziemy rozważać ich różniczki df. Każda taka różniczka ma w p_j biegun rzędu co najwyżej 2 i zerowe residuum; ponadto jej *okresy*, czyli całki $\int_\gamma df$ po cyklach γ z $H_1(M, \mathbb{Z})$, też są zerowe. Z drugiej strony, każda różniczka holomorficzna η spełniająca powyższe warunki (rzędy biegunów w p_i nie przekraczające 2, $res_{p_i}\eta = 0$ i $\int_\gamma \eta = 0$) definiuje funkcję z $H^0(M, \mathcal{O}(D))$ wzorem $f(x) = \int_{x_0}^{x} \eta$. Następujący lemat będzie udowodniony później.

(2.1) *Dla każdego punktu $p \in M$ istnieje różniczka holomorficzna w $M \setminus p$ z biegunem drugiego rzędu i zerowym residuum w p.*

Przypomnę jeszcze pewne standardowe fakty o geometrii powierzchni Riemanna.

(2.2) *Dla $g \geq 1$ istnieje układ pętli $\gamma_1, \ldots, \gamma_g, \delta_1, \ldots, \delta_g$ w M, które rozcinają M tak, że po rozcięciu dostaje się wielokąt W z $4g$ bokami odpowiadającymi kolejno $\gamma_1, \delta_1, \gamma_1^{-1}, \delta_1^{-1}, \ldots, \gamma_g, \delta_g, \gamma_g^{-1}, \delta_g^{-1}$.*

(2.3) *Dla $g \geq 1$ istnieje g liniowo niezależnych różniczek holomorficznych $\omega_1, \ldots, \omega_g$ na M i takich, że $\int_{\gamma_i} \omega_j = \delta_{ij}$. Na przykład, dla krzywej hipereliptycznej $y^2 = P(x)$ te 1-formy są postaci $x^j dx/y$.*

(2.4) *Każda różniczka meromorficzna ρ wyznacza swój dywizor zer i biegunów $K = (\rho)$ stopnia $2g-2$. Klasa równoważności dywizora K nazywa się* dywizorem kanonicznym.

C. Wzór Riemanna–Rocha. Zastosujmy własność (2.1) do każdego z punktów p_i. Dodając odpowiednie formy holomorficzne (z własności (2.3)), uzyskujemy następujący fakt:

(2.5) *Każdemu wektorowi $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{C}^d$ można jednoznacznie przyporządkować 1-formę holomorficzną η_a w $M \setminus \{p_1, \ldots, p_d\}$ taką, że $\eta_a = [a_i z_i^{-2} + O(1)]dz_i$ w otoczeniu p_i (z lokalną współrzędną z_i) oraz $\int_{\gamma_j} \eta_a = 0$.*

Przenieśmy teraz wszystkie powyższe funkcje i różniczki do wielokąta W (pozostawiając te same oznaczenia). Możemy określić funkcje $\Omega_j(z) = \int_{z_0}^{z} \omega_j$, $z \in W$, oraz formy meromorficzne $\Omega_j \eta_a$. Wyrażając całkę z $\Omega_j \eta_a$ po brzegu ∂W za pomocą okresów z jednej strony i za pomocą residuów w p_k z drugiej, dostaje się następujące 'prawo wzajemności'

$$\int_{\delta_j} \eta_a = 2\pi i \sum_k a_k \frac{\omega_j}{dz_k}(p_k). \tag{2.6}$$

Odsyłam czytelnika do [31] po więcej szczegółów.

My chcemy, aby całki w (2.6) zerowały się. Mamy zatem odwzorowanie $A : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^g$, $a \to \left(\int_{\delta_1} \eta_a, \ldots, \int_{\delta_g} \eta_a\right)$, które zadaje się za pomocą macierzy wymiaru $g \times d$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\omega_1}{dz_1}(p_1) & \cdots & \frac{\omega_1}{dz_d}(p_d) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\omega_g}{dz_1}(p_1) & \cdots & \frac{\omega_g}{dz_d}(p_d) \end{pmatrix}.$$

Zatem $h^0(D) = \dim\ker A + 1$.

Z drugiej strony, indeks macierzy A zależy tylko od jej wymiarów i wynosi $\dim\ker A - \dim\operatorname{coker} A = d - g$. Ale $\dim\operatorname{coker} A$ jest równy liczbie liniowo niezależnych holomorficznych różniczek zerujących się w $p_1, \ldots, p_d$. Każda taka różniczka jest traktowana jako element przestrzeni $H^0(M, \Omega^1(-D)) = \{\eta : (\eta) - D \geq 0\}$. Poniżej snop $\Omega^1(-D)$ utożsamimy ze snopem $\mathcal{O}(K-D)$.

Twierdzenie Riemanna–Rocha zamyka się w następującym wzorze:

$$h^0(D) - h^0(K-D) = d - (g-1). \tag{2.7}$$

W istocie Riemann udowodnił tylko, że $h^0(D) \geq d - g + 1$, a poprawkę wyliczył Roch. W zastosowaniach często okazuje się, że $h^0(K-D) = 0$ (np. gdy $D - K$ jest efektywny) i dlatego wzór (2.7) jest tak użyteczny.

D. Interpretacja topologiczna. Teraz zinterpretujemy wzór (2.7) w terminach wiązek liniowych i ich klas charakterystycznych.

Istnieje wzajemna jednoznaczność pomiędzy holomorficznymi *wiązkami liniowymi* (tzn. z 1-wymiarowym włóknem) E nad M i klasami równoważności dywizorów na M. Wybierając meromorficzny przekrój $s : M \to E$ wiązki definiujemy dywizor $D = (s)$ jego zer i biegunów. Z drugiej strony, jeśli $D = \sum n_i \cdot p_i$, to wybieramy pokrycie $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ powierzchni M takie, że $U_\alpha \cap p_i = \{\psi_{\alpha,i} = 0\}$ (jeśli $p_i \notin U_\alpha$ to kładziemy $\psi_{\alpha,i} \equiv 1$). Z rozłącznej sumy $\bigsqcup_\alpha U_\alpha \times \mathbb{C}$ konstruujemy wiązkę E przy pomocy sklejeń $(x, y) \sim (x, \varphi_{\alpha,\beta}(x)y)$, $\varphi_{\alpha,\beta} = \prod_i (\psi_{\alpha,i}/\psi_{\beta,i})^{n_i}$ nad $U_\alpha \cap U_\beta$. Ta odpowiedniość przenosi się na przypadek rozmaitości zespolonych wyższych wymiarów (na przykład rzutowych rozmaitości algebraicznych).

Jeśli wiązka E jest stowarzyszona z dywizorem D, to przez E^{-1} oznacza się wiązkę stowarzyszoną z dywizorem $-D$, a sumie dywizorów odpowiada iloczyn tensorowy wiązek liniowych. Na przykład, $E \otimes E^{-1}$ jest wiązką trywialną.

Ważna w geometrii algebraicznej jest tzw. *wiązka Hopfa* (związana z rozwłóknieniem Hopfa S^3 nad S^2) L nad $\mathbb{CP}^n$ z funkcjami przejścia $\varphi_{i,j} = z_i/z_j$ (w jednorodnych współrzędnych $(z) = (z_0 : \ldots : z_n)$), taka, że $H = L^{-1}$ ma przekroje liniowe $\sum a_j z_j$. Włóknem $L_{(z)}$ nad (z) jest prosta $\mathbb{C} \cdot (z_0, \ldots, z_n) \subset \mathbb{C}^{n+1}$.

Z każdą holomorficzną wiązką wektorową F (niekonieczne liniową) jest stowarzyszony snop $\mathcal{O}(F)$ jej lokalnych (holomorficznych) przekrojów. Rozważa się także snopy $\Omega^k(E)$ kiełków holomorficznych k-form o wartościach w F. Snopy $\mathcal{O}(H^m) = \mathcal{O}(H^{\otimes m}) = \mathcal{O}(L^{-m})$ nad $\mathbb{CP}^n$ są oznaczane przez $\mathcal{O}(m)$, a snopy $\mathcal{O}(E \otimes H^m)$ przez $E(m)$.

Kohomologie Čecha $H^q(M, \mathcal{F})$ snopa $\mathcal{F}$ są definiowane przy pomocy pokryć i stanowią ważne narzędzie w geometrii algebraicznej. Dla wiązek liniowych E nad zespoloną rozmaitością rzutową M (lub tylko rozmaitością Kählera) grupy $H^q(M, \Omega^p(E))$ utożsamia się jeszcze z następującymi obiektami:

– jako kohomologie Dolbeaulta związane z resolwentą $0 \to \Gamma(\Omega^p(E)) \xrightarrow{\bar\partial} \Gamma(\Omega^{p,1}(E)) \ldots$;

– jako formy harmoniczne typu (p, q) o wartościach w E (teoria Hodge'a).

Odnotujmy jeszcze *dualność Kodairy–Serre'a*, tzn. niezdegenerowaność formy dwu-liniowej

$$H^q(M, \Omega^p(E)) \times H^{n-q}(M, \Omega^{n-p}(E^{-1})) \to \mathbb{C}, \quad n = \dim_{\mathbb{C}} M, \tag{2.8}$$

(całka z iloczynu zewnętrznego form harmonicznych) oraz izomorfizm

$$H^p(M,\Omega^q) \simeq \overline{H^q(M,\Omega^p)}. \tag{2.9}$$

W szczególności dla powierzchni Riemanna mamy

$$H^0(M,\Omega^1(-D)) \simeq H^1(M,\mathcal{O}(D)) \tag{2.10}$$

oraz $H^1(M,\Omega^1(p)) \simeq H^0(M,O(-p)) = 0$. Ta ostatnia równość wraz z długim ciągiem dokładnym $\ldots \to H^0(M,\Omega^1(2p)) \to H^0(M,\mathbb{C}_p) \to \to H^1(M,\Omega^1(p)) \to \ldots$, związanym z ciągiem dokładnym snopów $0 \to \Omega^1(p) \to \Omega^1(2p) \to \mathbb{C}_p \to 0$ (gdzie $\mathbb{C}_p$ ma nośnik w p) pozwala udowodnić lemat (2.1).

Wzór (2.9) pokazuje, że lewą stronę tożsamości Riemanna–Rocha (2.7) można przedstawić w postaci 'charakterystyki Eulera'

$$\chi(M,E) = \chi(M,D) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim H^i(M,\mathcal{O}(E)), \tag{2.11}$$

$n = 1$, nazywanej *genusem arytmetycznym* wiązki E stowarzyszonej z dywizorem D.

Prawa strona tożsamości (2.7) ma dwa składniki: d (charakteryzujący dywizor) i $1 - g$ (charakteryzujący powierzchnię Riemanna). My je zinterpretujemy następująco:

$$d = \int_M c_1(E), \quad 1 - g = \frac{1}{2}\int_M c_1(T_{hol}), \tag{2.12}$$

gdzie $T_{hol} \simeq K^{-1}$ jest holomorficzną wiązką styczną do M (dualną do wiązki kanonicznej $\Omega^1 \simeq K$), E jest wiązką stowarzyszoną z D, zaś $c_1(F) \in H^2(M,\mathbb{Z})$ jest tzw. pierwszą klasą Cherna wiązki zespolonej F (jej definicję podajemy w następnym rozdziale). Stosuje się także oznaczenie $c_1(E) = c_1(D)$. Całki w (2.12) można rozumieć albo jako całki z odpowiednich 2-form (nieholomorficznych) albo jako wartości 2-wymiarowych klas kohomologii na cyklu fundamentalnym $[M] \in H_2(M,\mathbb{Z})$, $\int_M c_1 = \langle c_1, [M]\rangle$.

W algebrze kohomologii $H^*(M,\mathbb{Z})$ można wprowadzić następujące obiekty (pełna klasa Cherna, charakter Cherna i genus Todda):

$$\begin{aligned} c(D) &= 1 + c_1(D), \\ \mathrm{ch}(D) &= e^{c_1(D)} = 1 + c_1(D), \\ Td(F) &= c_1(F)/[1 - e^{-c_1(F)}] = 1 + \tfrac{1}{2}c_1(F). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Wtedy prawa strona tożsamości (2.7) przyjmuje postać $\langle \mathrm{ch}(D) \cdot Td(T_{hol}), [M]\rangle$ i twierdzenie Riemanna–Rocha można zapisać następująco

$$\chi(M,D) = \langle \mathrm{ch}(D) \cdot Td(T_{hol}), [M]\rangle\,. \tag{2.14}$$

3. Twierdzenia Hirzebrucha

A. Klasy charakterystyczne wiązek wektorowych. Są to pewne kohomologiczne przeszkody, aby wiązka była trywialna.

Przykładem jest *klasa Eulera* $e(TM) \in H^n(M,\mathbb{Z})$, $n = \dim M$, wiązki stycznej do rzeczywistej rozmaitości M. Jest to klasa dualna w sensie Poincarégo do pewnego 0-wymiarowego cyklu, czyli elementu $H_0(M,\mathbb{Z})$. Ten cykl to $\sum_{X(p)=0} ind_p(X)\cdot p$, gdzie $X : M \to TM$ jest generycznym polem wektorowym z izolowanymi punktami osobliwymi $p \in M$ o indeksach $ind_p(X) = \pm 1$. Znane *twierdzenie Poincarégo–Hopfa* mówi, że $\langle e(TM), [M]\rangle = \sum ind_p(X)$ równa się *charakterystyce Eulera* rozmaitości $\sum(-1)^i b^i$, $b^i = \dim H^i(M,\mathbb{R})$. W geometrii zespolonej tę charakterystykę oznacza się przez $e(M)$, dla odróżnienia od *genusu algebraicznego*[2]

$$\chi(M) = \sum (-1)^i \dim H^i(M,\mathcal{O}) \tag{3.1}$$

(porównaj z (2.11)).

Uogólnienie klasy Eulera prowadzi do teorii przeszkód i tzw. klas charakterystycznych Stiefela–Whitney'a (patrz [DNF,I,9] i [36]). Spróbujmy skonstruować k liniowo niezależnych pól wektorowych $X_1,\dots,X_k$ na M. Możemy zakładać, że te pola tworzą układ ortonormalny (względem danej metryki riemannowskiej) w T_xM, czyli stanowią przekrój $s(x)$ wiązki z włóknem $V_{n,k} = SO(n)/SO(n-k)$ (rozmaitość Stiefela). Jeśli przedstawimy M w postaci CW-kompleksu z j-wymiarowymi szkieletami M_j, to możemy kolejno przedłużać przekrój ze szkieletu M_{j-1} do szkieletu M_j. Ponieważ M_j powstaje z M_{j-1} przez doklejanie j-wymiarowych komórek σ^j do M_{j-1}, to dostajemy kołańcuch $\sigma^j \to [s|_{\partial\sigma^j} : S^{j-1} \to V_{n,k}]$ o wartościach w grupie homotopii $\pi_{j-1}(V_{n,k})$. Ten kołańcuch okazuje się być kocyklem, a zatem definiuje element grupy $H^j(M,\pi_{j-1}(V_{k,n}))$, tzw. *przeszkodę*. Dalej, na ćwiczeniach z topologii algebraicznej wylicza się, że $\pi_i(V_{n,k}) = 0$ dla $i < n-k$ oraz $\pi_{n-k}(V_{n,k}) = \mathbb{Z}$ lub $= \mathbb{Z}_2$ w zależności od tego czy $n-k$ jest parzyste czy nieparzyste. Zatem pierwszą (nietrywialną) przeszkodą jest dobrze określony element $\alpha_{n-k+1} \in H^{n-k+1}(M,\mathbb{Z})$ lub $\in H^{n-k+1}(M,\mathbb{Z}_2)$. Z definicji *$q$-ta klasa Stiefela–Whitney'a* (wiązki TM) to $w_q = w_q(TM) = \alpha_q \bmod 2 \in H^{n-k+1}(M,\mathbb{Z}_2)$. Geometrycznie jest to klasa dualna (w $H^*(M,\mathbb{Z}_2)$) do cyklu (modulo 2) zdefiniowanego przez podrozmaitość złożoną z punktów liniowej zależności układu $n-q+1$ typowych pól wektorowych $X_1,\dots,X_{n-q+1}$. W szczególności, $w_n(TM) = e(TM) \bmod 2$. Ponadto zerowanie się $w_1(TM)$ oznacza orientowalność M.

Klasy charakterystyczne Cherna $c_j(E)$ są definiowane dla zespolonych wiązek wektorowych E, $\dim_{\mathbb{C}} E = k$, nad rozmaitością M (niekoniecznie

---

[2] Definicję (3.1) podajemy za monografią Hirzebrucha [32], ale we współczesnej literaturze z geometrii algebraicznej (n.p. [GH]) przyjęto nazywać genusem algebraicznym wielkość $g_a(M) = (-1)^n(\chi(M) - 1)$.

zespoloną). Analogicznie jak poprzednio, $c_j(E) \in H^{2j}(M,\mathbb{Z})$ jest klasą dualną do cyklu definiowanego jako zbiór punktów liniowej zależności $k-j+1$ typowych przekrojów $s_1,\dots,s_{k-j+1}$ wiązki E.

W szczególności, gdy M jest powierzchnią Riemanna i E jest holomorficzną wiązką liniową (t.j. $k=1$) nad M, to $c_1(E)$ jest kocyklem dualnym do cyklu miejsc zerowych typowego przekroju $s: M \to E$. Ponieważ każdy przekrój meromorficzny $s_{mer}: M \dashrightarrow E$ można zamienić na przekrój ciągły $s_{cont}: M \to E$ taki, że bieguny p przekroju s_{mer} stają się zerami s_{cont} z ujemnym indeksem, $ind_p(s_{cont}) = ord_p(s_{mer})$, to mamy

$$\langle c_1(E),[M]\rangle = \sum_{s_{cont}(p)=0} ind_p(s_{cont}) = \deg s_{mer} = \deg D.$$

W przypadku wiązek rzeczywistych E nad rzeczywistymi rozmaitościami M rozważa sie klasy Cherna kompleksyfikacji $E\otimes\mathbb{C}$ wiązki E. Wtedy $\overline{E\otimes\mathbb{C}}$ jest izomorficzne z $E\otimes\mathbb{C}$, co prowadzi do $c_{2j+1}(E\otimes\mathbb{C}) = 0$. Elementy $p_j(E) = (-1)^j c_{2j}(E\otimes\mathbb{C}) \in H^{4j}(M,\mathbb{Z})$ nazywają się *klasami Pontriagina* wiązki E.

Pełne klasy charakterystyczne zapisuje się w postaci szeregów w $H^*(M) = H^0(M)\oplus H^1(M)\dots$:

$$\begin{aligned} w(TM) &= 1+w_1+w_2+\dots \\ c(E) &= 1+c_1+c_2+\dots \\ p(E) &= 1+p_1+p_2+\dots \end{aligned} \tag{3.2}$$

Stosuje się też taki oto zapis:

$$c(E) = (1+\alpha_1)\dots(1+\alpha_k), \qquad k=\dim E; \tag{3.3}$$

wtedy c_j są funkcjami symetrycznymi od 2-wymiarowych klas α_i.

