Planowanie eksperymentu

*Beata Bochentyn, Bogusław Kusz**

Potrzeba przeprowadzenia eksperymentu

Bardzo często istnieje potrzeba opisu procesów zachodzących w przyrodzie i zdarzeń wynikających z działalności człowieka, w tym obserwowanych zjawisk we wszechświecie, w społecznościach ludzkich, ciągów technologicznych, poszczególnych maszyn oraz zjawisk dziejących się na poziomie atomowym. Ta potrzeba wynika często z ciekawości, chęci lub konieczności zapewnienia sobie i innym bezpieczeństwa, chęci przetrwania i rozwoju. Ocena takich obiektów badań może być jakościowa lub ilościowa. Ocena jakościowa polega na ocenie własności dowolnego zdarzenia, procesu lub systemu w skalach relatywnych, np. (telewizor może być: mały, duży**,** kolorowy, czarnobiały), (czas występowania: zawsze, często, czasem, rzadko, nigdy), (ocena w pracy: bardzo dobra, dobra, wystarczająca, niewystarczająca). Ocena ilościowa to opis zawierający parametry liczbowe w odpowiednich jednostkach, charakteryzujących badane zjawisko lub obiekt badań (waga ciała: 74,5 kg; częstość bicia serca: 78 uderzeń/minutę; rozmiar boiska: 8 m na 16 m...). W celu zapewnia sobie maksymalnej szansy na osiągnięcie sukcesu w postaci prawidłowej i obiektywnej oceny jakościowej i ilościowej badanego obiektu należy dobrze zaplanować eksperyment.

Obiekt badań

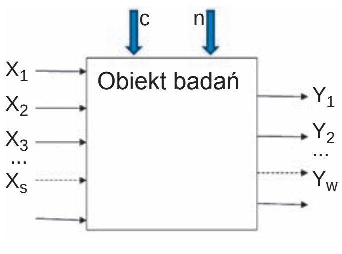
Podstawą postrzegania zjawisk we wszechświecie jest założenie, że jeśli nastąpiło zdarzenie (skutek), to musi wpierw zajść pierwotna przyczyna tego zjawiska. Przy założeniu prawdziwości przyczynowo-skutkowego modelu obiektu badań można wykazać, że metody planowania eksperymentu mają charakter uniwersalny. Można zaplanować dowolny eksperyment, korzystając z bogatej wiedzy na ten temat.

Ogólnie dowolny obiekt badań opisują następujące wielkości modelujące:

a) *niezależne wielkości wejściowe*: $(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_s)$, $k = 1, 2, \ldots, s$,

b) *zależne wielkości wyjściowe*: $(y_1, y_2, \ldots, y_p, \ldots, y_w)$, $p = 1, 2, \ldots, w$,

c) *wielkości stałe* (*c*), które mają wpływ na działanie układu, ale ich wartości są niezmienne w czasie,



Rys. 1. Obiekt badań – struktura

d) *wielkości zakłócające* (*n*), wynikające z losowości wpływu czynników x_k, niedoskonałości przyrządów pomiarowych i metod badawczych.

<u>a/ Obiekt badań. Wielkości wejściowe i normowanie</u>

Wielkościami wejściowymi mogą być dowolne interesujące wielkości: fizyczne, chemiczne, techniczne, socjologiczne, ekonomiczne i inne.

Dla każdej wielkości wejściowej najczęściej można określić przedział zmienności:

$x_{k\,min} \le x_k \le x_{kmax}$,

(np. ograniczenia zakresu wynikające tzw. fizyczność zagadnienia, potrzeb lub konieczności).

Normowanie

Częstą procedurą przy przygotowaniu eksperymentu jest normowanie wielkości. Zmienna fizyczna (z jednostką) zmieniająca się w zakresie $[x_{kmin}, x_{kmax}]$ może być zastąpiona bezwymiarową zmienną z zakresu $[-\alpha, \alpha]$. Wielkość α jest nazywana *ramieniem gwiezdnym*. Często przyjmuje się, że $\alpha = 1$.

Normowanie jest sposobem uniezależnienia się od fizycznej interpretacji.

