ROCZNIKI INŻYNIERII BUDOWLANEJ – ZESZYT 16/2016
Komisja Inżynierii Budowlanej Oddział Polskiej Akademii Nauk w Katowicach

ANALIZA PEŁZANIA PRĘTA WARSTWOWEGO

Jan KUBIK
Politechnika Opolska, Wydział Budownictwa i Architektury, Opole, Polska

Słowa kluczowe: *gradientowa lepkosprężystość, pełzanie pręta.*

1. Wprowadzenie

W pracy przedstawimy opis mechanizmu pełzania zginanego pręta warstwowego. Zakładać będziemy, iż sąsiednie warstwy rozdzielone są cienkim filmem materiału ciekłego zapewniającego wzajemny poślizg sąsiadujących warstw. Stany naprężeń w filmie opisywać będzie tensor naprężeń gradientowych oraz gradient odkształceń. Rozważania rozpoczniemy od tożsamości energetycznej teorii gradientowej, z której wynika najpierw twierdzenie o pracach dopełniających, a następnie ogólny wzór na przemieszczenia pręta.

2. Równania problemu

Podana w pracy [2] tożsamość energetyczna przyjmie formę:

$$\int_A P_i u_i \, dA + \int_V \rho\left(F_i - \ddot{u}_i\right) u_i \, dV = \int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \, dV + \int_V \tau_{ijk}\eta_{ijk} \, dV \,, \tag{1}$$

z której wynika twierdzenie o pracach dopełniających:

$$\int_A \delta P_i u_i dA = \int_V \delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV + \int_V \delta\tau_{ijk}\eta_{ijk} dV \,, \tag{2}$$

a dalej dla $\delta P_i = 1_i \delta\left(x_i - x_{i0}\right)$ uzyskamy wzór na obliczanie przemieszczeń:

$$1_i u_i(t) = \int_V \delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV + \int_V \delta\tau_{ijk}\eta_{ijk} dV = \int_V \delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV - \int_V \delta\tau_{ijk,k}\varepsilon_{ij} dV \,. \tag{3}$$

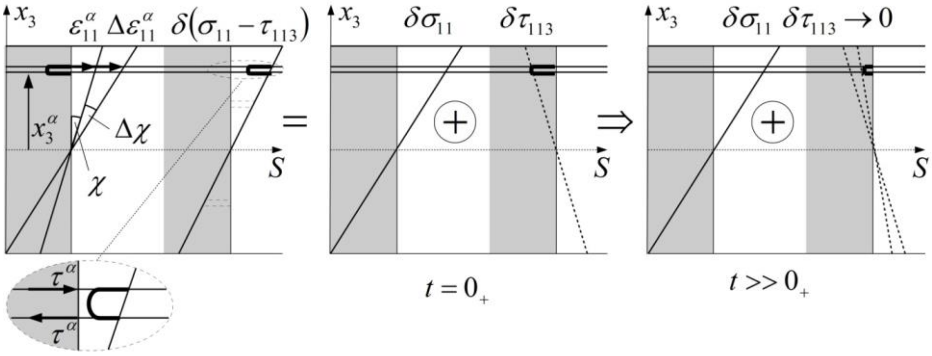
W przypadku zginania pręta warstwowego będzie:

$$dV = dF\, ds \,, \quad \varepsilon_{ij} \to \varepsilon_{11} = \kappa x \,, \quad \eta_{ijk} \to \varepsilon_{11,3}^{\alpha} = \left(\kappa x_3 \delta\left(x_3 - x_3^{\alpha}\right)\right)_{,3} = \kappa\delta\left(x_3 - x_3^{\alpha}\right). \tag{4}$$

Po podstawieniu (4) do twierdzenia o pracach dopełniających otrzymamy:

$$1_i u_i(t) = \int_s \int_F \delta\sigma_{11}\kappa x_3 \, dF \, ds + \int_s \sum_\alpha \int_F \delta\tau_{113}^\alpha \kappa\delta'\left(x_3 - x_3^\alpha\right) dF \, ds ,$$

$$1_i\left(u_i^e + u_i^c(t)\right) = \int_s M_1\kappa_0 \, ds + \int_s \sum_\alpha \delta\tau_{113}^\alpha \, \kappa_0 b \, ds , \, \kappa(s,t) = \kappa_0(s)\kappa(t) . \tag{5}$$