Klasy charakterystyczne c_j (oraz w_j i p_j) zachowują się naturalnie przy odwzorowaniach rozmaitości i przeciąganiu wiązek oraz spełniają następujące własności:

$$\begin{aligned} c(E\oplus F) &= c(E)c(F), \\ c(E\otimes F) &= \prod_{ij}(1+\alpha_i+\beta_j), \\ c(L) &= 1+\alpha, \end{aligned} \tag{3.4}$$

gdzie $c(F) = \prod(1+\beta_j)$ oraz L jest wiązką Hopfa nad $\mathbb{CP}^1$, zaś α generuje $H^2(\mathbb{CP}^n,\mathbb{Z})$. Naturalność i powyższe własności służą jako aksjomatyczna definicja klas Cherna. Odnotujmy jeszcze własności

$$c(T_{hol}\mathbb{CP}^n) = (1-\alpha)^{n+1}, \quad p(T\mathbb{CP}^n) = (1+\alpha^2)^{n+1}. \tag{3.5}$$

Wielowymiarowe uogólnienia *charakteru Cherna* i *genusu Todda* są następujące:

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(E) &= e^{\alpha_1}+\dots+e^{\alpha_k}, \\ Td(E) &= 1+T_1(E)+\dots = \prod_{j=1}^{k}\tfrac{\alpha_j}{1-e^{-\alpha_j}}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

gdzie prawe strony są symetrycznymi funkcjami od $\alpha_1, \ldots .\alpha_k$, czyli wielomianami od $c_1, c_2, \ldots, c_k$, np. $T_1 = \frac{1}{2}c_1$, $T_2 = \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2)$. Łatwo widać, że charakter Cherna jest homomorfizmem z pierścienia Grothendiecka $K(M)$ (wiązek zesponych nad M) do pierścienia kohomologii $H^*(M, \mathbb{Z})$:

$$\mathrm{ch}(E \oplus F) = \mathrm{ch}(E) + \mathrm{ch}(F), \quad \mathrm{ch}(E \otimes F) = \mathrm{ch}(E)\,\mathrm{ch}(F). \tag{3.7}$$

B. Twierdzenie Riemanna–Rocha–Hirzebrucha. W [32] F. Hirzebruch udowodnił następujące uogólnienie wzoru (2.7), zwane *twierdzeniem Riemanna–Rocha–Hirzebrucha*:

$$\chi(M, E) = \langle \mathrm{ch}(F) \cdot Td(T_{hol}M), [M] \rangle\,, \tag{3.8}$$

gdzie E jest holomorficzną wiązką wektorową nad rozmaitością zespoloną M, a χ jest genusem arytmetycznym zdefiniowanym w (2.11).

To twierdzenie jest powszechnie stosowane w teorii powierzchni zespolonych ($\dim_{\mathbb{C}} M = 2$): $1 - q(M) + p_g(M) = \frac{1}{12}\left\langle c_1^2 + c_2, [M] \right\rangle$, gdzie $c_{1,2} = c_{1,2}(T_{hol}M)$, $q(M) = \dim H^0(M, \Omega^1)$ jest *nieregularnością* powierzchni, a $p_g(M) = \dim H^0(M, \Omega^2)$ jest jej *genusem geometrycznym*.

Dowód wzoru (3.8) jest znacznie bardziej złożony niż dowód wzoru (2.7). Nie będziemy go tu omawiać. Za to bliżej zajmiemy się innym twierdzeniem Hirzebrucha (powiązanym z (3.8)).

C. Twierdzenie Hirzebrucha o sygnaturze. Załóżmy, że M jest *rozmaitością Kählera*, czyli że jest wyposażona w metrykę hermitowską, której część urojona jest formą symplektyczną ω (a część rzeczywista jest metryką riemannowską); na przykład, każda rozmaitość rzutowa posiada strukturę rozmaitości Kählera dzięki metryce Fubiniego–Study.

W (3.8) można brać zamiast E wiązki zespolone $\Omega^p = \Lambda^p(T^*_{hol}M)$ p-form holomorficznych. Definiujemy

$$\chi^p(M) = \chi(M, \Omega^p) = \sum_q (-1)^q h^{p,q},$$

gdzie $h^{p,q} = \dim H^q(M, \Omega^p)$. Wyrażają się one za pomocą klas $c_j(M) = c_j(T_{hol}M)$. Zatem i wyrażenie

$$\tau(M) = \sum_p \chi^p(M) \tag{3.9}$$

wyraża się za pomocą $c_j(M)$. Łatwo sprawdzić, że $\tau(M) = 0$ gdy n, wymiar M, jest nieparzysty (np. dla krzywej algebraicznej mamy $\tau(M) = (h^{0,0} - h^{0,1}) + (h^{1,0} - h^{1,1}) = 0$). Jeśli n jest parzyste, to z tzw. rozkładu Lefschetza i relacji Hodge'a (patrz [31]) wynika, że $\tau(M)$ jest sygnaturą formy przecięć $H^n(M, \mathbb{R}) \times H^n(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (liczba plusów minus liczba minusów postaci kanonicznej), czyli *sygnaturą* rozmaitości.

Definiujemy następujący *L-genus* rozmaitości

$$L(M) = 1 + L_1(p) + \ldots = \prod_{j=1}^{n} \frac{\sqrt{\beta_j}}{\tanh \sqrt{\beta_j}}, \tag{3.10}$$

gdzie $\beta_j \in H^{4j}(M, \mathbb{Z})$ zadają klasy Pontriagina $p_j = p_j(TM)$ wzorem $1 + p_1 + p_2 + \ldots = \prod(1 + \beta_j)$. Na przykład, $L_1 = \frac{1}{3}p_1$, $L_2 = \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2)$.

Twierdzenie Hirzebrucha o sygnaturze mówi, że

$$\tau(M) = \langle L(M), [M] \rangle . \tag{3.11}$$

Ponadto ta tożsamość zachodzi, gdy M jest dowolną rzeczywistą orientowalną rozmaitością wymiaru $4m$, a wielomiany $L_j = L_j(p_1, \ldots, p_j)$ są L-genusami od klas Pontriagina rozmaitości.

Sygnatura jest powiązana z innymi 'charakterystykami Eulera' poprzez tzw. wirtualny genus arytmetyczny $\sum y^p \chi^p(M)$ (patrz [32]), ale nie będziemy się nad tym zatrzymywać. Za to nakreślimy szkic dowodu tożsamości (3.11).

Po pierwsze, sygnatura ma następujące własności:

$$\tau(M_1 \cup M_2) = \tau(M_1) + \tau(M_2), \quad \tau(M_1 \times M_2) = \tau(M_1)\tau(M_2), \quad \tau(\partial N) = 0$$

(Thom [44]). Zatem jest to niezmiennik kobordyzmów. Niech Ω_j oznacza grupę kobordyzmów rozmaitości wymiaru j. R. Thom [44] udowodnił, że $\Omega_j \otimes \mathbb{Q} = 0$ dla $j \neq 4m$ i że grupa $\Omega_{4m} \otimes \mathbb{Q}$ jest generowana przez produkty kartezjańskie zespolonych przestrzeni rzutowych $\mathbb{CP}^{2n_1} \times \ldots \times \mathbb{CP}^{2n_r}$, $n_1 + \ldots n_r = m$. Te generatory są jednoznacznie wyznaczone przez jednomiany Pontriagina $p_{m_1} \cdots p_{m_s}$, $m_1 + \ldots + m_s = m$. Na przykład, $\Omega_4 \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \cdot \mathbb{CP}^2$, $\langle p_1, [\mathbb{CP}^2] \rangle = 3$, $\tau(\mathbb{CP}^2) = 1$ oraz $\Omega_8 \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \cdot \mathbb{CP}^4 + \mathbb{Q} \cdot \mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2$, $\langle p_1^2, [\mathbb{CP}^4] \rangle = 25$, $\langle p_1^2, [\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2] \rangle = 18$, $\langle p_2, [\mathbb{CP}^4] \rangle = 10$, $\langle p_2, [\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2] \rangle = 9$, $\tau(\mathbb{CP}^4) = 1$, $\tau(\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2) = 1$ (patrz (3.5)). Również sygnatura jest wielomianem quasi-jednorodnym od klas Pontriagina stopnia m. Wystarczy zatem ją policzyć na iloczynach rozmaitości rzutowych i w ten sposób wyznaczyć współczynniki tego wielomianu. Okazuje się, że tym wielomianem musi być $L_m(p_1, \ldots, p_m)$.

4. Twierdzenie Atiyaha–Singera

A. Indeks analityczny. Niech M będzie zwartą, zorientowaną, gładką (rzeczywistą) rozmaitością (wymiaru n), a E i F będą zespolonymi wiązkami nad M. Rozważa się liniowe operatory różniczkowe

$$D : \Gamma(E) \to \Gamma(F),$$

tzn. liniowe operatory na przestrzeni $\Gamma(E) = \Gamma(M, E)$ gładkich przekrojów, które lokalnie (tj. w trywializacjach $U_\alpha \times \mathbb{C}^k \subset E$ lub $\subset F$) wyrażają się za pomocą macierzy utworzonych z kombinacji pochodnych cząstkowych

$\partial_x^\gamma = \partial_{x_1}^{\gamma_1} \dots \partial_{x_n}^{\gamma_n}$ ze współczynnikami zależnymi od $x \in U_\alpha$. *Rzędem* m *operatora* D nazywa się największy rząd $|\gamma| = \gamma_1 + \dots \gamma_n$ spośród pochodnych cząstkowych występujących w D. *Symbolem operatora* $\sigma(D)$ nazywa się objekt powstały z D przez odrzucenie wszystkich pochodnych cząstkowych rzędu $< m$ i zastąpienie ∂_{x_j} przez $i\xi_j$. Traktując ξ_j jako współrzędne w T^*M możemy traktować symbol $\sigma(D)$ jako homomorfizm wiązek $\sigma(D) : \pi^*E \to \pi^*F$, gdzie $\pi : T^*M \to M$ jest rzutowaniem, a $\pi^*E = T^*M \times_\pi E = \{(z,e) : \pi(z) = \pi_E(e)\}$ jest cofnięciem wiązki E (z takimi samymi włóknami co i E). Operator D nazywa się *eliptycznym,* jeśli macierze $\sigma(D)(x,\xi)$ są odwracalne dla $\xi \neq 0$; w szczególności, wymiary (zespolone) włókien E_x i F_x powinny być takie same (równe k).

Przykładami operatorów różniczkowych są: *laplasjan* $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$ na $E = F = \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}$ i z symbolem $-\sum \xi_i^2$ oraz *operator Cauchy'ego-Riemanna* (a w zasadzie jego kompleksyfikacja) $\frac{\partial}{\partial \bar z}(u,v) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})$ na $E = F = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2$ i z symbolem $\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \xi_1 & -\xi_2 \\ \xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix}$. Tutaj rozmaitość $M = \mathbb{R}^n$ nie jest zwarta; w zwartym przypadku Δ zastępuje się operatorem Laplace'a–Beltramiego d^*d, a $\frac{\partial}{\partial \bar z}$ zastępuje się przez $\bar\partial + \bar\partial^*$ (patrz niżej).

Jedną z podstawowych własności operatorów eliptycznych jest fakt, że przestrzenie $\ker D$ i $\operatorname{coker} D = \Gamma(F)/D\Gamma(E) \simeq \ker D^*$ (gdzie D^* oznacza operator formalnie sprzężony względem pewnych metryk na M, E, F) są skończenie wymiarowe; główny powód to fakt, że operatory $(D^*D + 1)^{-1}$ i $(DD^* + 1)^{-1}$ są zwarte. *Indeksem analitycznym* (lub po prostu indeksem) operatora eliptycznego D nazywa się liczba

$$i_{an} D = \dim\ker D - \dim\ker D^*. \tag{4.1}$$

B. Indeks topologiczny. Niech, jak powyżej, D będzie różniczkowym operatorem eliptycznym. Oznaczmy przez $B(M)$ i $S(M)$ wiązki kul i sfer jednostkowych w T^*M z rzutowaniami π_B i π_S na M. Ograniczenie symbolu $\sigma(D)$ do $S(M)$ zadaje izomorfizm σ_S wiązek π_S^*E i π_S^*F nad $S(M)$. Ten izomorfizm pozwala skonstruować tzw. *element różnicowy* (lub wiązkę różnicową) $d(D) = d(\pi_S^*E, \pi_S^*F, \sigma_S)$ *grupy Grothendiecka* $K(B(M), S(M)) = K(B(M)/S(M))$.

Przypomnijmy, że grupa $K(X)$ składa się z wyrażeń $K - L$, czyli 'różnic' wiązek K i L nad X (dokładniej, klas izomorficznych wiązek), przy czym N w ciągu dokładnym $0 \to K \to N \to L \to 0$ jest utożsamiane z $K + L$ w $K(X)$. Funktory $K^0(X) = K(X)$, $K^1(X) = K(S^1 \times X)$, $K^2(X) = K(S^2 \times X) \overset{Bott}{=} K(X)$, $K(X,Y) = K(X/Y)$ tworzą pewną teorię kohomologii. W szczególności dla pary przestrzeni (X,Y) mamy ciąg dokładny K-grup

$$\dots \to K(X,Y) \xrightarrow{p^*} K(X) \xrightarrow{i^*} K(Y) \to \dots,$$

gdzie $p : X \to X/Y$ jest ściągnięciem a $i : Y \to X$ włożeniem. Jeśli $\sigma : K|_Y \to L|_Y$ zadaje izomorfizm wiązek, to *element różnicujący* $d(K, L, \sigma)$ jest pewnym elementem z $K(X, Y)$ o własności $p^*d(K, L, \sigma) = K - L$ w $K(X)$. Element $d(K, L, \sigma)$ wyznacza się jednoznacznie, ale w dosyć skomplikowany sposób (patrz [18], [39]).

Dalej, para rozwłóknień topologicznych $(B(M), S(M))$ jest orientowalna (bo M jest orientowalna). Elementy jej grup kohomologii są postaci $\pi^*a{\cdot}U = \pi^*a \cup U \in H^{j+n}(B(M), S(M))$, gdzie $a \in H^j(M)$, zaś $U \in H^n(B(M), S(M))$ jest tzw. *klasą orientacji* taką, że jej ograniczenie na dowolne włókno $(B(M)_x, S(M)_x) \simeq (D^n, S^{n-1})$ generuje $H^n(D^n, S^{n-1}, \mathbb{Z})$. Mamy tzw. *izomorfizm Thoma*

$$\phi_* : H^*(B(M), S(M)) \to H^{*-n}(M); \tag{4.2}$$

(w szczególności, $\phi_*(U^2) = e(T^*M)$ jest klasą Eulera wiązki kostycznej).

Z elementem różnicującym $d(D) = d(\pi_S^*E, \pi_S^*F, \sigma_S)$ są związane jego klasy Cherna oraz charakter Cherna $\mathrm{ch}(d(D)) \in H^*(B(M), S(M), \mathbb{Z})$. Definiujemy *charakter Cherna operatora* D jako

$$\mathrm{ch}(D) = \phi_*[\mathrm{ch}(d(D))] \in H^*(M, \mathbb{Z}). \tag{4.3}$$

Następnie definiujemy genus Todda rozmaitości jako

$$\mathcal{T}(M) = Td(TM \otimes \mathbb{C}), \tag{4.4}$$

czyli jako genus Todda kompleksyfikacji wiązki stycznej. *Indeksem topologicznym operatora* D nazywamy liczbę

$$i_{top}D = \langle \mathrm{ch}(D) \cdot \mathcal{T}(M), [M] \rangle\,. \tag{4.5}$$

W punktach D i E poniżej podajemy sposób wyliczania $\mathrm{ch}(D)$ i $\mathcal{T}(M)$ w konkretnych przykładach.

C. Wzór Atiyaha–Singera. Znamienite *twierdzenie Atiyaha–Singera o indeksie* mówi, że

$$i_{an}D = i_{top}D \tag{4.6}$$

dla dowolnego eliptycznego operatora różniczkowego.

Ciekawe jest prześledzenie, w jaki sposób to twierdzenie zawojowało świat matematyczny. Zostało ono po raz pierwszy opublikowane w 11-stronicowej pracy [18] Atiyaha i Singera w 1963 r. ze szkicem dowodu. Pełny dowód został najpierw opublikowany w 1965 r. przez A. Borela, R. Solovay'a, F. Floyda, R. Seely'ego i R. Palaisa w książce [39] pod redakcją Palaisa; jest tam tylko jeden artykuł Atiyaha traktujący o indeksie operatora na rozmaitości z brzegiem. Twierdzenie o indeksie było także omawiane na seminarium H. Cartana i L. Schwartza w Paryżu. Dopiero w latach 1968 i 1971 pojawiła się seria prac [19] i [17], w których można znaleźć pełne (i zmodyfikowane w stosunku do pierwotnego dowodu) dowody twierdzenia o indeksie i jego uogólnień. Na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Moskwie w 1966 r. M. Atiyah dostał medal Fieldsa (głównie za to twierdzenie).

Pierwszy dowód twierdzenia Atiyaha–Singera (ten z [39]) opiera się na K-teorii i twierdzeniu Thoma o kobordyzmach, a jego idea jest następująca. Wzór (4.3) pozwala zdefiniować charakter Cherna dla dowolnego elementu $a \in K(B(M), S(M))$, a następnie jego indeks topologiczny $i_{top}a$ tak jak w (4.5). Ten ostatni indeks posiada szereg własności: addytywność względem sumy rozmaitości lub sumy Whitney'a wiązek, multyplikatywność względem iloczynu kartezjańskiego rozmaitości i (jednoczesnego) iloczynu tensorowego wiązek, zerowanie się, gdy $M = \partial N$ oraz normalizacja dla pewnych standardowych rozmaitości (jak $\mathbb{CP}^{2m}$ i S^{2m}) i wiązek. Tutaj $n = \dim M$ jest parzyste, bo dowodzi się, że $i_{top}D = 0$ dla eliptycznego operatora różniczkowego na rozmaitości o nieparzystym wymiarze. Podobnie jak w twierdzeniu Hirzebrucha o sygnaturze dowodzi się, że powyższe własności wyznaczają i_{top} jednoznacznie. Następnym etapem jest określenie indeksu analitycznego dla elementów $a \in K(B(M), S(M))$ przez przyporządkowanie elementowi a najpierw symbolu σ_a, a następnie operatora D_a takiego, że $\sigma_a = \sigma(D_a)$. Tutaj trzeba rozszerzyć klasę operatorów różniczkowych do tzw. algebry Seeley'a (eliptycznych operatorów całkowych). Pokazuje się, że i_{an} spełnia cytowane powyżej własności, a zatem musi pokrywać się z i_{top}.

W pracach [19] i [17] usunięto z dowodu teorię kobordyzmów.[3]

W punktach F i G poniżej opowiemy o jeszcze innych dowodach wzoru (4.6).

D. Zastosowania: charakterystyka Eulera, genus arytmetyczny, sygnatura. Myliłby się ten, kto spodziewałby się istotnego zastosowania twierdzenia o indeksie w jakościowej teorii równań różniczkowych cząstkowych. Jego autorzy są topologami i geometrami; dlatego też ich przykłady służą interpretacji pewnych geometrycznych niezmienników rozmaitości w terminach indeksów pewnych operatorów różniczkowych.