<u>b/ Obiekt badań. Normowanie i denormowanie wielkości wejściowej</u>

Normowanie wielkości wejściowej x_k realizowane jest zgodne ze wzorem:

$$X_k^n = 2\alpha(x_k - x_{kmin}) / (x_{kmax} - x_{kmin}) - \alpha$$

gdzie: α – *ramię gwiezdne*, np. $\alpha = 1$ (wielkość bezwymiarowa).

Po unormowaniu wszystkie zmienne są bezwymiarowe o przedziale zmienności $[-\alpha, \alpha]$.

Denormowanie to procedura powrotu do początkowych zmiennych wejściowych (ww. wzór należy przekształcić).

Dla uproszczenia podmiotem badań i analizy będzie obiekt o jednej wielkości wyjściowej *y*.

<u>c/ Obiekt badań. Normowanie wielkości wejściowych dwustanowych</u>

Często wystarczy przyjąć, że każda ze zmiennych wejściowych występuje tylko na dwóch poziomach, czyli x_{kmin} i x_{kmax}, a po unormowaniu $-\alpha$ i α (ramię gwiezdne).

Może to być rzeczywiście zmienna o dwóch stanach lub zmienna o wartościach z całego przedziału $(x_{kmin}; x_{kmax})$.

Plany dwupoziomowe są słuszne także wtedy, gdy wartość wyjściowa y liniowo zależy i od tych zmiennych lub ich kombinacji liniowej:

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots + b_{12}X_1X_2 + + b_{12}X_3X_3 + .. + b_{ijk}X_iX_jX_k$$

Ogólny podział metod planowania eksperymentu

<u>a/ Planowanie jakościowe</u>

Planowanie jakościowe polega

na wyborze konfiguracji wejście-wyjście w celu zapewnienia identyfikacji niezbędnych lub wszystkich nieznanych parametrów systemu.

b/ Planowanie ilościowe

Planowanie ilościowe polega na optymalizacji schematu próbkowania, tj. liczby i lokalizacji próbek lub funkcji zmiennych. Optymalizacja ta ma zapewnić możliwość uzyskania maksimum informacji przy jak najmniejszej ilości badań. Granicę najmniejszej ilości badań wyznacza akceptowalny poziom występujących błędów i niepewności pomiarów.

Plan dla zmiennych zależnych i niezależnych od czasu

Ze względu na zależność zmiennych od czasu wyróżniamy dwa rodzaje planów:

a) ***statyczne*** – wszystkie zmienne są niezależne od czasu.

W przypadku statycznych pomiarów szybkość działania przyrządów pomiarowych nie ma dużego znaczenia w kontekście dokładności pomiaru.

b) ***dynamiczne*** – przynajmniej jedna ze zmiennych jest funkcją czasu.

W przypadku badań dynamicznych stanu obiektu badań istotną rolę odgrywa prawidłowy dobór przyrządów pomiarowych. Szybkość pomiaru (częstość próbkowania) musi być na tyle duża, aby zarejestrować w granicy oczekiwanej dokładności rzeczywiste parametry zmiennego w czasie procesu. Zbyt mała szybkość próbkowania może być powodem rejestracji zmian badanego obiektu o zmniejszonej dynamice niż to jest w rzeczywistości.

Plan dla zmiennych zależnych i niezależnych od czasu. Plan dynamiczny

O tym, jaka powinna być częstotliwość próbkowania, mówi twierdzenie o próbkowaniu. Z twierdzenia wynika, że idealne odtworzenie sygnału jest możliwe jeśli częstotliwość próbkowania jest większa niż dwukrotna największa częstotliwość sygnału próbkowanego. Jeśli sygnał jest próbkowany z częstotliwością mniejszą, to informacja zawarta w oryginalnym sygnale może nie być w całości odtworzona na podstawie sygnału dyskretnego.

Przykład: reakcje chemiczne, które zachodzą w czasie rzędu ps można obserwować laserem impulsowym o czasie trwania impulsu rzędu fs.

Wybór zakresu zmienności parametrów wejściowych, ilości pomiarów – plan eksperymentów

Po zdefiniowaniu problemu istotnym zagadnieniem jest dobór ilości pomiarów, tak aby:

– Osiągnąć cel w postaci zbadania obiektu z wymaganą dokładnością.