Rys. 1. Naprężenia w belce w otoczeniu kontaktu warstw
Fig. 1. Stresses in a beam in the surrounding of layers' contact

Pierwsza z całek określa sprężystą część odkształceń, a druga lepką wynikającą z poślizgów cienkich warstw materiału. Interesująca nas lepka składowa przemieszczenia ma postać naprężenia $\delta\tau_{113}^\alpha(t)$. Wyznaczymy ją z równania fizycznego warstwy kontaktowej:

$$\delta\tau_{113}^\alpha = \tau^\alpha(t) = e^\alpha(t)\varepsilon_{11}^\alpha = e^\alpha(t)\kappa_c(t)x_3^\alpha . \tag{6}$$

Sumując naprężenia $\delta\tau_{113}^\alpha$ otrzymamy:

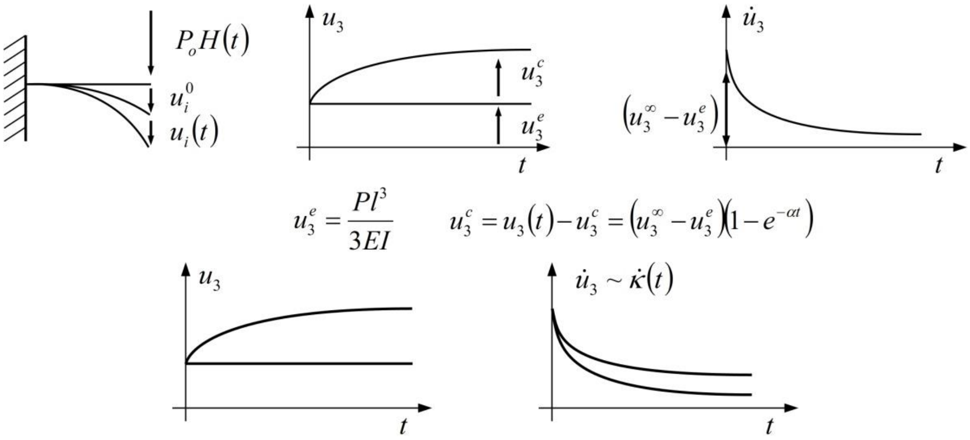
$$\sum_\alpha \delta\tau_{113}^\alpha = \sum_\alpha e^\alpha(t)x_3^\alpha \, \kappa_c(t) = \widetilde{M}_1(t) . \tag{7}$$

Ostatecznie przemieszczenie pręta pochodzące od odkształceń i poślizgów w warstwach kontaktowych wynosi:

$$1\left(v_i^e + v_i^c(t)\right) = \int_s M_1\kappa_0 \, ds + \int_s M_1 \, \kappa(t) \, ds , \, \kappa_0 = \frac{M(s)}{EJ} . \tag{8}$$

3. Wyznaczanie naprężeń w warstwach poślizgowych materiału

Analizujemy zginanie pręta warstwowego wspornika obciążonego stałą w czasie siłą. Przedstawimy uproszczone ujęcie teorii gradientowej, pozwalającej na szacowanie naprężeń i odkształceń w cienkich filmach cieczy, które rozdzielają warstwy w pręcie.



Rys. 2. Pełzanie pręta
Fig. 2. Creep of the bar

Można wykazać, że w przypadku obciążeń ustalonych w czasie krzywiznę pręta $\kappa(s,t)$ można przedstawić jako iloczyn $\kappa(s,t) = \kappa_e(s)\kappa_c(t)$. Stąd:

$$1_i v_i^e = \int_S \kappa_e(s) M_1(s)\, ds\,, \tag{9}$$

$$1_i v_i^c = \int_S \kappa_e(s) \kappa_c(s,t) M_1(s)\, ds\,. \tag{10}$$

Z porównania obu wzorów na przemieszczenie natychmiastowe v_i^e i jego przyrost spowodowany pełzaniem otrzymamy:

$$\kappa_c(t) = \frac{1_i v_i^c}{1_i v_i^e} \quad \text{oraz} \quad \dot{\kappa}_c(t) = \frac{1_i \dot{v}_i^c}{1_i v_i^e}\,. \tag{11}$$