Najbardziej znanym niezmiennikiem rozmaitości jest jego *charakterystyka Eulera*

$$e(M) = \sum (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H^i_{dR}(M, \mathbb{C}) \tag{4.7}$$

(kohomologie de Rhama). Zakładając, że M posiada metrykę riemannowską $(\cdot,\cdot)_x$ (na TM, T^*M i $\Lambda^j T^*M$), przestrzenie gładkich zespolonych form różniczkowych $\mathcal{E}^j = \Gamma(\Lambda^j T^*M \otimes \mathbb{C})$ można wyposażyć w iloczyn hermitowski $(\theta, \eta) = \int_M (\theta(x), \eta(x))_x VOL(x)$ (gdzie VOL jest riemannowską formą

[3] Niedawno (czerwiec 2005 r.) P. Baum opowiadał o tym drugim dowodzie na Uniwersytecie Warszawskim i było to całkiem zrozumiałe.

objętości) oraz zdefiniować gwiazdkę Hodge'a $* : \mathcal{E}^j \to \mathcal{E}^{n-j}$

$$\theta(x) \wedge *\eta(x) = (\theta(x), \eta(x))_x VOL(x). \tag{4.8}$$

Teraz $\mathcal{E}^j$ są przestrzeniami prehilbertowskimi i można zdefiniować operatory sprzężone d^* różniczki zewnętrznej d : $(d^*\theta, \eta) = (\theta, d\eta)$. Zachodzą wzory $d^* = -*d*$ i $*^2 = (-1)^{j(n-j)}$ na $\mathcal{E}^j$. Teoria Hodge'a mówi, że grupy kohomologii de Rhama $H^j_{dR}(M, \mathbb{C})$ można utożsamiać z przestrzeniami *form harmonicznych*, tzn. takich, że $d\theta = 0$ i $d^*\theta = 0$ (oraz $\Delta\theta = 0$ dla $\Delta = dd^* + d^*d$).

Niech $n = \dim M = 2l$ będzie parzyste; w nieparzystym przypadku mamy $e(M) = 0$ (dualność Poincarégo). Zdefiniujmy wiązki zespolone

$$E = \bigoplus_{j=0}^{l} \Lambda^{2j} T^*M \otimes \mathbb{C}, \quad F = \bigoplus_{j=1}^{l} \Lambda^{2j-1} T^*M \otimes \mathbb{C} \tag{4.9}$$

oraz operator

$$D_{Eul} = d + d^* : \Gamma(E) \to \Gamma(F).$$

Nietrudno sprawdzić, że D_{Eul} jest eliptyczny oraz, że

$$i_{an} D_{Eul} = e(M). \tag{4.10}$$

Teraz zinterpretujmy *genus arytmetyczny* $\chi(M, W) = \sum(-1)^p \dim H^p (M, \mathcal{O}(W))$, dla rozmaitości kählerowskiej M i holomorficznej wiązki W, jako indeks pewnego operatora eliptycznego. Tutaj mamy

$$E = \bigoplus_{j=0} \Lambda^{2j} \overline{T^*_{hol} M} \otimes W, \quad F = \bigoplus_{j=1} \Lambda^{2j-1} \overline{T^*_{hol} M} \otimes W \tag{4.11}$$

oraz

$$D_\chi = \bar\partial + \bar\partial^* : \Gamma(E) \to \Gamma(F), \tag{4.12}$$

gdzie $\bar\partial^*$ jest operatorem sprzężonym do $\bar\partial$ względem metryki hermitowskiej (pochodzącej od metryki kählerowskiej). Ponadto wykorzystujemy fakt, że grupy $H^p(M, \mathcal{O}(W))$ można interpretować z jednej strony jako grupy kohomologii Dolbeaulta, a z drugiej jako przestrzenie form harmonicznych typu $(0, p)$ (które są również $\bar\partial$-harmoniczne, bo $\Delta_{\bar\partial} = \frac{1}{2}\Delta_d$).

Również *sygnatura* $\tau(M)$ $2l$-wymiarowej rozmaitości jest indeksem pewnego operatora różniczkowego. Tutaj $D_\tau = d + d^*$ (jak dla D_{Eul}), ale inaczej definiuje się wiązki E i F. Wprowadzamy inwolucję na $\Lambda^*(T^*M \otimes \mathbb{C})$

$$\iota = i^{r(r-1)+l} * : \Lambda^r(T^*M \otimes \mathbb{C}) \to \Lambda^{2l-r}(T^*M \otimes \mathbb{C}); \tag{4.13}$$

ponieważ $*^2 = (-1)^r$, to $\iota^2 = id$. Kładziemy E i F jako przestrzenie własne tej inwolucji odpowiadające wartościom własnym $+1$ i -1 odpowiednio. Ponieważ $\iota(d + d^*) = -(d + d^*)\iota$ (sprawdzić), to $D_\tau : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$. Jądro D_τ (odpowiednio D^*_τ) składa się z form harmonicznych $\theta \in H^* = H^*(M)$ takich, że $\iota\theta = \theta$ (odpowiednio $\iota\theta = -\theta$). Podprzestrzenie $H^r \oplus H^{2l-r}$, $r < l$, są niezmiennicze względem inwolucji i mają rozkład $H^r_+ \oplus H^r_-$ na podprzestrzenie własne; podobnie $H^l = H^l_+ \oplus H^l_-$. Łatwo widać, że $H^r_\pm = \{\alpha \pm \iota\alpha : \alpha \in H^r\}$; dlatego $\dim H^r_+ = \dim H^r_-$ dla $r < l$. Dalej, jeśli l jest nieparzyste, to $\iota = i*$ i odzorowanie $\eta \to \bar{\eta}$ zadaje izomorfizm H^l_+ z H^l_-. Gdy $l = 2m$ jest parzyste, to $\iota = *$ i $\int_M \eta \wedge *\eta = \pm \int_M (\eta, \eta) VOL$ dla $\eta \in H^l_\pm$. Stąd wynika, że

$$i_{an} D_\tau = \tau(M). \tag{4.14}$$

Operator D_τ jest w istotny sposób używany w pierwszym dowodzie twierdzenia Atiyaha–Singera (patrz [39]).

Następnym naszym zadaniem jest wyliczenie indeksu topologicznego operatorów D_{Eul}, D_χ i D_τ ze wzoru $\langle \mathrm{ch}(D)\mathcal{T}(M), [M]\rangle$. Do tego celu użyjemy następującego wzoru ([18], [39], [AS2, Ch. 19, Proposition 5.3])[4]:

$$\mathrm{ch}(D) = f^* \left(\frac{\mathrm{ch}(\tilde{X}) - \mathrm{ch}(\tilde{Y})}{e(\tilde{V}^*)} \right). \tag{4.15}$$

Tutaj $f : M \to B_G$ jest odwzorowaniem w tzw. *przestrzeń klasyfikującą* B_G wiązek wektorowych z grupą strukturalną G, a f^* jest indukowanym homomorfizmem w kohomologiach. Dla naszych celów wystarczy, gdy $G = SO(2l)$ lub $G = U(n)$.

Przypomnijmy, że istnieje uniwersalna wiązka $E_G \to B_G$ taka, że dowolna wiązka nad M z homomorfizmami sklejającymi z G jest postaci $f^* E_G$ dla pewnego odwzorowania ciągłego $f : M \to B_G$; (B_G jest granicą prostą grassmanianów z tautologicznymi wiązkami). Wiązki $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ i $\tilde{V}$ są postaci $P \times_G X = \{(p, v) : (pg, v) = (p, gv),\ g \in G\} = E_G \times_G X$, $P \times_G Y$ i $P \times_G V$, gdzie $P \to B_G$ jest tzw. *wiązką główną* z wł óknem G stowarzyszoną z E_G, zaś przestrzenie wektorowe X, Y, V są przestrzeniami reprezentacji grupy G (G-modułami). V jest takim rzeczywistym G-modułem, że $TM = f^*\tilde{V}$ i $T^*M = f^*\tilde{V}^*$, zaś X i Y są G-modułami związanymi z wiązkami E i F (te ostatnie są cofnięciami $\tilde{X}$ i $\tilde{Y}$ lub ich kompleksyfikacji). W (4.15) zależność od symbolu operatora $\sigma(D)$ nie jest zbyt istotna; zakłada się, że $\sigma(D)$ pochodzi od pewnego G-equiwariantnego izomorfizmu $\tilde{\sigma}$ wiązek $\pi_S^* \tilde{X}$ i $\pi_S^* \tilde{Y}$ nad $S(\tilde{V}^*)$.

W G istnieje *maksymalny torus* $T = S^1 \times \ldots \times S^1$ i mamy włożenie $\rho : B_T \to B_G$, gdzie $B_T = \mathbb{CP}^\infty \times \ldots \times \mathbb{CP}^\infty$. Klasy charakterystyczne (np. Cherna) wiązki E_G są konstruowane z generatorów x_j grupy $H^*(B_T) = \mathbb{Z}[\gamma_1, \ldots, \gamma_l]$, $\gamma_j \in H^2(\mathbb{CP}^\infty)$. Dokładniej, $H^*(B_G)$ składa się z tych elementów $H^*(B_G)$, które są niezmiennicze względem działania *grupy Weyla* (*twierdzenie Borela–Hirzebrucha*). W naszych przykładach grupa Weyla składa się z permutacji klas x_j.

---

[4] W różnych miejscach ten wzór jest podawany na różne sposoby, w zależności od wyboru orientacji w T^*M i definicji izomorfizmu Thoma; te sposoby nie zawsze są zgodne.

Dla przykładu, niech $G = SO(2l)$ i niech X będzie rzeczywistym G-modułem takim, że torus T działa jako suma prosta macierzy

$$\begin{pmatrix} \cos 2\pi\omega_j & -\sin 2\pi\omega_j \\ sim 2\pi\omega_j & \cos 2\pi\omega_j \end{pmatrix},$$

gdzie $\omega_j = \omega_j(t) \in Hom(T, S^1)$ są *wagami* modułu X. Wtedy $\omega_j : T \to S^1$ indukują odwzorowania $\tilde{\omega}_j : B_T \to B_{S^1} \simeq \mathbb{CP}^\infty$. Będziemy utożsamiać wagi ω_j z klasami $\tilde{\omega}_j^*(\gamma) \in H^2(B_T)$, gdzie γ jest generatorem $H^2(\mathbb{CP}^\infty)$. Okazuje się, że pełna klasa Cherna wiązki $\tilde{X} \otimes \mathbb{C}$ wynosi $c(\tilde{X} \otimes \mathbb{C}) = \prod(1 - \omega_j^2)$, zaś klasa Pontriagina wiązki $\tilde{X}$ wynosi $p(\tilde{X}) = \prod(1 + \omega_j^2)$. Ponadto klasa Eulera wiązki $\tilde{X}$ wynosi $e(\tilde{X}) = \prod \omega_j$.

W przypadku grupy $G = U(n)$ i zespolonego modułu X torus maksymalny T (złożony z diagonalnych macierzy) działa za pomocą macierzy diagonalnych w X z wartościami własnymi $e^{2\pi i \omega_j}$, gdzie $\omega_j = \omega_j(t) \in Hom(T, S^1)$ są *wagami* modułu X. Tutaj mamy $c(\tilde{X}) = \prod(1 + \omega_j)$ oraz $e(\tilde{X}) = \prod \omega_j$.

Policzmy teraz $i_{top} D_{Eul}$. Skorzystamy z następujących tożsamości: jeśli $c(N) = \prod(1+\alpha_i)$, to $c(\Lambda^k N) = \prod_{i_1<\ldots<i_k} (1+\alpha_{i_1}+\ldots+\alpha_{ik})$ oraz $\mathrm{ch}(\Lambda^k N) = \sum_{i_1<\ldots<i_k} e^{\alpha_{i_1}} \ldots e^{\alpha_{i_k}}$. Zatem $\sum(-1)^k \mathrm{ch}(\Lambda^k N) = \prod(1 - e^{\alpha_i})$.

Wybierając $SO(2l)$-moduł $V = \mathbb{R}^{2l}$ z wagami $\omega_1, \ldots, \omega_l$, zauważmy, że moduł $V \otimes \mathbb{C}$ ma wagi $\pm\omega_j$, a V^* ma wagi $-\omega_j$. Weźmy moduły $X = \bigoplus \Lambda^{2j} V^* \otimes \mathbb{C}$, $Y = \bigoplus \Lambda^{2j-1} V^* \otimes \mathbb{C}$. Wtedy $\mathrm{ch}(\tilde{X}) - \mathrm{ch}(\tilde{Y}) = \prod(1-e^{\omega_j})(1-e^{-\omega_j})$, $e(\tilde{V}^*) = \prod(-\omega_j)$ i wzór (4.15) daje nam charakter Cherna operatora

$$\mathrm{ch}(D_{Eul}) = f^*\left(\prod \frac{(1-e^{\omega_j})(1-e^{-\omega_j})}{-\omega_j}\right) = \prod \frac{(1-e^{\alpha_j})(1-e^{-\alpha_j})}{-\alpha_j},$$

gdzie $\alpha_j = f^*\omega_j$. Następnie genus Todda rozmaitości wynosi

$$\mathcal{T}(M) = Td(T^*M \otimes \mathbb{C}) = \prod \frac{\alpha_j}{1-e^{-\alpha_j}} \cdot \frac{-\alpha_j}{1-e^{\alpha_j}}.$$

Łącząc to wszystko razem widzimy, że $\mathrm{ch}(D_{Eul})\mathcal{T}(M) = \prod \alpha_j = e(TM)$ jest klasą Eulera wiązki stycznej i $i_{top} D_{Eul} = \langle \prod \alpha_j, [M] \rangle = e(M)$.

Analogiczne obliczenia przeprowadza się dla operatorów D_χ i D_τ (patrz [39], [19]).

E. Algebra Clifforda, grupa *Spin*(n) i operator Diraca. Klasyczny operator Diraca $\not{\partial} = \gamma^0\partial_{x_0} + \gamma^1\partial_{x_1} + \gamma^2\partial_{x_2} + \gamma^3\partial_{x_3}$ został wprowadzony przez Diraca, aby działać na funkcję falową elektronu $\psi(x)$ w relatywistycznej elektrodynamice kwantowej. Tutaj γ^j są tzw. macierzami Diraca wymiaru 4×4, które spełniają relacje $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = \pm\delta_{\mu\nu}$ (wynikające z żądania $\not{\partial}^2 = \partial_{x_0}^2 - \partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2 - \partial_{x_3}^2$). Funkcja falowa ψ przyjmuje wartości w przestrzeni spinorów, która jest przestrzenią 'reprezentacji' o spinie $\frac{1}{2}$

grupy Lorenza $SO(1,3)$; ściślej, jest to przestrzeń reprezentacji dwukrotnego nakrycia $Spin(1,3)$ grupy Lorenza.

Istnieje analog operatora Diraca na rozmaitościach riemannowskich dopuszczających spin-strukturę. Jego indeks stanowi ważny niezmiennik takich rozmaitości. Poniżej podajemy odpowiednie definicje (według [11] i [34]).

Algebrą Clifforda C_n wzorowaną na przestrzeni wektorowej $V = \mathbb{R}^n$ (z bazą $e_1, \ldots, e_n$ i standardowym iloczynem skalarnym $Q(e_i, e_j) = \delta_{ij}$) nazywamy $\mathbb{R}$-algebrę z 1, generowaną przez V i z relacjami

$$e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij}. \tag{4.16}$$

Zatem jako przestrzeń wektorowa (nie algebra) C_n jest izomorficzna z algebrą Grassmanna $\Lambda^* V$ i ma wymiar 2^n.

Podobnie jak algebra Grassmanna dopuszcza ona rozkład $C_n = C_n^+ \oplus C_n^-$, gdzie C_n^+ (odpowiednio C_n^-) jest rozpinana przez jednomiany $e_{i_1} \ldots e_{i_k}$ z parzystą (odpowiednio nieparzystą) liczbą czynników k. Mamy $C_n^\pm \cdot C_n^+ = C_n^\pm$ i $C_n^\pm \cdot C_n^- = C_n^\mp$.

Definiujemy anty-automorfizm algebry $C_n : x \to \bar{x}$ generowany przez $e_{i_1} \ldots e_{i_k} \to (-1)^k e_{i_k} \ldots e_{i_1}$. Wtedy $e_{i_1} \ldots e_{i_k} \cdot \overline{e_{i_1} \ldots e_{i_k}} = 1$. Grupa $Pin(n)$ składa się z elementów odwracalnych $\varphi \in C_n$, które spełniają

$$\varphi\bar{\varphi} = 1 \quad \text{i} \quad \varphi V \varphi^{-1} = V. \tag{4.17}$$

Okazuje się, że przekształcenia $x \to \varphi x \varphi^{-1}$ przestrzeni V są ortogonalne, czyli należą do grupy $O(n)$. Przeciwobraz w $Pin(n)$ grupy $SO(n)$ jest grupą $Spin(n)$. Odwzorowanie

$$Spin(n) \to SO(n) \tag{4.18}$$

jest 2-krotnym nakryciem. (Dla $n \geq 2$ grupa $Spin(n)$ jest jednospójna, zaś $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$, np. $Spin(3) = SU(2) = S^3$ i $Spin(4) = SU(2) \times SU(2)$. Dla $n = 2$ grupy $SO(2)$ i $Spin(2)$ są równe S^1 i odpowiednie odwzorowanie $S^1 \to S^1$ jest równe $z \to z^2$.)

Odwzorowanie (4.18) można przedstawić w jawny sposób. Jeśli mamy 1-parametrową rodzinę obrotów w $SO(n)$:

$$e_1 \to \cos 2\pi\omega \cdot e_1 + \sin 2\pi\omega \cdot e_2, \quad e_2 \to -\sin 2\pi\omega \cdot e_1 + \cos 2\pi\omega \cdot e_2 \tag{4.19}$$

i $e_j \to e_j$ dla $j > 2$, to w C_n mamy odpowiadającą jej rodzinę obrotów w $Spin(n)$:

$$\cos \pi\omega + \sin \pi\omega \cdot e_1 e_2. \tag{4.20}$$

Widać, że obrót w $Spin(n)$ jest 2-krotnie wolniejszy niż w $SO(n)$; stąd pochodzi pojęcie spinu połówkowego.

Dalej będziemy zakładać, że $n = 2l$ jest parzyste. Algebra C_{2l} ma wymiar $(2^l)^2$ i nietrudno pokazać, że jest prosta (nie jest sumą prostą podalgebr). Zatem jej kompleksyfikacja $C_{2l} \otimes \mathbb{C}$ jest pełną algebrą endomorfizmów pewnej przestrzeni zespolonej $S \simeq \mathbb{C}^{2^l}$; przestrzeń S nazywa się *przestrzenią spinorów*. Dalej, jako moduł nad $C_{2l}^+ \otimes \mathbb{C}$ przestrzeń S rozkłada się na sumę prostą niezmienniczych podmodułów $S^+ \oplus S^-$ (*dodatnich i ujemnych spinorów*). $S^\pm$ są podprzestrzeniami własnymi z wartościami własnymi ± 1 dla mnożenia przez element $\tau = (-1)^l e_1 \dots e_{2l}$; (zauważmy, że $\tau^2 = 1$). Zauważmy też, że

$$e_j : S^\pm \to S^\mp .$$

Przestrzeń spinorów można zdefiniować w jawny sposób. Zauważmy, że w przestrzeni $\Lambda^* \mathbb{C}^k$ operatory $g_i = e_i \wedge (\cdot)$ (mnożenie zewnętrzne przez wektor bazowy) i $h_i = e_i \lrcorner (\cdot)$ (mnożenie wewnętrzne) spełniają relacje $g_i h_j + h_j g_i = \delta_{ij}$, $g_i g_j + g_j g_i = h_i h_j + h_j h_i = 0$ (typu Clifforda, tylko z inną formą dwuliniową Q). Potraktujmy przestrzeń wyjściową $V = \mathbb{R}^{2l}$ jako $W = \mathbb{C}^l$ (z utożsamieniami $e_{2j} \leftrightarrow i e_{2j-1}$). Wtedy operatory $A_v = \sqrt{2}(v \wedge (\cdot) - v \lrcorner (\cdot))$, $v \in V$, działają na przestrzeni $\Lambda^* W$ i spełniają relację $A_v^2 = -2|v|^2 = -2Q(v,v)$. Właśnie

$$S = \Lambda^* W = \Lambda^* \mathbb{C}^l, \quad S^+ = \bigoplus \Lambda^{2j} W, \quad S^- = \bigoplus \Lambda^{2j-1} W$$

są naszymi przestrzeniami spinorów oraz dodatnich i ujemnych spinorów.