– Osiągnąć cel w racjonalnym możliwie najkrótszym czasie.

– Osiągnąć cel możliwie najniższym kosztem.

Klasyfikacja planów pod kątem ilości koniecznych badań:

– Plany zdeterminowane: plan kompletny i selekcyjny,

– Plany optymalizowane,

– Plany randomizowane.

Powyższy podział nie wyczerpuje tematu pt. rodzaje planów. Istnieją inne możliwości planowania eksperymentu, jednak praktyce w większości przypadków problemów do zbadania można pozostać na tym podziale.

Klasyfikacja planów doświadczalnych – zestawienie

Plan zdeterminowany – kompletny

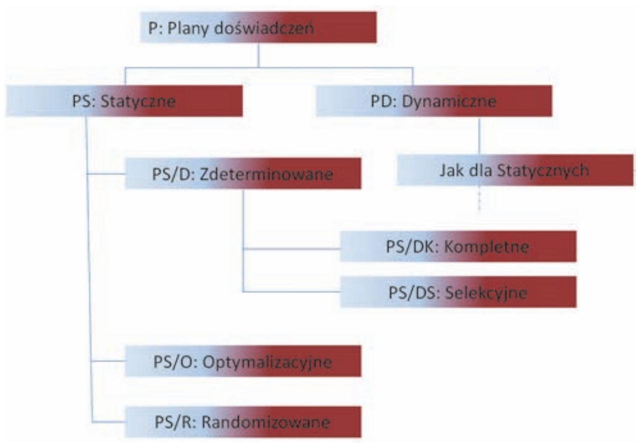
Przebieg doświadczenia w metodzie badań kompletnych:

a) dla kolejnych zmiennych x_k, gdzie k = 1,2,..., s wybrać L wartości z przedziału [x_k min, x_k max] równomiernie od siebie oddalonych,

b) przeprowadzić pomiar dla każdej kombinacji wartości wielkości wejściowych,

c) w oparciu o wyniki przeprowadzonych pomiarów wyznaczyć funkcję aproksymującą $f(x_1 ,.., x_k)$.

W praktyce zaprezentowana powyżej metoda badań kompletnych nadaje się do identyfikacji funkcji obiektu



Rys. 2. Zestawienie rodzajów planów doświadczalnych

badań w przypadku jednej lub dwóch zmiennych wejściowych. Zastosowanie tej metody dla obiektów o większej liczbie zmiennych prowadzi do gwałtownego wzrostu liczby koniecznych do wykonania pomiarów zgodnie ze wzorem:

$$n = L^S$$

Przykładowo, jeśli ilość zmiennych wejściowych wynosi s = 11, a ilość odpowiadających im wartości zmiennych równa jest L=12, to przy czasie pojedynczego pomiaru równym 1s potrzebujemy około 23000 lat na przeprowadzenie wszystkich badań kompletnych!!!

Plan kompletny dla dwóch zmiennych wejściowych

Parametry planu: Zbadać maksimum funkcji $y(x_1, x_2)$.

Dwie zmienne wejściowe x_1 ; x_2 (s=2) oraz jedna wyjściowa y.

Dla zmiennej określono 9 wartości w przedziale zmienności x_1 (L=9) i podobnie dla x_2 (L=9).

Ilość punktów pomiarowych: L^s=81.

Prezentacja danych: wykres 3D.

Plan kompletny dla dwóch zmiennych wejściowych. Widok 2D

Parametry planu: Zbadać maksimum funkcji $y(x_1, x_2)$.

Dwie zmienne wejściowe x_1 ; x_2 (s=2) oraz jedna wyjściowa y.

Dla zmiennych określono 11 wartości w przedziale zmienności x_1 i podobnie dla x_2 (L=11).

Ilość punktów pomiarowych: L^s=121.

Prezentacja danych: wykres 2D.

Plan zdeterminowany – selekcyjny

Jedną z metod ograniczania liczby wykonywanych pomiarów jest zastosowanie tzw. metody **badań monoselekcyjnych**. W metodzie tej, podobnie jak w planie badań kompletnych**,** dla każdej zmiennej x_k wybiera się L wartości równomiernie rozmieszczonych w przedziale [x_k min, x_k max].