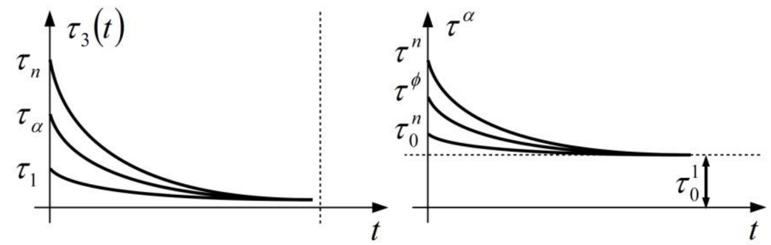
Natomiast wzory na zanikające w czasie naprężenia w lepkiej warstwie poślizgowej:

$$\tau^\alpha = \eta^\alpha \dot{\varepsilon}^\alpha \quad \text{i} \quad \dot{\varepsilon}^\alpha = \dot{\kappa}_c x_3^\alpha \tag{12}$$

prowadzą do relacji:

$$\tau^\alpha = \eta^\alpha x_3^\alpha \dot{\kappa}_c(t). \tag{13}$$

Największe z naprężeń poślizgowych występują w skrajnych warstwach.



Rys. 3. Czasowe zmiany naprężeń w warstwach poślizgowych pręta
Fig. 3. Time-changes of stresses in the slip contact of bar layers

Z przedstawionego rozumowania wynika, że fenomenologiczny opis pełzania pręta wynika z analizy poślizgów cienkich warstw cieczy ***lepkiej lub lepkoplastycznej***, w których występują naprężenia gradientowe. Oczywiście naprężenia te są pomijane w klasycznej mechanice prętów.

Oznaczenia symboli

s - współrzędna przekroju pręta, coordinate of the bar cross-section, [m],
t - czas, time, [s],
u_i - składowa wektora przemieszczeń, component of displacement vector, [m],
v_i - składowa wektora prędkości, component of velocity vector, [m/s],
A - powierzchnia ograniczająca obszar V, surface restricting area V, [m^2],
F - pole przekroju pręta, area of bar cross-section, [m^2],
P_i - składowa wektora siły, component of force vector, [N],
V - obszar zajmowany przez ośrodek, area occupied by the medium, [m^3],
ε_{ij} - składowa tensora odkształceń, component of strain tensor, [-],
η_{ijk} - składowa tensora odkształceń gradientowych,
component of gradient strain tensor, [m^{-1}],
κ_0, κ - krzywizna osi pręta, curvature of the bar axis, [m^{-1}],
σ_{11} - naprężenie normalne w przekroju pręta, normal stress in the bar cross-section, [Pa],
σ_{ij} - składowa tensora naprężeń, component of stress tensor, [Pa],
τ_{ijk} - składowa tensora naprężeń gradientowych,
component of gradient stress tensor, [Pa·m],
τ^α - naprężenie gradientowe na α styku warstw pręta,
gradient stress in the α contact of bar layers, [Pa·m].

Literatura

[1] Gambin B., Stochastic homogenization of the first gradient-strain model ling of elasticity, Mech.Teor.i Stos. 1, 35, 1987
[2] Kubik J., Termomechanika gradientowa, OW PO, Opole, 2015
[3] Tonti E., Variational principles in elastostatic, Meccanica 2, 4, 1967
[4] Vanin G.A., Gradient mechanics and thermodynamics of multilevel composites Mech. of Composites Materials, 32, 1996

ANALYSIS OF CREEP IN LAYERED BAR

Summary

In the work, creep processes are analyzed in case of layered beam. Slips of the layers are described by means of the gradient mechanics. They are considered as causing micro-discontinuity in the stress field. Consequently, the gradient theory gives a description and explanation of the rheological processes in this case. Such a description of the problem is impossible in the classical structural mechanics. The proposed model of process may be also used in a description of deformations in the biological materials.