Niech teraz M będzie rzeczywistą rozmaitością riemannowską wymiaru $n = 2l$. Wtedy wiązka styczna jest $O(2l)$-wiązką, tzn. homomorfizmy przejścia $\varphi_{\alpha\beta}(x) \in O(2l)$ (nad przecięciami $U_\alpha \cap U_\beta$). Układ $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ traktuje się jako kocykl Čecha o wartościach w $O(2l)$; zadaje on element $\varphi \in H^1(M, O(2l))$. Jeśli rozmaitość jest orientowalna, to można wybrać $\varphi_{\alpha\beta} \in SO(2l)$, tj. $\det \varphi_{\alpha\beta}(x) = 1$; wiemy, że orientowalność jest równoważna znikaniu klasy Stiefela–Whitney'a w_1.

Załóżmy, że M jest orientowalna i że TM zadaje się za pomocą kocyklu $\varphi \in H^1(M, O(2l))$. Mówimy, że M dopuszcza *spin-strukturę* (jest rozmaitością spinorową) jeśli kocykl φ jest obrazem pewnego kocyklu $\tilde{\varphi} \in H^1(M, Spin(2l))$. Wyjaśnimy, co to oznacza w terminach klas charakterystycznych.

Mamy ciąg dokładny grup $0 \to \mathbb{Z}_2 \to Spin(2l) \xrightarrow{p} SO(2l) \to 0$ i odpowiadający mu ciąg dokładny snopów. Wypiszmy odpowiedni długi ciąg dokładny kohomologii Čecha

$$(4.21) \quad \dots H^1(M, \mathbb{Z}_2) \to H^1(M, Spin(2l) \xrightarrow{p_*} H^1(M, SO(2l)) \xrightarrow{\delta} H^2(M, \mathbb{Z}_2) \dots$$

Pytamy się, czy $\varphi = p_*(\tilde{\varphi})$? Do tego wystarczy, aby $\delta(\varphi) = 0$; wtedy wszystkie spin-struktury na M są numerowane przez elementy $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$. Okazuje się, że $\delta(\varphi) = w_2 \in H^2(M, \mathbb{Z}_2)$, druga klasa Stiefela–Whitney'a. Aby czytelnik w to uwierzył, proponuję zauważyć analogię z ciągiem dokładnym snopów $0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \to 0$ i definicją klasy Cherna $c_1(L)$ wiązki liniowej L

(zadanej przez kocykl $\varphi \in H^1(M, \mathcal{O}^*)$) jako $\delta(\varphi) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ w analogicznym ciągu dokładnym jak (4.21) (patrz [31]). Nawet w przypadku zespolonej rozmaitości M okazuje się, że $w_2 = c_1(T_{hol}M) \bmod 2$ (patrz [34]).

Wybór $Spin(2l)$-struktury na M oznacza, że możemy napisać $TM = P \times_{Spin(2l)} \mathbb{R}^{2l}$, gdzie P jest główną wiązką z włóknem $Spin(2l)$ i z grupą strukturalną $Spin(2l)$. Definiujemy następujące wiązki nad M :

$$E = P \times_{Spin(2l)} S, \quad E^+ = P \times_{Spin(2l)} S^+, \quad E^- = P \times_{Spin(2l)} S^-.$$

Na TM istnieje $SO(2l)$-koneksja Levi–Civity ∇, która podnosi się do koneksji w wiązce głównej $P \to M$. (Przypomnijmy, że koneksja zadaje możliwość jednoznacznego wyboru elementów z włókna wiązki wzdłuż krzywych $\gamma(t)$ w bazie (przy wybranym punkcie początkowym włókna nad $\gamma(0)$). Ten wybór jest zadany przez rodzinę operatorów $T(t) \in SO(2l)$, zaś $\nabla = \frac{d}{dt}T(t)$. Rodzinę $T(t)$ można też traktować jako koneksję w wiązce głównej z włóknem $SO(2l)$. Ponieważ wiązka P jest dwukrotnym nakryciem tej ostatniej, to elementy $T(t)$ lokalnie jednoznacznie podnoszą się do P.) Zatem możemy podnieść koneksję ∇ również do wiązek $E, E^{\pm}$.

Ponadto mamy homomorfizmy wiązek

$$TM \otimes E \to E, \tag{4.22}$$

gdzie wektory z $T_xM \simeq V$ działają na E_x przez mnożenie w algebrze Clifforda C_n (wzorowanej na T_xM). Wiemy też, że $TM \otimes E^{\pm} \to E^{\mp}$.

Operator Diraca działa na przekrojach $s \in \Gamma(E)$ i ma postać

$$D_{Dir}s(x) = \sum e_i \cdot (\nabla_{e_i} s)(x), \tag{4.23}$$

gdzie $(e_1, \ldots, e_{2l})$ jest dowolną bazą ortonormalną w T_xM i elementy e_i działają jak w (4.22). W istocie (4.23) definiuje dwa operatory Diraca

$$D^+_{Dir} : \Gamma(E^+) \to \Gamma(E^-), \quad D^-_{Dir} : \Gamma(E^-) \to \Gamma(E^+),$$

gdzie $D^-_{Dir} = (D^+_{Dir})^*$. Rozwiązania równania Diraca $D_{Dir}\eta = 0$ nazywają się *spinorami harmonicznymi.* Indeks

$$i_{an}D^+_{Dir} = \dim\ker D^+_{Dir} - \dim\ker D^-_{Dir} \tag{4.24}$$

operatora D^+_{Dir} nazywa się *spinorowym indeksem rozmaitości* i oznacza się przez $Spin(M)$.

Zakończmy ten punkt wyrażeniem $Spin(M)$ za pomocą $i_{top}D^+_{Dir}$, czyli w terminach klas Pontriagina $p_j(M)$. Użyjemy wzoru (4.15) ze $Spin(2l)$-modułami $X = S^+$ i $Y = S^-$. Jeśli $\omega_1, \ldots, \omega_l$ są bazowymi wagami $SO(2l)$-modułu V (związanego z TM), to są one związane z maksymalnym torusem T_0 w $SO(2l)$. Można je rozpatrywać także jako wagi dla $Spin(2l)$-modułów, związane z torusem maksymalnym $T \subset Spin(2l)$ (który dwukrotnie nakrywa

T_0). Wagi $Spin(2l)$-moduł ów S^+ (odpowiednio S^-) są postaci $\frac{1}{2}(\pm\omega_1 \pm \ldots \pm \omega_l)$ z parzystą (odpowiednio nieparzystą) liczbą minusów. Stąd wynika, że

$$\mathrm{ch}(S^+) - \mathrm{ch}(S^-) = \prod_1^l (e^{\omega_j/2} - e^{-\omega_j/2}).$$

Ponieważ $e(V^*) = \prod(-\omega_j)$, to $\mathrm{ch}(D^+_{Dir}) = \prod(e^{\alpha_j/2} - e^{-\alpha_j/2})/(-\alpha_j)$, gdzie $\alpha_j = f^*(\omega_j)$ (patrz punkt D). Zatem

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(D^+_{Dir})\mathcal{T}(M) &= \prod \frac{y_j/2}{\sinh(y_j/2)} = 1 - \frac{1}{24}p_1 + \ldots \\ &= \hat{A}(M) = \sum \hat{A}_r(p_1, \ldots, p_r).\end{aligned}$$

Jest to tzw. *$\hat{A}$-genus* (wprowadzony również przez Hirzebrucha).

Zatem mamy następujące twierdzenie

$$Spin(M) = \left\langle \hat{A}(M), [M] \right\rangle; \tag{4.25}$$

ponadto $Spin(M) = 0$, jeśli $\dim M$ nie jest krotnością 4 (jako że $\hat{A}$ zależy tylko od klas Pontriagina).

(Zatem poznaliśmy trzy funkcje generujące niezmienników topologicznych rozmaitości: T-genus (genus Todda), L-genus (genus sygnatury) i Â-genus (genus spinorowy). I wystarczy, nie będzie więcej genusów w tym artykule.)

W teorii indeksu zwykło się uważać operator Diraca za najważniejszy eliptyczny operator różniczkowy. W istocie, używając pewnej algebro-topologicznej i K-teoryjnej analizy można sprowadzić dowód ogólnego twierdzenia o indeksie do dowodu tego twierdzenia w przypadku operatora Diraca (patrz [11]).

F. Równanie przewodnictwa ciepła. Oczywiście jest to zagadnienie początkowe postaci $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$, $u(0,x) = u_0(x)$ z rozwiązaniem $u(t,x) = (e^{t\Delta}u_0)(x)$, $t \geq 0$; (tutaj $\Delta \leq 0$ w przeciwieństwie do następnych laplasjanów).

My zastosujemy je w przypadku, gdy 'laplasjan' jest postaci

$$\Delta_E = D^*D : \Gamma(E) \to \Gamma(E) \quad \text{lub} \quad \Delta_F = DD^* : \Gamma(F) \to \Gamma(F). \tag{4.26}$$

Tutaj Δ_E i Δ_F są samosprzężonymi i nieujemnymi operatorami z dyskretnym widmem o skończonej krotności. Ponadto $\ker \Delta_E = \ker D$, $\ker \Delta_F = \ker D^*$ oraz dla $\lambda > 0$ podprzestrzenie własne $\Gamma_\lambda(E) = \ker(\Delta_E - \lambda)$ i $\Gamma_\lambda(F) = \ker(\Delta_F - \lambda)$ są izomorficzne (z izomorfizmem $D|_{\Gamma_\lambda(E)}$). Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} i_{an}D &= \mathrm{tr}(e^{-t\Delta_E}) - \mathrm{tr}(e^{-t\Delta_F}) \\ &= \sum_\lambda e^{-t\lambda} \dim \Gamma_\lambda(E) - \sum_\lambda e^{-t\lambda} \dim \Gamma_\lambda(F).\end{aligned} \tag{4.27}$$

Sumy w ostatnim wzorze są skończone dla $t > 0$ i ich różnica nie zależy od t. W granicy $t \to \infty$ otrzymujemy $\dim \Gamma_0(E) - \dim \Gamma_0(F)$. Główna idea zastosowania równania przewodnictwa polega na policzeniu granicy wyrażenia $\operatorname{tr}(e^{-t\Delta_E}) - \operatorname{tr}(e^{-t\Delta_F})$ przy $t \to 0^+$.

Okazuje się, że istnieje asymptotyczne rozwinięcie (*rozwinięcie Seeley'a*) postaci

$$\operatorname{tr}\left(e^{-t\Delta}\right) \sim \sum_{k=-n}^{\infty} t^{k/2m} U_k(\Delta), \quad t \to 0^+, \tag{4.28}$$

gdzie $n = \dim M$, $2m$ jest rzędem nieujemnego eliptycznego operatora różniczkowego Δ i

$$U_k(\Delta) = \int_M \mu_k(\Delta), \tag{4.29}$$

gdzie $\mu_k(\Delta)$ jest pewną miarą na M jednoznacznie wyznaczoną przez współczynniki operatora Δ. Dalej, miara $\mu_k(\Delta)$ jest jednorodna wagi $\frac{k}{2m}$ względem współczynników Δ. W przypadku $m = 1$, czyli gdy $\Delta = \sum a_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum a_i(x)\partial_{x_i} + a_0(x)$, miara $\mu_k(\Delta)$ wyraża się za pomocą wielomianu od współczynników a_{ij}, a_i, od ich pochodnych oraz od $\det^{-1}(a_{ij})$.

Dla nas ważne są miary $\mu_0(\Delta_E)$ i $\mu_0(\Delta_F)$. Ponadto chcemy wyliczyć μ_0 w przypadku pewnych naturalnych operatorów pierwszego rzędu, jak operator sygnatury D_τ lub operator Diraca D^+_{Dir} (patrz uwaga na końcu poprzedniego punktu). Wobec tego $m = 1$ i mamy wyrażenie

$$i_{an} D = \int_M \omega,$$

gdzie ω jest pewną n-formą kanonicznie wyznaczoną przez metrykę i spełniającą określone własności. Na przykład, w przypadku operatora D_τ forma $\omega = \omega(g)$ jest dana jako wielomian od współczynników g_{ij} metryki, od skończonej liczby pochodnych $\partial_x^\alpha g_{ij}$ i od $\det^{-1} g_{ij}$ oraz jest jednorodna stopnia 0.

P. Gilkey [30] udowodnił, że jedyne takie formy $\omega(g)$ są wielomianami od form różniczkowych $p_1(M), p_2(M), \ldots$ reprezentujących klasy Pontriagina rozmaitości; w [10] podano prostszy dowód tego twierdzenia. Zatem $i_{an} D_\tau = \int_M f_k(p_1, \ldots, p_k)$ dla pewnego quasi-jednorodnego wielomianu f_k stopnia $k = n/4$. Analogicznie jak w dowodzie twierdzenia Hirzebrucha o sygnaturze sprawdza się, że $f_k = L_k$, a do sprawdzenia służą produkty przestrzeni rzutowych.

J.-M. Bismut [24] wyliczył $\operatorname{tr}(e^{-t\Delta})$ za pomocą rachunku stochastycznego. Wiadomo, że gdy $\Delta = -\partial^2_{x_1} - \ldots - \partial^2_{x_n}$ w $\mathbb{R}^n$, to jądro operatora $e^{-t\Delta}$ ma postać

$$K(x, y) = p_t(x|y),$$

czyli gęstość prawdopodobieństwa, że trajektoria $w(t)$ procesu Wienera startującego z y znajdzie się w pobliżu x po czasie $t > 0$. Zatem $\mathrm{tr}(e^{-t\Delta_E}) = \int_{\mathbb{R}^n} p_t(x|x)dx$. Analogiczna teoria procesów stochastycznych na rozmaitościach zwartych została stworzona przez Malliavina i innych. Bismut zastosował tę teorię. Przedstawił jądra operatorów $e^{-tD^- D^+}$ i $e^{-tD^+ D^-}$, dla operatorów Diraca $D^\pm = D^\pm_{Dir}$ przy pomocy gęstości prawdopodobieństw określonych procesów stochastycznych (spełniających równania stochastyczne Itó lub Stratonovicha). Wzory w [24] są mocno skomplikowane, ale w rezultacie dostaje on wyrażenia w postaci całki po rozmaitości z konkretnej formy różniczkowej, która okazuje się być formą Â-genusu.

G. Supersymetria i operator Diraca. Tutaj przedstawiamy ostatnie podejście do twierdzenia Atiyaha-Singera. Jest ono najbardziej efektowne ze wszystkich, ale wykorzystuje pojęcie super-lagranżjanu na super-rozmaitości, ich kwantowe odpowiedniki oraz całki po trajektoriach. Te pojęcia jeszcze nie zadomowiły się w matematyce.[5] W pewnym sensie ten dowód jest skróconym dowodem Bismuta, a skrócenie polega na zastąpieniu całek stochastycznych ich super-symetrycznymi analogami. Ciekawe, że właśnie Bismut i Witten zostali zaproszeni do wygłoszenia wykładów podczas ceremonii wręczania medalu Abela (patrz [43]).

Skorzystam z wykładu Wittena [46], od którego pochodzi idea. Ściślejsze dowody można znaleźć w pracach L. Alvarez-Gaumé'a [1] i E. Getzlera [29].

Klasyczny układ fizyczny jest opisywany przez równanie różniczkowe zwyczajne (lagranżjan na T^*M), zaś kwantowy układ opisuje się za pomocą liniowego równania różniczkowego cząstkowego (operator Schrödingera). Przy tym funkcjom na T^*M są przypisywane operatory liniowe w przestrzeni Hilberta stanów układu. Ta odpowiedniość prowadzi do 'bozonowej' (parzystej) mechaniki kwantowej. Ale istnieje też 'fermionowa' (nieparzysta) mechanika kwantowa. Klasycznym odpowiednikiem nieparzystej mechaniki kwantowej jest nieparzysta mechanika lagranżowska na tzw. super-rozmaitościach.

Super-rozmaitość różni się od rozmaitości tym, że oprócz zwykłych (parzystych) współrzędnych x_i, $i = 1, \ldots, n$, posiada także nieparzyste współrzędne θ_i, $i = 1, \ldots, N$, które są anty-przemienne między sobą. Wtedy mówi się, że super-rozmaitość ma wymiar $n|N$. Przestrzeń topologiczna ('podścielająca') jest taka sama dla rozmaitości i super-rozmaitości. Na przykład, taką super-rozmaitością jest $\mathbb{R}^{n|N}$ z $C^\infty(\mathbb{R}^{n|N}) = C^\infty(\mathbb{R}^n) \otimes \Lambda^*\mathbb{R}^N$. Innym przykładem jest ΠTM, wiązka nad M z włóknami $(T_xM)^{0|n}$ traktowanymi jako czysto nieparzyste przestrzenie wymiaru $0|n$; tutaj Π oznacza zmianę parzystości.

[5] Dotyczy to również mnie, chociaż chyba nie można mi zarzucić braku starań.

Kwantyzacja na super-rozmaitości polegałaby na przypisywaniu parzystym współrzędnym i pędom (parzystych) operatorów mnożenia i pochodnych cząstkowych, zaś zmienne nieparzyste powinny przechodzić na (nieparzyste) operatory z algebry Clifforda działające na spinory.

Typowe *super-działanie* ma postać

$$\mathcal{S}(X) = -\int_{\mathbb{R}^{1|1}} dt d\theta \frac{1}{2} \langle \dot{x}(t) + \theta \nabla_t \psi, \psi - \theta \dot{x}(t) \rangle , \tag{4.30}$$

gdzie $\mathbb{R}^{1|1} = \{(t|\theta) : t \text{ parzyste}, \theta \text{ nieparzyste}\}$, $X = x(t) + \theta\psi(t) : R^{1|1} \to \Pi TM = \{(x|\psi) : x \text{ parzyste}, \psi \text{ nieparzyste}\}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest metryką Riemanna na M, a ∇ koneksją Levi–Civity. Ponadto $\int d\theta$ jest tzw. *całką Berezina:* $\int d\theta \cdot 1 = 0$, $\int d\theta \cdot \theta = 1$. Ponieważ $\theta^2 = 0$ (antyprzemienność), to (4.30) można przepisać w następującej postaci

$$\mathcal{S}(x, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(|\dot{x}|^2 - \langle \nabla_t \psi, \psi \rangle \right) dt = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{1|1}} dt d\theta \left\langle \dot{X}(t), QX(t) \right\rangle , \tag{4.31}$$

gdzie

$$Q = \frac{\partial}{\partial\theta} - \theta \frac{\partial}{\partial t}$$

jest (nieparzystym) polem wektorowym generującym przekształcenia super-symetrii (mieszanie zmiennych przystych z nieparzystymi). Mamy $Q^2 X = -\frac{\partial}{\partial t} X$, co odpowiada (parzystej) hamiltonowskiej ewolucji.