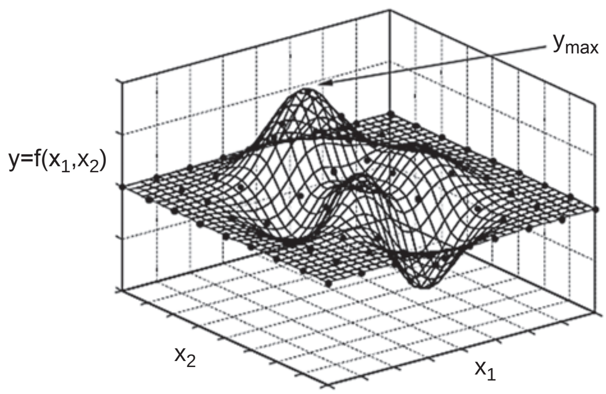
Istotne jest jednak to, że stosowana procedura odpowiada postępowaniu w przypadku **obiektu badań o jednym wejściu w odniesieniu do obiektu o wielu wejściach**.

Dlatego w następnym kroku dokonuje się **pojedynczego wyboru** (monoselekcji) wartości x_k i bada wpływ tej konkretnej wielkości na wielkość wyjściową y. Wszystkie pozostałe wielkości wejściowe traktujemy jako stałe.

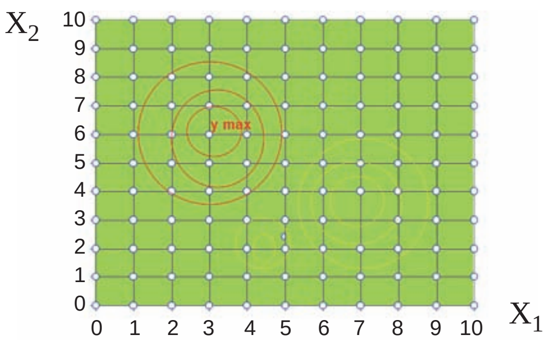
Ryzyko: Plan monoselekcyjny nie uwzględnia współzależności między wielkościami wejściowymi!

Konsekwencja: Uzyskujemy zbiór wielu funkcji jednej zmiennej $y=f_k(x_k)$ dla arbitralnych wartości pozostałych zmiennych (zamiast funkcji wielu zmiennych $y=f(x_1 , x_2 , ..., x_k , ..., x_s)$).

Jeśli celem jest wyznaczenie ekstremum funkcji zmian



Rys. 3. Obraz 3D funkcji $y(x_1, x_2)$ wraz z punktami pomiarowymi (źródło: http://galaxy.eti.pg.gda.pl/katedry/kmoe/dydaktyka/Metrologia/planowanie_eksperymentu.pdf)



Rys. 4. Obraz 2D funkcji $y(x_1, x_2)$ wraz z punktami pomiarowymi

$y = f(x_{1,\dots}x_{k\dots}x_s)$, plan monoselektywny może być przydatny. Jednak nie zawsze prowadzi on do celu!

Plan monoselekcyjny cd.

W praktyce, dzięki zastosowaniu planu monoselekcyjnego, następuje wyraźne zmniejszenie liczby koniecznych do przeprowadzenia pomiarów w stosunku do planu kompletnego (np. 21 zamiast 121). Ogólnie liczba koniecznych do wykonania pomiarów wyrażona jest wzorem:

$$N = L + \sum_{k=2}^{s} (L-1)$$

Tym sposobem dla s = 11, L = 12 i pojedynczego pomiaru trwającego 1s całkowity czas badań monoselekcyjnych ulega skróceniu do zaledwie 133s (zamiast 23000 lat!).

Niestety, zarówno metoda kompletna, jak i monoselekcyjna posiadają liczne ograniczenia przy analizie złożonych obiektów. Stąd pojawiła się potrzeba tworzenia nowych metod badawczych, która napędziła rozwój teorii eksperymentu. W rezultacie powstały metody planowania prac eksperymentalnych, które pozwoliły zredukować koszt i czas prowadzenia badań przy jednoczesnym zwiększeniu ilości i jakości uzyskiwanej informacji naukowej.