Równania Eulera–Lagrange'a przyjmują postać $\nabla_t QX = 0$ lub (równoważnie)

$$\nabla_t \psi = 0, \quad R(\psi, \dot{x})\psi = \nabla_t \dot{x},$$

gdzie R jest krzywizną. Tutaj odpowiednikiem parzystej przestrzeni symplektycznej T^*M jest przestrzeń $\pi^* \Pi TM$, gdzie $\pi : T^*M \to M$ jest rzutowaniem.

Odpowiednikiem parzystej przestrzeni Hilberta $L^2(M)$ jest przestrzeń $\mathcal{H} = L^2(E)$ przekrojów wiązki spinorowej $E = E^+ \oplus E^-$ (z włóknem $S = S^+ \oplus S^-$). Jest to super-przestrzeń Hilberta $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$, $\mathcal{H}^\pm = L^2(E^\pm)$, czyli z $\mathbb{Z}_2$- gradacją. W super-przestrzeni Hilberta mamy *super-ślad* $\mathrm{tr}_s = \mathrm{tr}\,|_{\mathcal{H}^+} - \mathrm{tr}\,|_{\mathcal{H}^-}$.

Ponieważ Q^2 odpowiada hamiltonianowi H w przypadku klasycznym, to kwantyzacja Q powinna dać operator Diraca D_{Dir} (patrz [46]). Indeks operatora Diraca wyraża się zatem jako super-ślad,

$$i_{an} D_{Dir} = \mathrm{tr}_s\, e^{-\beta H}. \tag{4.32}$$

Następny etap dowodu polega na wyliczeniu super-śladu operatora $e^{-\beta H}$ dla małych β. To wyliczenie dokonuje się za pomocą całek po trajektoriach (typu Feynmana). Rozważa się super-symetryczne pętle $X = (x, \psi) : S^{1|1} \to$

ΠTM, gdzie $S^{1|1} = \{(t|\theta) : t \in \mathbb{R} \bmod \beta\}$. Wtedy zachodzi następujący super-analog odpowiedniego wzoru Bismuta:

$$\operatorname*{tr}_s e^{-\beta H} = \int_{\{X\}} \mathcal{D}x\mathcal{D}\psi e^{-S(x,\psi)}, \tag{4.33}$$

gdzie $\mathcal{D}$ oznacza miary funkcjonalne (typu Wienera). Przeskalowanie $t' = \beta t$, $\psi' = \psi/\sqrt{\beta}$ daje analogiczny wzór jak w (4.33), tylko z pewną stałą przed całką $\int_{\{X\}}$ i z super-działaniem $\mathcal{S} = \frac{-1}{2\beta}\int_0^1 \left(|\dot{x}|^2 - \langle\nabla_t\psi, \psi\rangle\right) dt$.

Stała nie jest dla Wittena groźna, gdyż zależy tylko od wymiaru n (i od β), a jego interesuje tylko wiodący wyraz asymptotyki przy $\beta \to 0$. Tego typu stałe pojawiają się również dalej. W rezultacie końcowy wynik będzie określony z dokładnością do czynnika niezależnego od rozmaitości, który wyznacza się na podstawie przykładów.

Dla małych β działanie staje się duże i całka powinna być liczona metodą fazy stacjonarnej, czyli z wyróżnieniem wkładu pochodzącego od otoczeń punktów krytycznych. Punkty krytyczne działania odpowiadają zamkniętym geodezyjnym w M. Przy tym geodezyjne o minimalnym działaniu, to stałe geodezyjne, czyli $x(t) \equiv x_0$, $\psi(t) \equiv \psi_0$.

Bierzemy zaburzenia $x(t) = x_0 + \sqrt{\beta}a(t)$, $\psi(t) = \psi_0 + \sqrt{\beta}\eta(t)$ i wyliczamy część kwadratową w $\mathcal{S}$ względem zaburzenia. Wynosi ona $I_1 + I_2$, gdzie

$$I_1 = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(|\dot{a}|^2 - \frac{1}{2}\langle R(\psi_0,\psi_0)a, \dot{a}\rangle\right) dt, \quad I_2 = -\frac{1}{2}\int_0^1 \langle\dot{\eta}, \eta\rangle\, dt;$$

(tutaj $R(\psi_0, \psi_0) \neq 0$, bo ψ_0 jest nieparzyste).

Całka funkcjonalna $\int_{\{(a,\eta)\}} \mathcal{D}a\mathcal{D}\eta e^{-I_1(a)-I_2(\eta)}$ zapisuje się w postaci iloczynu $\int_{\{a\}} e^{-I_1} \cdot \int_{\{\eta\}} e^{-I_2}$, przy czym ta ostatnia całka znowu daje pewną stałą zależną tylko od wymiaru n. Za to pierwsza całka jest gaussowska i wynosi

$$\int_{\{a\}} \mathcal{D}a e^{-I_1(a)} = [\det D_R(x_0, \psi_0)]^{-1/2}, \tag{4.34}$$

gdzie

$$D_R = D_R(x_0, \psi_0) = -\frac{d^2}{dt^2} - \frac{1}{2}R(\psi_0, \psi_0)\frac{d}{dt}. \tag{4.35}$$

Wyznacznik operatora D_R, $R \in so(n)$, liczymy metodą regularyzacji Ray'a–Singera (patrz punkt 6A poniżej). D_R działa na przestrzeni odwzorowań $a : S^1 \to \mathbb{R}^n$ z zerową średnią, $\int a = 0$. Niech $n = 2l$ i rozłóżmy $T_{x_0}M$ na 2-wymiarowe podprzestrzenie V_j takie, że $R|_{V_j} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_j \\ -\alpha_j & 0 \end{pmatrix}$. Wektory własne operatora D_R są postaci $\sum v_j e^{2\pi i k_j t}$, $v_j \in V_j$, $k_j \in \mathbb{Z} \setminus 0$, z wartościami własnymi $(2\pi k_j)^2 \pm \pi k_j \alpha_j$. Zatem $\sqrt{\det D_R} = \prod_{j=1}^{l}\left[\prod_{k=1}^{\infty}(2\pi k)^4\left(1+\left(\frac{\alpha_j}{4\pi k}\right)^2\right)\right]$. Iloczyny $\prod(2\pi k)^4$ regularyzuje się przy pomocy ζ-funkcji, np. $\sum(ck)^4 = \exp(-4\frac{d}{ds}|_{s=0}\sum(ck)^{-s}) = \exp(-4\frac{d}{ds}(\zeta(s)c^{-s})|_{s=0})$. Pozostaje

$$const\cdot\prod_{j=1}^{l}\left[\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{\alpha_j}{4\pi k}\right)^2\right)\right] = const\cdot\left\{\prod\frac{\alpha_j/2}{\sinh\alpha_j/2}\right\}^{-1} = const\cdot\hat{A}(R)^{-1},$$

gdzie $\hat{A}$ jest Â-genusem.

Ale R zależy od x_0 i ψ_0, a pamiętamy, że w metodzie fazy stacjonarnej trzeba sumować wkłady od poszczególnych punktów krytycznych. W naszym przypadku powinniśmy jeszcze scałkować $[\det D_R(x_0,\psi_0)]^{-1/2} = const\cdot\hat{A}(R)$ po super-rozmaitości ΠTM. Przy tym wszystko jest tak wykombinowane, że nieparzyste składowe $\psi_{0,i}$, jako funkcje na $\Pi T_{x_0}M$, są elementami $dx_i \in T^*_{x_0}M$, a całka Berezina po $\Pi T_{x_0}M$ jest stała. Zatem wyrażenie $R(\psi_0,\psi_0)$ trzeba zastąpić 2-formą $\sum R_{ij}(x_0)dx_i\wedge dx_j$. Tę formę należy jeszcze wstawić do $\hat{A}(R)$ i odpowiednią n-formę dopiero wycałkować po M. Dostajemy

$$i_{an}D^+_{Dir} = C\cdot\int_M \hat{A}(R), \tag{4.36}$$

plus wyższe potęgi β. Tutaj C jest pewną stałą , która mogłaby być postaci $C_1\beta^\nu$, ale ponieważ wynik jest skończony i niezerowy, to $\nu = 0$ i C zależy tylko od $n = 2l$.

Istnieje definicja klas Cherna (i Pontriagina) poprzez krzywiznę koneksji w wiązce E (patrz [31], [36]). Jeśli R jest 2-formą (o wartościach w $End(E)$) krzywizny tej koneksji, to zachodzi wzór

$$c(E) = \det(1+\frac{i}{2\pi}R) = 1+\frac{i}{2\pi}\operatorname{tr}R - \frac{1}{4\pi^2}\operatorname{tr}R\wedge R+\ldots, \tag{4.37}$$

gdzie poszczególne składniki są zamkniętymi formami i są traktowane jako klasy kohomologii de Rhama. Zatem $\int\hat{A}(R) = \left\langle\hat{A}(M),[M]\right\rangle$, czyli mamy twierdzenie o indeksie z dokładnością do stałej C. Z przykładów wynika, że $C = 1$. W [1] w analogiczny sposób policzono indeksy operatorów D_{Eul} i D_τ.

Wzór (4.36) jest przykładem tzw. *lokalnego twierdzenia o indeksie.* Innym przykładem jest wzór Gaussa–Bonneta $2\pi e(M) = \int_M K$ dla powierzchnii ze skalarną krzywizną K.

Ciekawa jest też praca Atiyaha [6], gdzie wykonano podobne rachunki jak powyżej, ale przy wykorzystaniu nie przybliżonego rozwinięcia metodą fazy stacjonarnej, tylko pewnego dokładnego wzoru Duistermaata i Heckmana

[27] przy założeniu działania grupy S^1. Tutaj S^1 działa na pętlach $S^1 \to M$ poprzez przesuwanie argumentu. W ten sposób Atiyah unika super-symetrii.

5. Uogólnienie twierdzenia Lefschetza. Wymiar skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej, to ślad operatora identycznościowego. Zatem naturalnym uogólnieniem indeksu analitycznego operatora eliptycznego będzie

$$\operatorname{tr} T_E - \operatorname{tr} T_F,$$

gdzie $T_E : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$, $T_F : \Gamma(F) \to \Gamma(F)$ są operatorami liniowymi zgodnymi z D, tzn. $T_F \circ D = D \circ T_E$.

Można pójść jeszcze dalej. Zamiast jednego operatora eliptycznego można rozważyć *kompleks eliptyczny*

$$E : 0 \to \Gamma(E_0) \xrightarrow{D_0} \Gamma(E_1) \xrightarrow{D_1} \dots \xrightarrow{D_{m-1}} \Gamma(E_m) \to 0 \tag{5.1}$$

taki, że (i) $D_{i+1} \circ D_i = 0$ oraz (ii) ciąg symboli

$$\dots \to E_{i,x} \xrightarrow{\sigma_i(x,\xi)} E_{i+1,x} \to \dots$$

jest dokładny dla wszystkich $x \in M$ i $\xi \in T^*_x X \setminus 0$, gdzie σ_i są symbolami operatorów różniczkowych D_i. Wtedy grupy kohomologii $H^i(E)$ kompleksu (5.1) są skończenie wymiarowe.

Dalej, jeśli mamy endomorfizm $T = (T_i)_{i=0,\dots,m}$ kompleksu E, $T_i : \Gamma(E_i) \to \Gamma(E_{i+1})$,

$$T_{i+1} \circ D_i = D_i \circ T_i, \tag{5.2}$$

to definiujemy jego *liczbę Lefschetza* jako

$$L(T) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \operatorname{tr} H^i(T), \tag{5.3}$$

gdzie $H^i(T) : H^i(E) \to H^i(E)$ są odpowiednimi odwzorowaniami w kohomologiach. Przypuśćmy teraz, że endomorfizm $T = (T_i)$ jest związany z pewnym gładkim odworowaniem $f : M \to M$ oraz że potrafimy utożsamiać cofnięte wiązki f^*E_i z wiązkami E_i za pomocą homomorfizmów $\varphi_i : f^*E_i \to E_i$. Wtedy mamy endomorfizmy $T_i = \varphi_i \circ f^* : \Gamma(E_i) \to \Gamma(E_i)$. Jeśli przy tym zachodzą komutowania (5.2), to dostajemy endomorfizm kompleksu E.

Załóżmy na koniec, że odwzorowanie f posiada tylko niezdegenerowane punkty stałe, tzn. $\det(1 - f'(p)) \neq 0$, jeśli $f(p) = p$ (1 nie jest wartością własną $f'(p)$).

M. Atiyah i R. Bott [AB1, AB2] udowodnili, że w tej sytuacji liczba Lefschetza endomorfizmu T wyraża się wzorem

$$L(T) = \sum_{f(p)=p} \nu(p), \tag{5.4}$$

gdzie *indeks punktu stałego* wynosi

$$\nu(p)=\frac{\sum(-1)^i \operatorname{tr}\varphi_{i,p}}{|\det(1-f'(p))|}, \tag{5.5}$$

zaś endomorfizmy $\varphi_{i,p}: E_{i,p}\to E_{i,p}$ są ograniczeniami φ_i do włókien $E_{i,p}$.

Wzór (5.4) jest uogólnieniem klasycznego twierdzenia Lefschetza $L(f)=\sum(-1)^i \operatorname{tr}\left(f^*: H^i(M)\to H^i(M)\right)=\sum_{f(p)=p} ind_p(f)$, gdzie $ind_p(f)$ jest indeksem pola wektorowego $x-f(x)$. Istotnie, biorąc jako E kompleks de Rhama z różniczkami zewnętrznymi jako D_i oraz z $T_i=f^*$, znajdujemy

$$\begin{aligned}\nu(p)&=|\det(1-f'(p))|^{-1}\sum(-1)^i \operatorname{tr} f^*|\Lambda^i T_p^*M\\ &=\frac{\det(1-f'(p))}{|\det(1-f'(p))|}=sign\det(1-f'(p)).\end{aligned}$$

W przypadku zespolonym zachodzi analogiczne twierdzenie. Załóżmy, że mamy holomorficzne odwzorowanie $f: M\to M$ zespolonej rozmaitości, mamy holomorficzną wiązkę E nad M i holomorficzny izomorfizm $\varphi: f^*E\to E$. Jeśli zdefiniujemy endomorfizmy $H^i(f)=\varphi^*\circ f^*$ na grupach kohomologii $H^i(M,\mathcal{O}(E))$, to zachodzi wzór

$$\sum(-1)^i \operatorname{tr} H^i(f)=\sum_{f(p)=p}\nu(p), \tag{5.6}$$

gdzie

$$\nu(p)=\frac{\operatorname{tr}\varphi_p}{\det_{\mathbb{C}}(1-f'(p))}. \tag{5.7}$$

Jako przykład zastosowania weźmy holomorficzne odwzorowanie f powierzchni Riemanna M i trywialną wiązkę liniową E. Wtedy wzór (5.6) daje $1-H^{0,1}(f)=\sum_{f(p)=p}\frac{1}{1-f'(p)}$, gdzie $H^{0,1}(f)$ jest indukowanym homomorfizmem na $H^{0,1}(M)=H^1(M,\mathcal{O})$.

Heurystyczne uzasadnienie wzoru (5.6) jest następujące (patrz [40]), ale ścisły dowód jest inny. Spróbujmy policzyć następujący 'ślad' $\operatorname{tr}\varphi\circ f^*:\Gamma(E)\to\Gamma(E)=H^0(M,\mathcal{O}(E))$. Wkład do niego wnoszą jedynie infinitezymalne otoczenia punktów stałych odwzorowania f. Zatem liczymy ślad odwzorowania na przestrzeni kiełków przekrojów $s: U\to E$, gdzie U jest otoczeniem punktu stałego p. Z algebraiczno-formalnego punktu widzenia przestrzeń kiełków, to $E_p\otimes ST_p^*M$, gdzie ST_p^*M jest symetryczną algebrą (wielomianów na T_pM). Tutaj $\operatorname{tr}(\varphi\circ f^*|E_p\otimes ST_p^*M)=\operatorname{tr}\varphi_p\left[\sum_j \operatorname{tr}\left(f_p^*|ST_p^*M\right)\right]$. Jeśli λ_i są wartościami $f'(p)$, to $\sum_j \operatorname{tr}\left(f_p^*|ST_p^*\right)=\sum_{k_1,\dots,k_n}\lambda_1^{k_1}\dots\lambda_n^{k_n}=\prod_{i=1}^{n}(1-\lambda_i)^{-1}=1/\left(\det(1-f'(p))\right)$. Często okazuje się, że $H^j(M,\mathcal{O}(E))=0$

dla $j > 0$. W tych przypadkach powyższe rozumowanie daje właśnie wzór (5.6).

Ciekawym przykładem zastosowania twierdzenia Atiyaha–Botta jest interpretacja *formuły Weyla*

$$\chi_\lambda = \sum_{w \in W} w \cdot \left\{ \frac{e^{i\lambda}}{\prod\limits_{\alpha>0} (1 - e^{-i\alpha})} \right\} \tag{5.8}$$

w terminach (5.6). Tutaj χ_λ jest charakterem pewnej specjalnej reprezentacji $\rho : G \to Aut(V_\lambda)$ zwartej grupy Liego G. Jest to reprezentacja indukowana z 1-wymiarowej reprezentacji torusa maksymalnego $T \subset G$ określonej przez tzw. *młodszą wagę* $\lambda \in Hom(T, S^1)$ (z charakterem $e^{i\lambda}$). Sumowanie w (5.8) odbywa się po elementach *grupy Weyla* $W = N(T)/T$, gdzie $N(T) = \{n \in G : n^{-1}Tn = T\}$ jest normalizatorem torusa maksymalnego T, a działanie elementu $w \in W$ na funkcję F zadaje się wzorem $(w \cdot F)(h) = F(n^{-1}hn)$, gdzie $n \in N(T)$ reprezentuje element w.

Przestrzeń V_λ reprezentacji rozkłada się na sumę 1-wymiarowych przestrzeni niezmienniczych względem T, których wagi są $\geq \lambda$ (patrz [40] i [9]). Podobnie, kompleksyfikacja algebry Liego $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ grupy rozkłada się na algebrę Cartana $\mathfrak{h}$ (czyli styczną to T) i 1-wymiarowe podprzestrzenie niezmiennicze T (względem dołączonego działania), których wagami są pierwiastki α algebry. Pierwiastki dodatnie $\alpha > 0$ wygodnie jest wyobrażać sobie jako odpowiadające górno-trójkątnym macierzom (np. gdy $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = SL(n, \mathbb{C})$), a ujemne $\alpha < 0$ – dolno-trójkątnym.

Rozmaitość $M = G/T$ można traktować jako zespoloną rozmaitość $G_{\mathbb{C}}/B^+$, gdzie $G_{\mathbb{C}}$ jest kompleksyfikacją grupy, a B^+ jest grupą Borela ('górno-trójkątnych macierzy'). Moduł V_λ zadaje wiązkę liniową E_λ nad M (oraz $V_\lambda = H^0(M, \mathcal{O}(E_\lambda))$), natomiast f jest indukowane przez działanie typowego elementu $g \in T$ na G/T (mnożenie z lewa). Punkty stałe odwzorowania f odpowiadają elementom w grupy Weyla. Przestrzeń kostyczną do G/T utożsamia się z nilpotentną podalgebrą $\mathfrak{n}^+$ algebry Liego $\mathfrak{g}$, odpowiadającą dodatnim pierwiastkom $\alpha > 0$. Wtedy wartości własne działania $g \in T$ na $\mathfrak{n}^+$, to $e^{i\alpha(g)}$, $\alpha > 0$.

Z lewej strony w (5.8) mamy $\chi_\lambda = \operatorname{tr} \rho(g) = \operatorname{tr}(g|H^0(M, \mathcal{O}(E_\lambda)))$; dowodzi się, że $H^j(M, \mathcal{O}(E_\lambda)) = 0$ dla $j > 0$ (patrz [9] i [40]). Zatem wzór Weyla wynika ze wzoru (5.6).

6. Regularyzacja wyznaczników, ζ-funkcje i η-funkcje

A. Wyznaczniki i dzeta-funkcje. Przy wyliczaniu całek funkcjonalnych typu $\int_{\mathcal{X}} \mathcal{D}\phi e^{-(\Delta\phi,\phi)}$, gdzie $\mathcal{X}$ jest nieskończenie wymiarową przestrzenią, a $\Delta \geq 0$ operatorem linowym (typu laplasjanu), pojawia się konieczność wyliczenia wyznacznika operatora Δ (patrz punkt 4G).

W przypadku skończenie wymiarowego operatora $A > 0$ mamy $\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n$, gdzie $\lambda_j > 0$ są jego wartościami własnymi. Możemy bezpiecznie przepisać to w postaci

$$\det A = e^{\sum \log \lambda_j} = \exp\left(-\frac{d}{ds}\left(\sum \frac{1}{\lambda_j^s}\right)|_{s=0}\right) = e^{-\zeta_A'(0)}, \tag{6.1}$$

gdzie

$$\zeta_A'(s) = \sum_j \frac{1}{\lambda_j^s} \tag{6.2}$$

jest *ζ-funkcją operatora A*.

W przypadku nieskończenie wymiarowym wyrażenie $\prod \lambda_j$ zwykle nie ma sensu. Ale ζ-funkcja jest dobrze określoną funkcją zespoloną, przynajmniej dla dużych $\mathrm{Re}\, s$. Istotnie, gdy operator ma postać $\Delta = D^*D + DD^*$, to mamy

$$\zeta_\Delta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \operatorname{tr} e^{-t\Delta} dt. \tag{6.3}$$

Ponadto, korzystając z rozwinięcia Seeley'ego (4.28), widzimy, że $\zeta_\Delta(s)$ jest meromorficzną funkcją na płaszczyźnie zespolonej z możliwymi biegunami w punktach $s = -\frac{k}{2m}$, $k = -n, -n+1, -n+2, \dots$.

Przy $s \to 0$ mamy $\Gamma(s) = \frac{1}{s}(1 + \dots)$, a więc $\zeta_\Delta(0) = \lim_{s\to 0} s \cdot U_0(\Delta) \cdot \int_0^1 t^{s-1} dt = U_0(\Delta)$ jest skończone. To oznacza, że funkcja $\zeta_\Delta(s)$ jest holomorficzna w otoczeniu $s = 0$ i ma dobrze zdefiniowaną pochodną $\zeta_\Delta'(0)$. Właśnie w tym sensie wzór

$$\det \Delta = e^{-\zeta'(0)} \tag{6.4}$$

definiuje wyznacznik operatora Δ.

Obecnie nosi on nazwę *regularyzacji Ray'a–Singera* i jest powszechnie używany w fizycznej i matematycznej literaturze (patrz [7], [46]).

B. Torsja Reideimeistera–Franza i torsja Ray'a–Singera. Prawdopodobnie właśnie od pracy D. Ray'a i I. Singera [41] rozpoczęło się stosowanie zregularyzowanych wyznaczników. Jej autorzy użyli tych wyznaczników do zdefiniowania tzw. analitycznej torsji (lub torsji Ray'a–Singera) w następującej sytuacji.

Niech M będzie rozmaitością riemannowską. Załóżmy, że jest dana reprezentacja $\rho : \pi_1(M) \to O(m)$ grupy podstawowej. Wtedy ρ zadaje wiązkę E nad M z włóknem$\mathbb{R}^m$. Mamy snopy $\mathcal{E}^j(E) = \mathcal{E}^j \otimes E$ form różniczkowych o wartościach w E i operator d różniczki zewnętrznej; oczywiście $d^2 = 0$, bo wiązka jest płaska. Niech d^* będzie operatorem sprzężonym do

d względem iloczynu skalarnego na $\mathcal{E}^*(E)$. Mamy laplasjany $\Delta = dd^* + d^*d$ i $\Delta_q = \Delta|_{\Gamma(\mathcal{E}^q(E))}$. Zróbmy jeszcze następujące istotne założenie:

$$\text{0 nie jest wartością własną dla } \Delta \tag{6.5}$$

(czyli wszystkie $\Delta_j > 0$). Zauważmy, że założenie (6.5) oznacza znikanie wszystkich kohomologii de Rhama o wartościach w E (nie ma form harmonicznych).

Torsją Ray'a–Singera nazywamy wyrażenie

$$T_\rho(M) = \frac{\left(\sqrt{\det \Delta_1}\right)^1 \left(\sqrt{\det \Delta_3}\right)^3 \ldots}{\left(\sqrt{\det \Delta_0}\right)^0 \left(\sqrt{\det \Delta_2}\right)^2 \ldots}, \tag{6.6}$$

gdzie wszystkie wyznaczniki są zdefiniowane wzorem (6.4). Ray i Singer w [41] udowodnili, że T_ρ jest niezmiennikiem rozmaitości M i reprezentacji ρ; np. nie zależy od metryki. W następnej pracy [42] wprowadzili analityczną torsję dla zespolonych rozmaitości; wzór jest ten sam, tylko $\Delta = \bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial$.

W [41] Ray i Singer wysunęli hipotezę, że $T_\rho(M)$ pokrywa się z torsją Reidemeistera (lub Reideimeistera–Franza) zdefiniowaną następująco. Niech K będzie rozbiciem symplicjalnym M i $\hat{K}$ jego nakryciem uniwersalnym, na którym grupa podstawowa $\pi_1 = \pi_1(M) = \pi_1(K)$ działa za pomocą przekształceń nakrywających. Wtedy grupy łańcuchów $C_q(\hat{K})$ są modułami nad algebrą grupową $\mathbb{R}(\pi_1)$. Definiujemy następujący kompleks łańcuchowy $C : C_n \to C_{n-1} \to \ldots$ złożony z $\mathbb{R}(\pi_1)$-modułów $C_q = C_q(K, \rho) = \mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}(\pi_1)} C_q(\hat{K})$. Zakładamy, że

$$\text{kompleks } C \text{ jest acykliczny,} \tag{6.7}$$

czyli dokładny (z zerowymi grupami homologii).

Niech $\mathbf{c}_q$ będą wybranymi bazami w C_q. Wybierzmy bazy $\tilde{\mathbf{b}}_q$ w $B_q = \partial C_{q+1}$ i niech $\hat{\mathbf{b}}_{q-1} \subset C_q$ będą takimi układami niezależnych elementów, że $\partial\hat{\mathbf{b}}_{q-1} = \tilde{\mathbf{b}}_{q-1}$. Założenie (6.7) implikuje, że $\mathbf{b}_q = \left(\tilde{\mathbf{b}}_q, \hat{\mathbf{b}}_{q-1}\right)$ też jest bazą w C_q. Niech $[\mathbf{b}_q|\mathbf{c}_q] = |\text{wyznacznik zamiany baz}|$.

Torsja Reideimeistera, to

$$\tau_\rho(M) = \frac{[\mathbf{b}_1|\mathbf{c}_1] \cdot [\mathbf{b}_3|\mathbf{c}_3] \ldots}{[\mathbf{b}_0|\mathbf{c}_0] \cdot [\mathbf{b}_2|\mathbf{c}_2] \ldots}. \tag{6.8}$$

Można ją przedstawić także w następującej postaci

$$\tau_\rho(M) = \frac{\left(\sqrt{\det \Delta_1^c}\right)^1 \left(\sqrt{\det \Delta_3^c}\right)^3 \ldots}{\left(\sqrt{\det \Delta_0^c}\right)^0 \left(\sqrt{\det \Delta_2^c}\right)^2 \ldots},$$

gdzie tzw. kombinatoryczne laplasjany $\Delta_j^c = \Delta^c|_{C_j}$ są wyznaczone za pomocą $\Delta^c = \partial^\top\partial + \partial\partial^\top$, a $\partial^\top$ jest macierzą transponowaną do macierzy odpowiadającej ∂ w bazie $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_0, \ldots, \mathbf{c}_n)$.

Ray i Singer wysunęli przypuszczenie, że $T_\rho(M) = \tau_\rho(M)$. Tę hipotezę później niezależnie udowodnili J. Cheeger [25] i W. Müller] [38].

C. Eta-niezmiennik i asymetria spektralna. Dotychczasowe niezmienniki rozmaitości związane z indeksami pewnych operatorów eliptycznych były nietrywialne tylko dla rozmaitości o parzystym wymiarze ($i_{top} = 0$ na nieparzystowymiarowych rozmaitościach). Jak zdążyliśmy się przekonać, te niezmienniki są związane z dzeta-funkcją operatorów eliptycznych drugiego rzędu; na przykład, $i_{an}(d + d^*) = \zeta_{d^*d}(0) - \zeta_{dd^*}(0)$.

Na rozmaitościach o nieparzystym wymiarze istnieją eliptyczne operatory różniczkowe pierwszego rzędu, które są samosprzężone, ale zbiór ich wartości własnych rozciąga się od $-\infty$ do $+\infty$. Na przykład,

$$A\phi = (-1)^{p+1} * d\phi + (-1)^p d * \phi, \quad \phi \in \mathcal{E}^{2p}(M), \tag{6.9}$$

$\dim M = 4k - 1$.

Dla takich operatorów M. Atiyah, V. Patodi i I. Singer [APS] wprowadzili następującą *η-funkcję*

$$\eta_A(s) = \sum_{\lambda \neq 0} sign(\lambda) \cdot |\lambda|^{-s}, \tag{6.10}$$

suma po wartościach własnych A. Podobnie jak dzeta-funkcja, $\eta_A(s)$ przedłuża się meromorficznie na całą płaszczyznę zespoloną. Ponadto, także $\eta_A(0)$ jest skończone.

Właśnie $\eta_A(0)$ okazuje się być niezmiennikiem topologicznym rozmaitości (dla odpowiedniego A). Na przykład, dla operatora (6.10) zachodzi następujący wzór (patrz [APS])

$$\tau(T) - \int_Y L_k(p(Y)) = (-1)^{k+1}\eta_A(0), \tag{6.11}$$

gdzie Y jest $4k$-wymiarową rozmaitością taką, że $M = \partial Y$ (i lokalnie Y jest izometryczna z $M \times [0, 1))$, $\tau(Y)$ jest sygnaturą formy przecięć na $H^{2k}(Y, M)$, zaś L_k jest L-genusem Hirzebrucha. Własność $\eta_A(0) \neq 0$ nosi nazwę *asymetrii spektralnej.*

W pracy [12] znaleziono zastosowanie wzoru podobnego do (6.11) w analitycznej teorii liczb. Pewien szereg postaci $L(s) = \sum_\mu sign(N(\mu)) \cdot |N(\mu)|^{-s}$ (tzw. L-szereg), gdzie μ przebiega pewną kratę w danym rozszerzeniu algebraicznym ciała liczb wymiernych, a $N(\mu)$ jest jego normą, jest analogiczny do szeregu w (6.10). Hirzebruch postulował, a M. Atiyah, H. Donnelly i I. Singer udowodnili, że $L(s)$ wyraża się wzorem analogicznym do (6.11) dla pewnej specjalnie dobranej rozmaitości M.

7. Fizyka matematyczna. Jak na jednego z czołowych matematyków swoich czasów, Atiyah bardzo późno zainteresował się fizyką (Singer był dużo bardziej aktywny na tym polu). Prawdopodobnie przyczyną był brak problemów pochodzenia fizycznego, które by 'pasowały' do jego zainteresowań i doświadczeń (które wywodzą się z K-teorii i geometrii algebraicznej).

A. Instantony. Taki problem pojawił się w połowie lat 70-tych ubiegłego stulecia. W 1975 r. A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwartz i Y. Tyupkin [23] znaleźli przykłady nietrywialnych globalnych rozwiązań równań Eulera–Lagrange'a dla lagranżjanu Yanga–Millsa. Powstało pytanie, jak znaleźć wszystkie rozwiązania. Matematycy, na czele z Atiyahem, rozwiązali ten problem w sposób naprawdę imponujący. Prawdopodobnie była to ostatnia spektakularna demonstracja intelektualnej przewagi matematyków nad fizykami.

Warto dodać, że pola Yanga–Millsa stanowią uogólnienia pola elektromagnetycznego i okazały się bardzo użyteczne przy klasyfikacji cząstek elementarnych, np. w teorii Weinberga–Salama słabych oddziaływań i w chromodynamice kwantowej (patrz [47]).

Działanie rozważane przez fizyków, to funkcjonał energii

$$\mathcal{S}(A) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^4} |F|^2 d^4x, \tag{7.1}$$

gdzie $F = \sum F_{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu \wedge A_\nu] = [\nabla_\mu \wedge \nabla_\nu]$, jest formą *krzywizny* koneksji $\nabla_\mu = \partial_\mu + A_\mu dx_\mu$ trywialnej wiązki E nad $\mathbb{R}^4$ z włóknem $\mathbb{C}^2$ i z grupą strukturalną $SU(2) = Sp(1)$. (Tutaj krzywizna jest oznaczana przez F, a nie przez R, jak w punkcie 4G.) Zatem $A_\mu(x)$, $\mu = 1,\dots,4$, i $F_{\mu\nu}(x)$, $\mu,\nu = 1,\dots,4$, są elementami algebry Liego $su(2) = \left\{ \begin{pmatrix} i\alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & -i\alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C} \right\}$. Ponadto $|F|^2 = -\sum_{\mu,\nu} \operatorname{tr}(F_{\mu\nu})^2$, czyli lagranżjan wynosi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}|F|^2\, VOL = -\operatorname{tr} F \wedge *F, \tag{7.2}$$

gdzie $*$ jest gwiazdką Hodge'a: $*dx_1 \wedge dx_2 = dx_3 \wedge dx_4$, $*dx_1 \wedge dx_3 = dx_4 \wedge dx_2$, $*dx_1 \wedge dx_4 = dx_2 \wedge dx_3$. Zauważmy, że $*^2 = id$ na $\Lambda^2\mathbb{R}^4$ oraz, że $(A,B) = -\operatorname{tr}(AB)$ jest dodatnio określoną formą Killinga na $su(2)$.

Jeśli $A + a$ jest wariacją koneksji ($a = \delta A$ małe), to wariacją krzywizny jest $F + \delta F$, $\delta F = \nabla \wedge a$ i wariacja działania wynosi $\delta\mathcal{S} = -\int(F, [\nabla \wedge a])$. Ponieważ $\nabla = d + A$ i $d^* = - * d*$, oraz niezmienniczość formy Killinga $(A, [B,C]) = -([B,A],C)$ implikuje $(ad_A)^* = - * ad_A *$, więc mamy $\delta\mathcal{S} = \int(\nabla^* F, a)$, gdzie $\nabla^* = - * \nabla *$. Zatem równania Eulera–Lagrange'a przyjmują postać tzw. *równań Yanga–Millsa*

$$\nabla \wedge *F = 0. \tag{7.3}$$

Z drugiej strony tożsamość Jacobiego w $su(2)$ implikuje następującą *tożsamość Bianchi*

$$\nabla \wedge F = 0. \tag{7.4}$$

Koneksja A nazywa się *samodualną* (odpowiednio *anty-samodualną*), jeśli

$$F = *F \quad (\text{odp. } F = - * F).$$

Jest zatem oczywiste, że samodulane i anty-samodualne koneksje tworzą rozwiązania równań Yanga–Millsa. Ponieważ zmiana orientacji prowadzi do zmiany $* \to -*$, to samodualne koneksje przechodzą na anty-samodualne i odwrotnie.

Dla fizyków istotne jest, aby energia pola była skończona, czyli aby $|F(x)|$ malało dostatecznie szybko przy $|x| \to \infty$. To oznacza, że blisko nieskończoności *potencjał* $A(x)$ można sprowadzić do niemal zera za pomocą odpowiedniego *cechowania*, czyli zamiany $y \to g(x)y$ zmiennych we włóknach E_x. Taka zamiana prowadzi do $A(x) \to g^{-1}Ag + g^{-1}dg$ i $F \to g^{-1}Fg$.

Zatem zakładamy dodatkowo, że $A(x) \sim g^{-1}(x)dg(x)$ przy $|x| \to \infty$, gdzie $g(x) \in SU(2)$. W szczególności, możemy określić odwzorowanie $g : S^3_R \to SU(3)$, gdzie S^3_R jest sferą o dużym promieniu R, a $SU(2) \simeq S^3$. Zakłada się, że stopień tego odwzorowania jest niezerowy; oznaczamy go przez k. Okazuje się, że tego typu dane prowadzą do koneksji w pewnej wiązce nad $S^4 = \mathbb{R}^4 \cup \infty$, którą dalej będziemy oznaczać przez E, ale która już nie jest trywialna. Dokładniej, E ma nietrywialny tzw. *topologiczny ładunek*

$$k = \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^4} \operatorname{tr}(F \wedge F), \tag{7.5}$$

czyli $k = \langle -c_2(E), [S^4] \rangle = \frac{1}{2} \langle p_1(E), [S^4] \rangle$. Przypomnijmy, że $c(E) = \det(1 + \frac{i}{2\pi}F) = 1 + c_1 + c_2 + \ldots$, gdzie $c_1 = \frac{i}{2\pi} \operatorname{tr} F = 0$ i że $p_1(E) = c_1^2 - 2c_2$. Zatem $p_1(E) = 2k$.

Jeśli rozłożymy krzywiznę na część samodualną i anty-samodualną,

$$F = F^+ + F^-, \tag{7.6}$$

to możemy napisać

$$\mathcal{S} = \|F^+\|^2 + \|F^-\|^2, \quad 8\pi^2 k = \|F^+\|^2 - \|F^-\|^2. \tag{7.7}$$

Zatem rozwiązania samodualne (odpowiednio anty-samodualne) realizują minimum $\mathcal{S}$ przy warunku (7.5) dla $k < 0$ (odpowiednio dla $k > 0$). Nazywamy je odpowiednio *instantonami* i *anty-instantonami*.

Zadanie (z którym fizycy sobie nie poradzili) polega na znalezieniu wszystkich anty-samodualnych koneksji modulo przekształcenia cechowania o zadanym (dodatnim) ładunku topologicznym.

Poniżej przedstawiamy te koneksje. Potem nakreślimy schemat dowodu, że są to wszystkie rozwiązania.

Będziemy używać zmiennych kwaternionowych $x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$, ze sprzężeniem $\bar{x} = x_1 - ix_2 - jx_3 - kx_4$, z modułem $|x|^2 = x\bar{x}$, z częścią urojoną $\operatorname{Im} x = \frac{1}{2}(x - \bar{x}) = ix_2 + jx_3 + kx_4$ i z własnością $\overline{xy} = \bar{y} \cdot \bar{x}$. Wtedy algebrę Liego $su(2)$ utożsamiamy z $\operatorname{Im} \mathbb{H}$:

$$i \longleftrightarrow \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Potencjał koneksji $A(x) = \sum A_{\mu(x)} dx_\mu$ będziemy zapisywać jako $\operatorname{Im}\{f(x)dx\}$ $= \frac{1}{2}\left\{f(x)dx - d\bar{x}\overline{f(x)}\right\}$.