Plan badań optymalizacyjnych

Badania optymalizacyjne polegają na krokowym zbliżaniu się do celu.

1. W przypadku szukania ekstremum funkcji z planu kompletnego wybieramy pomiar o parametrach dających największe prawdopodobieństwo sukcesu (na bazie doświadczeń własnych i wyników innych).

2. Następnie sprawdzamy wyniki badań dla pomiarów o parametrach najbliższych wybranemu.

3. Sprawdzamy, dla którego z nich wartość *y* jest większa od wartości pierwszego pomiaru. Badamy wartości *y* w otoczeniu tego punktu.

4. Ponownie szukamy w nowych pomiarach wyniku większego od poprzedniego i przeprowadzamy badania w jego otoczeniu.

5. Procedurę 3 i 4 powtarzamy do momentu, gdy wartość *y* osiągnie maksimum.

Jak widać w tym przykładzie zamiast 121 badań wykonano 14 i osiągnięto pewien sukces: wyznaczono maksimum funkcji. Liczba koniecznych pomiarów zależy między innymi od wyboru parametrów pierwszego pomiaru.

Randomizowany plan badań

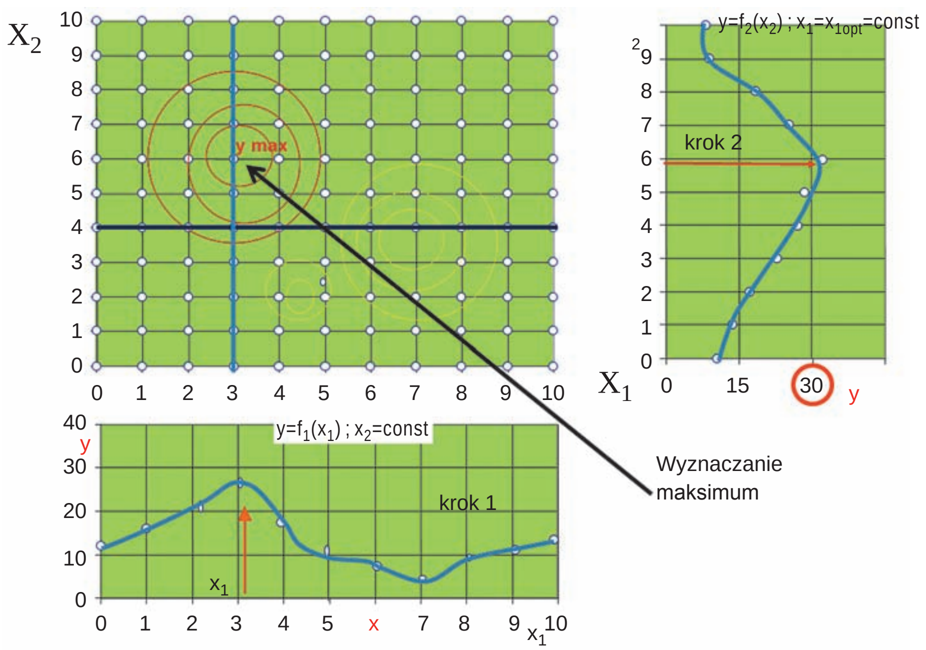
W randomizowanym planie badań wyboru dokonujemy w sposób przypadkowy. W przykładzie wybrano drogą losowania 12 doświadczeń. Ponieważ pomiar z wynikiem o największej wartości *y* nie musi stanowić maksimum funkcji, trzeba je znaleźć, np. wykonując dodatkowe badania według schematu badań optymalizacyjnych.

W tym przykładzie 16 pomiarów zamiast 121 w przypadku planu kompletnego dało pozytywny wynik.