Zauważmy, że $dx \wedge d\bar{x} = -2[(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4)i + (dx_1 \wedge dx_3 + dx_4 \wedge dx_2)j + (dx_2 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3)k]$ ma składowe tylko samodualne, czyli $*dx \wedge d\bar{x} = dx \wedge d\bar{x}$. Za to forma $d\bar{x} \wedge dx$ jest anty-samodualna.

Rozwiązanie Belavina i jego kolegów jest następujące:

$$A(x) = \operatorname{Im}\left\{\frac{\bar{x}dx}{1 + |x|^2}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\bar{x}dx - d\bar{x}x}{1 + |x|^2}\right\} \tag{7.8}$$

z krzywizną

$$F = dA + A \wedge A = \frac{d\bar{x} \wedge dx}{(1 + |x|^2)^2}. \tag{7.9}$$

A więc A jest anty-instantonem. Ponadto z (7.8) wynika, że dla dużych $|x|$ mamy $A(x) \sim \operatorname{Im} x^{-1}dx = \varphi^{-1}d\varphi$, gdzie $\varphi(x) = x/|x|$ mierzy 'fazę' kwaternionu; zatem jego ładunek topologiczny wynosi $k = \deg\left(\varphi : S^3_R \to S^3\right) = 1$. Aby dostać instanton, trzeba przyjąć $A = \operatorname{Im}\left\{xd\bar{x}/(1 + |x|^2)\right\}$.

Anty-instanton (7.8) ma 'środek masy' w $x = 0$ i znormalizowaną 'amplitudę'. Zmieniając środek masy i amplitudę dostaniemy 5-parametrową rodzinę anty-instantonów

$$A(x) = \mu \operatorname{Im}\left\{\frac{(\bar{x} - \bar{a})dx}{1 + |x - a|^2}\right\}, \quad \mu > 0, \quad a \in \mathbb{H}. \tag{7.10}$$

Zauważmy teraz, że gwiazdka Hodge'a działająca na 2-formach w 4-wymiarowej przestrzeni jest niezmiennicza względem konforemnej zmiany metryki. Rzeczywiście, pomnożenie metryki g przez λ powoduje pomnożenie elementu objętości $VOL = \sqrt{\det g}d^4x$ przez λ^2, zaś na T^*M metryka jest dana przez g^{-1}. Podobnie lagranżjan Yanga–Millsa jest konforemnie niezmienniczy.

Stąd wynika, że równania (anty-)samodualności można przenieść na S^4, uzwarcenie $\mathbb{H}$ przy pomocy rzutu stereograficznego. Z drugiej strony, S^4 można potraktować jako kwaternionową przestrzeń rzutową $\mathbb{HP}^1$. Tutaj działa grupa $PSL(2, \mathbb{H})$ przekształceń Möbiusa. W szczególności mamy 5-parametrową rodzinę przekształceń

$$x \to \lambda(b - x)^{-1}, \quad \lambda > 0, \quad b \in \mathbb{H}. \tag{7.11}$$

Okazuje się, że zamiast (7.10) wygodniej jest przedstawiać wszystkie anty-instantony z $k = 1$ za pomocą podstawienia (7.11) w (7.8).

Tę własność można zastosować do skonstruowania pewnych anty-instantonów dla dowolnego $k > 0$:

$$A(x) = \operatorname{Im}\left\{\frac{u^*(x)du(x)}{1 + u^*(x)u(x)}\right\}, \tag{7.12}$$

gdzie

$$u(x) = \left[\lambda(B - x)^{-1}\right]^*. \tag{7.13}$$

Tutaj $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ jest wektorem utworzonym z kwaternionów, B jest *symetryczną* $k \times k$ macierzą utworzoną z kwaternionów, zaś $C^* = \bar{C}^\top$ (zatem $u(x)$ jest wierszem, a $u^*(x)$ jest kolumną). Ponadto wymaga się, aby:

(I) $B^*B + \lambda^*\lambda$ była rzeczywistą $k \times k$ macierzą (dla (7.11) to jest spełnione);

(II) układ równań $(B - x)\xi = 0$, $\lambda\xi = 0$ w $\mathbb{H}^k$ miał tylko zerowe rozwiązanie, czyli rząd $(k+1) \times k$ macierzy $\binom{\lambda}{B-x}$ był maksymalny dla dowolnego $x \in \mathbb{H}$ (dla (7.11) tak jest).

W (7.13) występuje pewna niejednoznaczoność: jeśli

$$\lambda' = q\lambda T, \quad B' = T^{-1}BT, \text{ gdzie } q \in \mathbb{H}, \quad |q| = 1, \quad T \in O(k), \tag{7.14}$$

to para (λ', B') zadaje taki sam potencjał (7.12).

Okazuje się, że wzory (7.12), (7.13) z warunkami (I) i (II) i relacją równoważności (7.14) opisują wszystkie anty-instantony z ładunkiem topologicznym k. Łatwo policzyć, że to rozwiązanie zależy od $8k - 3$ parametrów.

Jest to treścią twierdzenia udowodnionego przez M. Atiyaha, V. Drinfelda, N. Hitchina i Yu. Manina [13] i nazywa się ADHM-konstrukcją.

Jego historia jest również dosyć pouczająca. Najpierw M. Atiyah, N. Hitchin i I. Singer [14] policzyli, że ogólne rozwiązanie powinno zależeć od $8k - 3$ parametrów. Potem M. Atiyah i R. Ward [21] nakreślili schemat zastosowania geometrii algebraicznej i transformacji Penrose'a do znalezienia ogólnych rozwiązań. Na koniec, w 3-stronicowej notatce [13] w *Physical Letters* pokazano, że powyższe rozwiązania są kompletne i że opisują się w terminach algebry liniowej. Wszystko to działo się około roku 1977. Ale detale dowodów zostały wyjawione światu znacznie później, przy czym oksfordczycy zrobili to niezależnie od moskwiczan. Atiyah [3] opublikował je w 1979 r w Pizie, gdzie miał wykłady. Manin zamieścił je w swojej książce [35] wydanej w 1984 r. w Moskwie (po rosyjsku).[6]

[6] Przyznaję się, że usiłowałem czytać książkę Manina; niestety nie byłem w stanie jej zrozumieć. Z wykładami Atiyaha (które są dosyć trudno dostępne) zapoznałem się dopiero przy pracy nad tym artykułem; w pierwszej chwili byłem nimi zachwycony, dopiero później zaczęły się pojawiać pewne problemy i nieścisłości (o których sza!).

Przejdźmy do dowodu zupełności rozwiązań (7.12)–(7.13).

Najpierw dowodzi się, że przestrzeń moduli takich rozwiązań ma wymiar taki sam jak liczba parametrów, które znaleźliśmy. Dla tego celu rozważa się następujący kompleks eliptyczny

$$0 \to \mathcal{E}^0(\mathfrak{g}) \xrightarrow{D_0} \mathcal{E}^1(\mathfrak{g}) \xrightarrow{D_1} \mathcal{E}^2_-(\mathfrak{g}) \to 0, \tag{7.15}$$

gdzie $\mathcal{E}^j(\mathfrak{g}) = \mathcal{E}^j(S^4) \otimes \mathfrak{g}$ są snopami j-form o wartościach w wiązce $\mathfrak{g}$ algebr Liego (stowarzyszoną z wiązką E o ładunku topologicznym $-k$), $D_0 = \nabla = d + A_0$ jest pochodną kowariantną z samodualnym potencjałem A_0, zaś D_1 jest złożeniem pochodnej kowariantnej i rzutowania na przestrzeń anty-samodualnych form. Indeks analityczny tego kompleksu, to $h^0 - h^1 + h^2$, gdzie $h^0 = \dim\ker D_0 = 0$ (bo na S^4 nie ma globalnych ∇-płaskich przekrojów dla typowego A_0), $h^1 = \dim(\ker D_1/\operatorname{Im} D_0)$ jest wymiarem przestrzeni deformacji A_0 modulo działanie infinitezymalnych przekształceń cechowania oraz $h^2 = \dim\operatorname{coker} D_1$. (Zatem liczymy wymiar przestrzeni moduli instantonów, który jest taki sam jak wymiar przestrzeni moduli anty-instantonów.) W [14] dowodzi się, że $h^2 = 0$; sprowadza się równanie $D_1^*\varphi = 0$ do równania $\left(\Delta + \frac{1}{6}R\right)\phi = 0$, gdzie $R > 0$ jest krzywizną skalarną sfery. Teoria deformacji Kuranishiego mówi, że jeśli $h^2 = 0$, to infinitezymalne deformacje odpowiadają faktycznym deformacjom, czyli że $h^1 = \dim\mathcal{M}$ jest wymiarem przestrzeni moduli instantonów $\mathcal{M}$. Z drugiej strony, indeks analityczny kompleksu (7.15) wylicza się w terminach topologicznych i wynosi on $p_1(\mathfrak{g}) + \dim G\cdot(b^0 - b^1 + b^2_-)$, gdzie $p_1(\mathfrak{g})$ jest liczbą Pontriagina wiązki $\mathfrak{g}$ (i wynosi $-8k$ w naszym przypadku) zaś $b^0 - b^1 + b^2_- = \frac{1}{2}(e(M) - \tau(M))$ jest indeksem kompleksu $0 \to \mathcal{E}^0 \to \mathcal{E}^1 \to \mathcal{E}^2_- \to 0$ (i wynosi 1 w naszym przypadku); (b^2_+ i b^2_- są wymiarami przestrzeni form samodualnych i anty-samodualnych w $H^2_{dR}(M)$). Odsyłam czytelnika do [14] po więcej szczegółów.

Wiemy zatem, że znalezione rozwiązania tworzą pełną rodzinę, czyli wypełniają jakąś składową przestrzeni moduli $\mathcal{M}$. Ale mogłyby istnieć inne składowe i to należy wykluczyć. W tym celu nasz problem będzie zamieniony na odpowiedni problem wiązek holomorficznych nad $\mathbb{CP}^3$ i rozwiązany przy użyciu kohomologii snopów.

Najpierw przedstawimy wzory (7.12) –(7.13) w jednorodnej postaci. Użyjemy współrzędnych jednorodnych $(x:y)$ w $\mathbb{HP}^1$, tzn. $x = (x:1) \in \mathbb{H}$. Macierz $\binom{\lambda}{B-x}$ zastąpimy przez

$$v = v(x,y) = Cx + Dy = \begin{pmatrix} C_0x + D_0y \\ C_1x + D_1y \end{pmatrix}, \tag{7.16}$$

gdzie C_0, D_0 są wymiaru $1\times k$, a C_1, D_1 mają wymiar $k\times k$; dla $y = 1$, $C_0 = 0$, $D_0 = \lambda$, $C_1 = -I$ i $D_1 = B$ mamy poprzednią macierz. Założenie

(II) oznacza, że $v(x,y)$ ma maksymalny rząd dla $(x,y) \neq (0,0)$. Założenie (I) jest zastąpione następującym założeniem

$$\text{(7.17)} \qquad \text{macierz } \rho^2 := v^* v \text{ jest rzeczywista i dodatnia.}$$

Weźmy reprezentację biegunową $v(x,y) = V\rho$. Łatwo sprawdzić, że operator $Q = VV^*$ jest ortogonalnym rzutem na k-wymiarową podprzestrzeń $F_{(x:y)}$ (w $\mathbb{H}^{k+1}$) i że $V^*V = 1$.

Niech macierz U wymiaru $(k+1) \times k$ będzie taka, że

$$\text{(7.18)} \qquad U^*V = 0, \qquad U^*U = 1.$$

Wtedy operator $P = UU^*$ jest rzutem na 1-wymiarową podprzestrzeń $E_{(x:y)} = F_{(x:y)}^{\perp}$. W przypadku $v = \binom{\lambda}{B-x}$ bierzemy $U = \binom{-1}{u}\sigma$, $\sigma^2 = (1 + u^*u)^{-1}$, $u^* = \lambda(B-x)^{-1}$. Wtedy potencjał (7.12) zapisuje się w postaci $A = \sigma^{-1}\operatorname{Im}\{U^*dU\}\sigma - \sigma^{-1}d\sigma$, czyli jest równoważny z potencjałem

$$\text{(7.19)} \qquad A = \operatorname{Im}\{U^*dU\} = \frac{1}{2}\{U^*dU - dU^*U\}.$$

Koneksja określona za pomocą (7.19), gdzie U jest takie, że $P = UU^*$ jest rzutem, a $U^*U = 1$, jest naturalną koneksją indukowaną przez rzutowanie z $\mathbb{H}^{k+1}$ na podprzestrzeń $E_{(x:y)}$. Tutaj podprzestrzenie $E_{(x:y)}$ tworzą wiązkę E nad $\mathbb{HP}^1$ i jej przekroje są postaci $f = Ug$, $g : \mathbb{HP}^1 \to \mathbb{H}^{k+1}$, zaś $\nabla f = P(df) = UU^*d(Ug) = u[dg + U^*(dU)g]$. Z drugiej strony, mamy tożsamość $0 = d(U^*U) = dU^*U + U^*dU$, co daje $\nabla f = U[d + A]g$.

Nietrudno także zobaczyć, że wiązka F z włóknami $F_{(x:y)}$ jest sumą k wiązek izomorficznych z tautologiczną wiązką Hopfa nad $\mathbb{HP}^1$. Stąd wynika, że klasa Pontriagina wiązki E wynosi $2k$.

W następnym kroku zamieniamy zmienne kwaternionowe na zespolone. Zatem wprowadzamy przestrzenie $Z = \mathbb{C}^{2k+2}\ (\simeq \mathbb{H}^{k+1})$, $W = \mathbb{C}^k$ i zmienne $z = (x,y) \in \mathbb{C}^4\ (\simeq \mathbb{H}^2)$. Rozważamy odwzorowania

$$\text{(7.20)} \qquad B(z) : W \to Z,$$

$B(z) = \sum_1^4 B_i z_i$ takie, że dla każdego $z \neq 0$ obraz $U_z = B(z)W$ jest k-wymiarowy. Odwzorowanie (7.20) jest związane z $v(x,y)$ w (7.16) w następujący sposób. Weźmy przestrzeń $W \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H} = \mathbb{H}^k$. Odwzorowanie (7.20) chcemy przedłużyć do dwu-liniowego odwzorowania $B : \mathbb{H}^2 \otimes \mathbb{H}^k \to \mathbb{H}^{k+1}$. Przypomnijmy, że $\mathbb{H} = \{\zeta_1 + j\zeta_2\} = \{(\zeta_1, \zeta_2)\} = \mathbb{C}^2$ i że mnożenie przez j działa w następujący sposób: $(\zeta_1, \zeta_2)j = (-\bar\zeta_2, \bar\zeta_1)$. W analogiczny sposób mnożenie przez j działa na $Z = \mathbb{H}^{k+1}$ i na $\mathbb{H}^2$. To mnożenie indukuje automorfizm σ na Z taki, że $\sigma^2 = -1$, oraz inwolucję σ na $\mathbb{CP}^3$ (bo $j^2 = -1$ w $\mathbb{C}^4$). Na $\mathbb{H}^2 \otimes \mathbb{H}^k$ mnożenie przez j nie jest automatyczne, bo mamy $\sigma(z \otimes w) = (z \otimes w)j = z \otimes j\sigma(w) = \sigma(z) \otimes \sigma(w)$, gdzie σ jest pewną inwolucją na W ($\sigma^2 = 1$). Zakłada się, że B jest zgodne z σ, tzn.

$$B(\sigma(z) \otimes \sigma(w)) = \sigma B(z \otimes w)$$

i dlatego jest postaci $Cx + Dy$ (jak w (7.16)).

Ponadto na Z mamy niezdegenerowaną anty-symetryczną formę

$$[u, v] = (u, \sigma v) = (u, jv),$$

gdzie $(u, v) = \mathrm{Re}(uv^*)$ jest zwykłym iloczynem hermitowskim. Następne założenie mówi, że

(7.21) przestrzenie U_z są izotropowe względem $[\cdot, \cdot]$.

To ostatnie założenie odpowiada założeniu (7.17).

Odwzorowanie (7.20) i warunek (7.21) stanowią wstępne dane do tzw. *konstrukcji Horrocksa* [33] pewnej 2-wymiarowej wiązki holomorficznej nad $\mathbb{CP}^3$. Punktowi $(z) = (z_1 : z_1 : z_3 : z_4) \in \mathbb{CP}^3$ przypisujemy dwie podprzestrzenie $U_{(z)}$ (wymiaru k) i $U^0_{(z)}$ (wymiaru $k + 2$) przestrzeni Z (wymiaru $2k + 2$)), przy czym $U^0_{(z)}$, to przestrzeń polarna do $U_{(z)}$. Kładziemy

$$\tilde{E}_{(z)} = U^0_{(z)}/U_{(z)}. \tag{7.22}$$

W ten sposób dostajemy wiązkę $\tilde{E} \to \mathbb{CP}^3$, która jest holomorficzna, ale która może nie być lokalnie trywialna (bo $\dim \tilde{E}_{(z)}$ mógłby podskoczyć). Okazuje się, że nad prostymi (rzutowymi) $\ell_{(z)} \subset \mathbb{CP}^3$ łaczącymi (z) i (σz) wiązka ma 2-wymiarowe włókna, a nawet ograniczona wiązka $\tilde{E}|_{\ell_z} \to \ell_z$ jest trywialna.

Zatem koneksja anty-samodualna nad S^4, którą skonstruowaliśmy poprzednio, doprowadziła do algebraicznej wiązki $\tilde{E}$ nad $\mathbb{CP}^3$. Powstaje pytanie, czy dla każdej anty-samodualnej koneksji nad S^4 można skonstruować analogiczną wiązkę nad $\mathbb{CP}^3$. Okazuje się, że tak i do tego celu wykorzystuje się tzw. transformację Penrose'a.

Transformacja Penrose'a jest to zespół kilku rozwłóknień, które służą do zamiany pól na $\mathbb{R}^4$ (lub na przestrzeni Minkowskiego) na algebraiczne obiekty na zespolonej przestrzeni rzutowej. Najważniejszym z tych rozwłóknień jest odwzorowanie (kwaternionowe rozwłóknienie Hopfa)

$$\mathbb{CP}^3 \to \mathbb{HP}^1, \quad (z) \to (z_1 + z_2 j : z_3 + z_4 j), \tag{7.23}$$

z włóknem $\mathbb{CP}^1$. Przypomnijmy, że mnożenie przez j indukuje inwolucję σ przestrzeni $\mathbb{CP}^3$.

W $\mathbb{CP}^3$ mamy proste rzutowe. Są one numerowane przez zespolony Grassmannian 2-wymiarowych płaszczyzn w $\mathbb{C}^4$, który można przedstawić w postaci hiperpowierzchnii stożkowej Q w $\mathbb{CP}^5$. Jeśli $p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$ są współrzędnymi Plückera na $\Lambda^2\mathbb{C}^4$, to

$$Q = \{p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0\} \tag{7.24}$$

(kwadryka Kleina) odpowiada rozkładalnym elementon $\Lambda^2\mathbb{C}^4$ postaci $u \wedge v$, generującym płaszczyzny $\mathbb{C}u + \mathbb{C}v$. Inwolucja σ działa również na przestrzeni prostych, czyli na Q. Jej zbiór punktów stałych zadaje podrozmaitość w Q

dyfeomorficzną z S^4. Te proste (niezmiennicze względem σ), to dokładnie włókna wiązki (7.23). Nazywamy je *prostymi rzeczywistymi*.