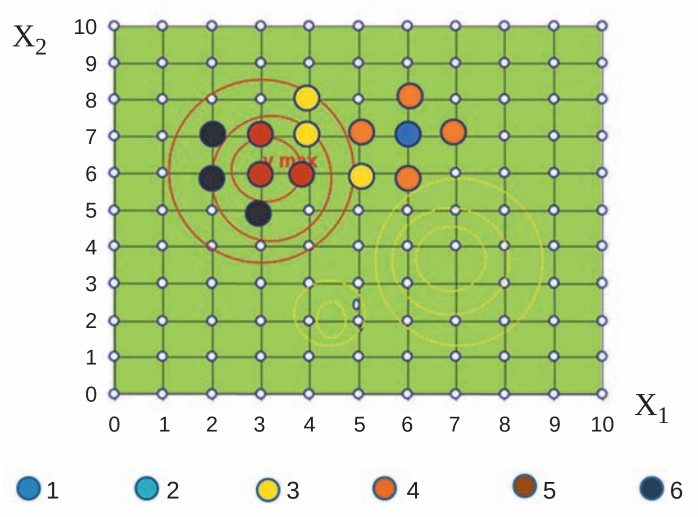
Kryteria wyboru rodzaju planu

Wyboru rodzaju najlepiej dokonywać w oparciu o cel badań doświadczalnych.

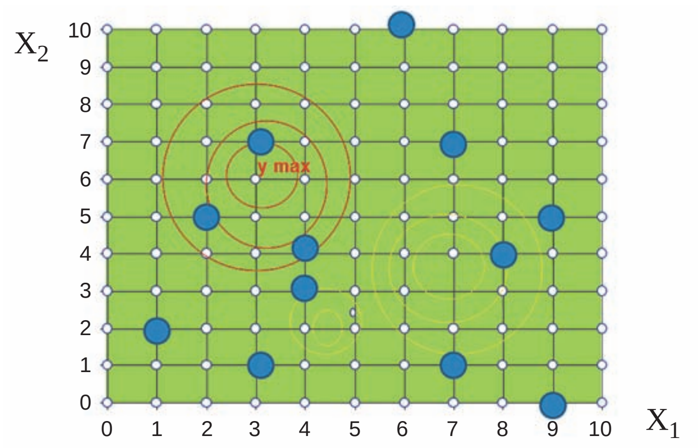
a) **Plan zdeterminowany** najlepiej nadaje się do identyfikowaniu modelu obiektu badań, gdyż układy tego planu determinują ustalone założenia teoretyczne. Zastosowanie planu



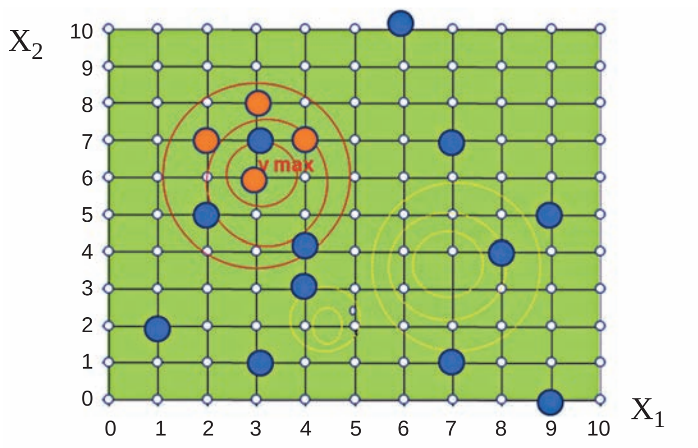
Rys. 5. Obraz 2D funkcji $y(x_1; x_2)$ wraz z dwiema procedurami planu selekcyjnego badań maksimum funkcji



Rys. 6. Szukanie maksimum funkcji $Y(x_1;x_2)$ – badania z planem optymalizacyjnym. 1,2,3,4,5,6 – kolejne kroki



Rys. 7. Szukanie maksimum funkcji $Y(x_1;x_2)$ – badania z planem randomizowany



Rys. 8. Szukanie maksimum funkcji $Y(x_1;x_2)$ – badania z planem randomizowanym i optymalizowanym

zdeterminowanego wymaga wiele badań, jednak daje najwięcej informacji o obiekcie.

b) **Plan optymalizacyjny** najlepiej nadaje się na przykład do wyznaczania ekstremum funkcji. Metoda ta jest stosunkowo szybka.

c) **Plan randomizowany** bardzo dobrze sprawdza się przy weryfikacji istotności wpływu wielkości wejściowych na wielkość wyjściową, ponieważ plan ten wprowadza element losowości do zbioru punktów pomiarowych.

Plany dwupoziomowe i wielopoziomowe

Często wystarczy przyjąć, że każda ze zmiennych wejściowych występuje tylko na dwóch poziomach, czyli x_{kmin} i x_{kmax}, a po unormowaniu $-\alpha$ i α (ramię gwiezdne).

Może to być rzeczywiście zmienna o dwóch stanach. Plany dwupoziomowe są słuszne także, gdy wartość wyjściowa *y* liniowo zależy od tych zmiennych lub ich kombinacji liniowej:

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots .. + b_{12}X_1X_2 + + b_{12}X_3X_3 + .. + b_{ijk}X_iX_jX_k$$

W takim przypadku wynik wykonanych badań dla x_{kmin} i x_{kmax} można ekstrapolować na cały zakres zmienności x_k.

<u>a/ Przykład dwupoziomowego planu całkowitego i połówkowego (selekcyjny)</u>

Zbadać wysokość lotu balonu na ciepłe powietrze w zależności od: temperatury gazu w balonie dla temperatury od 50°C do 100°C (gazem może być suche powietrze lub wilgotne (para nasycona)) oraz od masy balonu z papieru i ze stylonu.

Zmienne:

x_1 [50°C, 100°C] po unormowaniu x_1 [-1,1] (dla alfy = 1) (zakładamy liniową zależność wyporności od temperatury),

x_2 [powietrze suche, powietrze wilgotne] po unormowaniu x_2 [-1 ,1] (zmienna dwustanowa, chociaż może być zmienną ciągłą),

x_3 [papier, stylon] = [-1,1] (zmienna dwustanowa).

Wartość kontrolna:

objętość balonu V = const.

Przy **n** zmiennych dwustanowych można znaleźć $\mathbf{2^n}$ możliwych kombinacji – układów zmiennych.

Dla n = 3 maksymalna liczba doświadczeń z różnymi wartościami x_1, x_2, x_3 wynosi $2^3 = 8$.

<u>b/ Plan całkowity i połówkowy (selekcyjny) – tabelaryzacja</u>

Odczyt z tabeli 1:

np. doświadczenie nr 4 (1,-1,-1) to: 50°C, suche powietrze w balonie z papieru.

Uwaga: wybór/selekcja nie jest przypadkowy. Z tych ośmiu doświadczeń wybrane cztery zapewniają możliwie największą ilość informacji. Np. wybór doświadczeń: 4, 5, 7, 8 będzie nieprawidłowy – brak wiedzy o zależności od x_1.

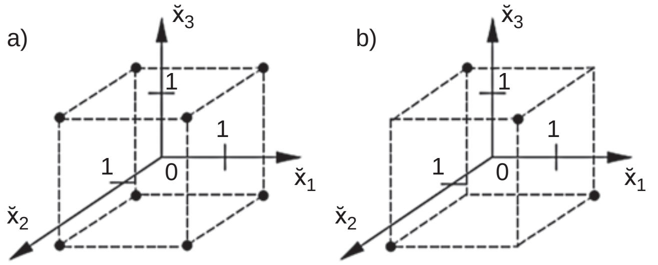
<u>c/ Plany czynnikowe kompletne i częściowe (dwupoziomowe). Przedstawienie graficzne</u>

Plan kompletny doświadczenia z wysokością lotu balonu: $2 \times 2 \times 2 = 8 = 2^3$.

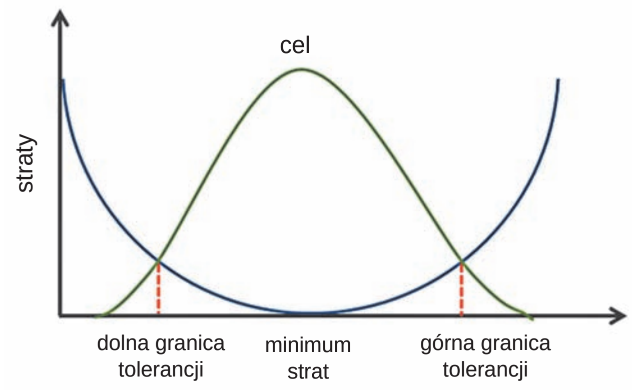
Plan połówkowy doświadczenia z wysokością lotu balonu: 4.