Okazuje się, że wiązki E nad S^4 (z włóknem $\mathbb{C}^2$) wyposażone w anty-samodualną koneksję można podnieść do 2-wymiarowych wiązek $\tilde{E}$ nad $\mathbb{CP}^3$. Przy tym dostaje się holomorficzne wiązki wyposażone w koneksje zgodne (na ile to możliwe) ze strukturą holomorficzną i strukturą unitarną; w każdym bądź razie są typu $(1,0)$ i ich krzywizna jest formą typu (1,1). Ponadto ograniczenia wiązki $\tilde{E}$ nad prostymi rzeczywistymi w $\mathbb{CP}^3$ są trywialne.

Teraz chciałoby się, aby wiązka $\tilde{E}$ powstała z konstrukcji Horrocksa. Do tego celu autorzy [13] wykorzystują pewne *twierdzenie Bartha* [Bar], które mówi, że tak rzeczywiście jest, jeśli dodatkowo założyć

$$H^1(\mathbb{CP}^3, \tilde{E}(-2)) = 0. \tag{7.25}$$

W [3] jest nawet przytoczony dowód tego twierdzenia.

W przypadku wiązek pochodzących od anty-samodualnych koneksji nad S^4 elementy $\Phi \in H^1(\mathbb{CP}^3, \tilde{E}(-2))$ są traktowane jako pewne funkcje φ na S^4. Rzecz w tym, że po ograniczeniu do rzeczywistych prostych $\ell \subset \mathbb{CP}^3$ (nad którymi $\tilde{E}$ jest trywialne) mamy $H^1(\ell, \tilde{E}(-2)) = \tilde{E}_{(z)} \otimes H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}(-2)) = \tilde{E}_{(z)} \otimes \mathbb{C}$ (z dualności Serre'a). W ten sposób dostajemy pewną wiązkę nad S^4 postaci $E \otimes N$, $\dim N = 1$, i φ jest jej przekrojem. Pokazuje się, że φ spełnia równanie $(\nabla^*\nabla + \frac{1}{6}R)\varphi = 0$, $R > 0$. Zatem $\varphi = 0$ i (7.25) zachodzi.

Na zakończenie tego punktu warto dodać, że w podobny sposób rozwiązano problem monopoli w $\mathbb{R}^3$. Po definicje i szczegóły odsyłam czytelnika do zbioru [37].

B. Anomalie i indeks. W kwantowej teorii pola fizycy często napotykają się na tzw. anomalie, np. chiralna anomalia, konforemna anomalia.

Istota anomalii polega na tym, że przy kwantowaniu pewnych pól używa się całek typu feynmanowskiego, z których najprostsze są typu gaussowskiego od nieskończonej liczby zmiennych. Wtedy trzeba liczyć wyznaczniki nieskończenie wymiarowych operatorów typu operatora Laplace'a. Jedyną rozsądną metodą wyznaczania takich wyznaczników jest regularyzacja Ray'a–Singera $\det \Delta = e^{-\zeta'_\Delta(0)}$ (opisana w poprzednim rozdziale). Niestety, przeważnie okazuje się, że pewne własności symetrii lagranżjanu przestają być zachowywane.

Na przykład, przy kwantowaniu pola elektromagnetycznego lub pola Yanga–Millsa chciałoby się jakoś uwzględnić symetrię względem nieskończenie wymiarowej grupy przekształceń cechowania. Można wybierać cięcie w przestrzeni pól transwersalne do orbit grupy cechowania, ale żaden taki wybór nie jest kanoniczny, a przejście od jednego cięcia do innego wiąże się z liczeniem nieskończenie wymiarowego wyznacznika. Jednym słowem, są trudności.

W pracach [4], [5] i [20] Atiyah i Singer proponują podejście do tego problemu za pomocą teorii indeksu rodziny operatorów eliptycznych. Na przykład, jeśli mamy rodzinę D_y operatorów eliptycznych zależnych od parametru $y \in Y$, czyli mamy operator $D : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ związany z wiązkami nad $M \times Y$ (eliptyczny w kierunku M), to wirtualna wiązka $\ker D_y - \ker D_y^*$ tworzy element grupy $K(Y)$, który może być nietrywialny.

Inna możliwość to $i_{an} D_y = 0$ i dla typowego $y \in Y$ mamy $\ker D_y = \ker D_y^* = 0$. W pewnych punktach $\dim \ker D_{y_0}$ może podskoczyć. To odpowiadałoby temu, że pewien wyznacznik, lokalnie skończonego wymiaru, zeruje się w y_0. Z powodu nietrywialności wiązki E nad $M \times Y$ często nie można zdefiniować tego wyznacznika globalnie.

Inna ewentualność, to niemożliwość wyboru zgodnej fazy dla wyznacznika operatora Diraca zależnego od parametrów.

C. Topologiczna teoria pola i wielomian Jones'a. *Topologiczna teoria pola w wymiarze d* przypisuje (patrz [7]):

– przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}(\Sigma)$ każdej zwartej d-wymiarowej rozmaitości Σ,

– wektor $Z(Y) \in \mathcal{H}(\Sigma)$ każdej $(d+1)$-wymiarowej rozmaitości Y z brzegiem Σ.

Powyższy funktor spełnia następujące aksjomaty:

A1 (inwolutywność) $\mathcal{H}(\Sigma^*) = \mathcal{H}(\Sigma)^*$, gdzie * oznacza rozmaitość z odwróconą orientacją lub sprzężoną przestrzeń;

A2 (multyplikatywność) $\mathcal{H}(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = \mathcal{H}(\Sigma_1) \otimes \mathcal{H}(\Sigma_2)$;

A3 (łączność) jeśli Y powstało z Y_1 i Y_2, $\partial Y_1 = \Sigma_1^* \cup \Sigma_2$ i $\partial Y_2 = \Sigma_2^* \cup \Sigma_3$, przez sklejenie wzdłuż Σ_2, to

$$Z(Y) = Z(Y_1)Z(Y_2) \in Hom\,(\mathcal{H}(\Sigma_1), \mathcal{H}(\Sigma_2)) = \mathcal{H}(\Sigma_1)^* \otimes \mathcal{H}(\Sigma_2);$$

A4 $\mathcal{H}(\varnothing) = \mathbb{C}$;

A5 $Z(\Sigma \times [0,1]) = id \in Hom\,(\mathcal{H}(\Sigma), \mathcal{H}(\Sigma))$.

Idea wprowadzenia tego funktora pochodzi od kwantowania pól $\phi : Y \to M$ z działaniem $\mathcal{S}(\phi) = \int_Y \mathcal{L}(\phi)$ metodą całek funkcjonalnych. Wtedy $\mathcal{H}(\Sigma)$ jest przestrzenią Hilberta ograniczeń pól na Σ, zaś element macierzowy operatora $Z(Y)$, $\partial Y = \Sigma_1^* \cup \Sigma_2$, na wektorach ψ_1, ψ_2, $\langle Z(Y)\psi_1, \psi_2\rangle$, jest interpretowany jako suma statystyczna

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-iS(\phi)},$$

gdzie całkowanie odbywa się po polach ϕ z ustalonymi wartościami na brzegu.

Dla $d = 0$ i $M = \mathbb{R}^k$ mamy zwykłą mechanikę kwantową z $\mathcal{H}(punkt) = L^2(M)$. Dla $d = 1$ i M rozmaitość Calabi–Yau mamy teorię strun. Atiyaha interesuje przypadek $d = 2$.

Zauważmy, że asjomat A5 implikuje, że działanie dyfeomorfizmów z $\mathit{Diff}(\Sigma)$ na $\mathcal{H}(\Sigma)$ zależy tylko od ich klas izotopii. Ponadto, jeśli Y jest rozmaitością zamkniętą, to $Z(Y)$ jest po prostu liczbą, która stanowi niezmiennik rozmaitości. Rozcięcie $Y = \Sigma \times S^1$ wzdłuż cięcia $\Sigma \times \{1\}$ prowadzi do wzoru $\dim \mathcal{H}(\Sigma) = Z(\Sigma \times S^1)$; dlatego też w [7] zakłada się, że przestrzenie $\mathcal{H}(\Sigma)$ są skończonego wymiaru.

Dla $d = 2$ rozważa się także *relatywną topologiczną teorię pola*. Tutaj w powierzchnii Σ wyróżnia się układ $\mathbf{P} = (P_1, \ldots, P_r)$ puktów $P_j \in \Sigma$. Przy tym każdy punkt P_j jest brany ze znakiem $+$ lub $-$ i jest z nim stowarzyszona pewna reprezetacja λ_j pewnej grupy Liego G. Takiej trójce $(\Sigma, \mathbf{P}, \boldsymbol{\lambda})$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ jest przypisana przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}(\Sigma, \mathbf{P}, \boldsymbol{\lambda})$. 3-wymiarowe rozmaitości Y są wyposażone w sploty $\mathbf{L} = (L_1, \ldots, L_s)$ złożone z węzłów $L_j \subset Y$; każdemu węzłowi L_j jest przypisana reprezentacja μ_j grupy G. Brzeg trójki $(Y, \mathbf{L}, \boldsymbol{\mu})$, to $(\Sigma, \mathbf{P}, \boldsymbol{\lambda}) = (\partial Y, \partial \mathbf{L}, \boldsymbol{\mu}|_{\partial \mathbf{L}})$, przy czym jeśli punktowi Q odpowiadała reprezentacja ν, to punktowi $-Q$ odpowiada reprezentacja ν^*. Takiej trójce przypisuje się wektor $Z(Y, \mathbf{L}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{H}(\Sigma, \mathbf{P}, \boldsymbol{\lambda})$.

Aksjomaty topologicznej teorii pola implikują pewne relacje, które przypominają relacje typu Alexandera–Conway'a z teorii węzłów. W szczególności, dla $Y = S^3$ i $G = SU(2)$ i standardowej 2-wymiarowej reprezentacji $\mu = \mu_j$ dla wszystkich L_j suma statystyczna $Z(Y, \mathbf{L}, \boldsymbol{\mu})$ okazuje się ściśle związana z tzw. wielomianem Jones'a splotu $\mathbf{L}$; definicję wielomianu Jones'a czytelnik znajdzie w [7].

Powstaje problem skonstruowania modelu spełniającego powyższe aksjomaty. Witten [45] zaproponował działanie Cherna–Simonsa

$$S(A) = \frac{1}{4\pi} \int_Y \operatorname{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right), \tag{7.26}$$

gdzie A jest koneksją w trywialnej G-wiązce nad Y, oraz

$$Z(Y, \mathbf{L}, \boldsymbol{\mu}) = \int \mathcal{D}A e^{ik\mathcal{S}(A)} \prod W_{L_j}(A).$$

W ostatnim wzorze tzw. *pętla Wilsona* $W_{L_j}(A)$ jest śladem w reprezentacji μ_j operatora holonomii $Mon_{L_j}(A)$ koneksji $d + A$ wzdłuż drogi L_j (przesunięcie równoległe). Ponieważ w (7.26) mamy całkę funkcjonalną, to teoria Wittena nie jest ścisła w sensie matematycznym.

Atiyah w [7] podjął próbę uściślenia tej teorii. Udało mu się skonstruować przestrzenie Hilberta $\mathcal{H}(\Sigma, \mathbf{P}, \boldsymbol{\lambda})$ używając θ-funkcji i przestrzeni moduli wiązek wektorowych nad Σ. Niestety, podstawowy problem określenia wektora $Z(Y, \mathbf{L}, \boldsymbol{\mu})$ pozostał niewyjaśniony.

Literatura

[1] L. Alvarez-Gaumé, *Supersymmetry and the Atiyah–Siger index theorem*, Commun. Math. Phys. **90** (1983), 161–173.

[2] M. Atiyah, "Collected works", v. 1–5, Clarendon Press, Oxford, 1988.

[3] M. Atiyah, "Geometry of Yang–Mills fields", Scuola Normale Superiore, Pisa, 1979; [również w: "Geometria i fizika uzlov", Mir, Moskwa, 1995, 79–185].

[4] M. Atiyah, *Anomalies and index theory*, Lect. Notes in Phys. **288**, Springer–Verlag, New York, 313–322.

[5] M. Atiyah, *Topological aspects of anomalies*, w: "Symposium on Anomalies, Geometry and Topology", World Sci. Press, 1984, 22–32.

[6] M. Atiyah, *Circular symmetry and stationary-phase approximation*, w: "Colloquium in honour of Laurent Schwartz", tom II, Asterisque, 1985, 43–60.

[7] M. Atiyah, "Geometry and physics of knots", Cambridge University Press, Cambridge, 1990; [po rosyjsku: Mir, Moskwa, 1995].

[8] M. Atiyah, R. Bott, *A Lefschetz fixed point formula for elliptic differential opearators*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 245–250.

[9] M. Atiyah, R. Bott, *A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. I*, Ann. Math. **86** (1967), 374–407; *II. Applications*, Ann. Math. **88** (1968), 451–491.

[10] M. Atiyah, R. Bott, V. K. Patodi, *On the heat equation and the index theorem*, Invent.Math. **19** (1973), 279–330; *Errata to the paper "On the heat equation and the index theorem"*, Invent. Math. **28** (1975), 277–280.

[11] M. Atiyah, R. Bott, A. Shapiro, *Clifford modules*, Topology **3** (1964), 3–38.

[12] M. Atiyah, H. Donnelly, I. M. Singer, *Eta invariant, signature defects and values of L–functions*, Ann. Math. **118** (1983), 131–177; *Eta invariant, signature defects and values of L–functions: the nonsplit case*, Ann. Math. **119** (1984), 635–637.

[13] M. Atiyah, N. J. Hitchin, V. G. Drinfeld, Y. I. Manin, *Construction of instantons*, Phys. Letters **A65** (1978), 185–187.

[14] M. Atiyah, N. J. Hitchin, I. M. Singer, *Self-duality in four-dimensional geometry*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **362** (1978), 425–461.

[15] M. Atiyah, V. K. Patodi, I. M. Singer, *Spectral asymetry and Riemannian geometry*, Bull. London Math. Soc. **5** (1973), 229–234.

[16] M. Atiyah, V. K. Patodi, I. M. Singer, *Spectral asymetry and Riemannian geometry. I*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **77** (1975), 43–69; *II*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **78** (1975), 405–432; *III*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **79** (1976), 71–99.

[17] M. Atiyah, G. Segal, *The index of elliptic operators. II*, Ann. Math. 87 (1968), 531–545.

[18] M. Atiyah, I. M. Singer, *The index of elliptic operators on compact manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 422–433.

[19] M. Atiyah, I. M. Singer, *The index of elliptic operators. I*, Ann. Math. **87** (1968), 484–530; *III*, Ann. Math. **87** (1968), 546–604; *IV*, Ann. Math. **93** (1971), 119–138; *V*, Ann. Math. **93** (1971), 139–149.

[20] M. Atiyah, I. M. Singer, *Dirac operators coupled to vector potentials*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **8** (1984), 2597–2600.

[21] M. Atiyah, R. S. Ward, *Instantons and algebraic geometry*, Comm. Math. Phys. **55** (1977), 117–124.

[22] W. Barth, K. Hulek, *Monads and moduli of vector bundles*, Manuscr. Math. **25** (1978), 323–347.

[23] A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwartz, Y. Tyupkin, *Pseudo-particle solutions of the Yang–Mills equations*, Phys. Letters **B59** (1975), 85

[24] J.-M. Bismut, *The Atiyah–Singer theorems: a probabilistic approach. I. The index theorem*, J. Funct. Anal. **57** (1984), 56–99; *II. The Lefschetz fixed point formula*, J. Funct. Anal. **57** (1984), 320–348.

[25] J. Cheeger, *Analytic torsion and the heat equation*, Ann. Math. **109** (1979), 259–322.

[26] B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, A. T. Fomenko, "Modern geometry — methods and applications. III. Introduction to homology theory", Springer–Verlag, New York, 1990; [po rosyjsku: "Sovremennaja geometria. Metody teorii gomologii", Nauka, Moskwa, 1984].

[27] J. J. Duistermaat, G. J. Heckman, *On the variation of the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space*, Invent. Math. **69** (1982), 259–268; *Addendum to "On the variation of the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space"*, Invent. Math. **72** (1983), 153–158.

[28] I. M. Gelfand, *O elipticeskikh uravneniakh*, Uspekhi Mat. Nauk **15** (1960) No 3, 121–132; [po angielsku: Russ. Math. Surv. **15** (1960) No 3, 113].

[29] E. Getzler, *Pseudo-differential operators on supermanifolds and the Atiyah–Singer index theorem*, Commun. Math. Phys. **92** (1983), 163–178.

[30] P. B. Gilkey, "The index theorem and the heat equation", Publish or Perish Inc., Boston, 1974.

[31] P. Griffiths, J. Harris, "Principles of algebraic geometry", John Wiley and Sons, New York, 1978; [po rosyjsku: Mir, Moskwa, 1982].

[32] F. Hirzebruch, "Topological methods in algebraic geometry", Springer–Verlag, New York, 1966; [po rosyjsku: Mir, Moskwa, 1973].

[33] G. Horrocks, *Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring*, Proc. London Math. Soc. **14** (1964), 684–713.

[34] H. B. Lawson, M.-L. Michelsohn, "Spin geometry", Princeton Un-ty Press, Princeton, 1989.

[35] Y. I. Manin, "Gauge field theory and complex geometry", Springer–Verlag, Berlin, 1997; [po rosyjsku: Nauka, Moskwa, 1984].

[36] J. Milnor, J. Stasheff, "Characteristic classes", Ann. Math. Studies **76**, Princeton Un-ty Press, Princeton, 1974; [po rosyjsku: Mir, Moskwa 1979].

[37] "Monopoli. Topologiceskie i variacionnye metody" (pod redakciej M. I. Monastyrskogo i A. G. Sergeeva), Mir, Moskwa, 1989 [po rosyjsku].

[38] W. Müller, *Analytic torsion and R-torsion of Riemannian manifolds*, Adv. Math. **28** (1978), 233–305.

[39] R. S. Palais, "Seminar on the Atiyah–Singer index theorem", Princeton Un-ty Press, Princeton, 1965; [po rosyjsku: Mir, Moskwa, 1970].

[40] A. Pressley, G. Segal, "Loop spaces", Clarendon Press, Oxford, 1986; [po rosyjsku: Mir, Moskwa, 1990].

[41] D. B. Ray, I. M. Singer, *R-torsion and the laplacian on Riemannian manifolds*, Adv. Math. **7** (1971), 145–210.

[42] D. B. Ray, I. M. Singer, *Analytic torsion for complex manifolds*, Ann. Math. **98** (1973), 154–177.

[43] M. Raussen, Ch. Skau (interviewers), *Interview with Michael Atiyah and Isadore Singer*, Europ. Math. Soc. **53** (2004), 24–30.

[44] R. Thom, *Quelques proprietés globales des variétés différentiables*, Comment. Math. Helv. **27** (1953), 198–232.

[45] E. W i t t e n, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Commun. Math. Phys. **117** (1989), 251–399.

[46] E. W i t t e n, *Index of elliptic operators*, w: "Quantum fields and strings. A course for mathematicians", tom I (P. Deligne and others, eds.), Amer. Math. Soc., Providence, 1999, str. 475–511.

[47] H. Ż o ł ą d e k, *Piąty problem milenijny: istnienie pola Yanga–Millsa i luka masowa*, Wiad. Matem. **XL** (2004), 23–34.