Tabela 1. Plan całkowity i połówkowy

Nr doświadczenia	x_1	x_2	x_3
1	-1	-1	-1
2 (1)	-1	-1	1
3 (2)	-1	1	-1
4 (3)	1	-1	-1
5 (4)	1	1	1
6	-1	1	1
7	1	-1	1
8	1	1	-1



Rys. 9. Graficzne przedstawienie a) planu całkowitego dla doświadczenia z balonem, b) planu połówkowego (selekcyjnego) (źródło: http://galaxy.eti.pg.gda.pl/katedry/kmoe/dydaktyka/Metrologia/planowanie_eksperymentu.pdf)



Rys. 10. Funkcja strat produktu

<u>d/ Plany trzypoziomowe i wielopoziomowe</u>

Można utworzyć plany eksperymentów dla zmiennych wielostanowych. Na przykład dla n zmiennych trzystanowych (-1,0,1) kompletny plan obejmuje 3^n doświadczeń (n=6 to 3^6=729), czyli sporo….

Podstawowe problemy i błędy w planowaniu

a/ Brak rachunku błędu i niepewności pomiaru: złe metody – złe wyniki;

b/ Brak randomizacji;

c/ Zbyt mała liczba doświadczeń (zbyt duża też może być problemem);

d/ Zbyt szybki demontaż stanowiska badawczego (przed osiągnięciem końcowego efektu).

Metoda optymalizacji jakości według Taguchi'ego, czyli planowanie bardziej ogólnie

Genichi Taguchi (ur. 1924 r. w Takamachi, w Japonii) japoński inżynier i statystyk, który wprowadził metody statystyczne do przemysłu w celu poprawy jakości produktów. Do dziś są one stosowane, lecz nie w każdym przypadku.

W powszechnym rozumowaniu jakość rozumiana jest jako: „Brak defektów" lub „Zadowolenie klienta".

Według Taguchi'ego miarą jakości jest całokształt strat poniesionych przez społeczeństwo. Taki całokształt obejmuje straty producenta (m.in. koszty, energia, surowce) i straty społeczeństwa (m.in. środowiskowe, mierzalne społeczne straty, zdrowotne…).

Produkt o całkowitej stracie równej zero ma najwyższą jakość.

a/ Funkcja strat

Utrata jakości produktu jest kwadratową funkcją odchylenia parametrów produktu od wartości nominalnych (docelowych).

b/ Postulaty

– Już na etapie projektowania produktu należy dążyć do jak najwyższej jego jakości.

– W celu poprawy jakości produktu należy zminimalizować kwadraty odchyleń (wariancje) parametrów produktu od wartości nominalnych (docelowych).

– Jakość nie powinna być mierzona w osiągach, możliwościach czy właściwościach produktu.

– Miarą kosztu jakości powinna być funkcja odchyleń parametrów produktu w zależności od całościowych strat.

c/ Współczynnik stosunku sygnału do szumu (S/N)

<u>W praktyce</u> metoda optymalizacji jakości według Taguchi'ego polega na **minimalizowaniu** zmienności działania produktu na skutek występowania **czynników zakłócających** (**N** – noisefactors) oraz jednoczesnym **maksymalizowaniu** zmienności działania produktu jako reakcji na **czynniki sygnału** (**S** – signalfactors). Czynniki zakłócające (szumy) pozostają poza kontrolą użytkownika, natomiast czynniki sygnału mogą być kontrolowane przez operatora.

<u>Cel:</u> Tak zaplanować urządzenie/proces, aby uzyskać jak największy współczynnik stosunku sygnału do szumu (S/N).

W teorii planowania eksperymentu metoda Taguchi pomaga odpowiedzieć na pytanie: **Jak zaplanować doświadczenie, aby przy możliwie najmniejszych kosztach uzyskać jak najwięcej użytecznych informacji?**

** dr inż. Beata Bochentyn – adiunkt na Wydz. FTiMS Politechniki Gdańskiej, prof. dr hab. inż. Bogusław Kusz – prof. nadzw. na Wydz. FTiMS Politechniki Gdańskiej*