Biuletyn WAT
Vol. LXIII, Nr 4, 2014

Rankingi w warunkach niepewności

ANDRZEJ AMELJAŃCZYK

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Cybernetyki, Instytut Systemów Informatycznych, 00-908 Warszawa, ul. gen. S. Kaliskiego 2, aameljanczyk@wat.edu.pl

Streszczenie. Praca dotyczy procedur rankingowych zbioru obiektów, których jakość (użyteczność) zmienia się w zależności od występowania warunków, których rozkład prawdopodobieństwa na ogół nie jest znany. Procedura polega na rekurencyjnym wyznaczaniu elementów ekstremalnych zbioru na podstawie przyjętej relacji preferencji jakościowych w warunkach niepewności. Efektem jej działania jest podział zbioru na jakościowe klastry rankingowe, a w konsekwencji ranking elementów analizowanego zbioru w warunkach niepewności. W pracy rozważono model preferencji Hurwicza i jego przypadki szczególne, omówiono własności uzyskiwanych rankingów oraz metody ich wyznaczania.
Słowa kluczowe: relacja preferencji, elementy ekstremalne, klastry rankingowe, model niepewności Hurwicza, ranking w warunkach niepewności
DOI: 10.5604/12345865.1131326

1. Wprowadzenie

Procedury konstruowania rankingów w warunkach niepewności stanowią bardzo ważny obszar w podejmowaniu optymalnych decyzji w sytuacji, gdy skutek podjętej decyzji zależy dodatkowo od występowania pewnych warunków „zewnętrznych", których rozkład prawdopodobieństwa na ogół nie jest znany. Podejmowanie decyzji w warunkach niepewności jest rozumiane bardzo szeroko od sytuacji „całkowitej niepewności warunków" (brak znajomości jakichkolwiek charakterystyk probabilistycznych) poprzez częściową znajomość pewnych charakterystyk aż po sytuację gdy znane są rozkłady prawdopodobieństwa występowania warunków. Zagadnienia optymalizacji decyzji tego typu mają niezwykle bogatą literaturę [1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 13, 14]. Nie dotyczy to jednak metod konstruowania rankingów w warunkach niepewności. Niniejsza praca odnosi się do szczególnego przypadku podejmowania decyzji w warunkach niepewności, polegającego na skonstruowaniu rankingu elementów pewnego zbioru w kontekście ich jakości (użyteczności), zależnej od warunków zewnętrznych, których rozkład prawdopodobieństwa najczęściej nie jest znany. W sensie ogólnej koncepcji budowania procedur rankingowych poniższe rozważania są kontynuacją pracy [5]. Klasyczne sformułowanie zadania optymalizacji decyzji w warunkach niepewności jest następujące [1, 2, 8, 9]:

Niech X będzie niepustym zbiorem decyzji (obiektów) podlegających ocenie.

$\mathsf{N} = \{1, \ldots, n, \ldots, N\}$ — zbiór typów (ich numerów) warunków, w jakich mogą być realizowane decyzje (oceniane obiekty).

Zakładamy, że użyteczność decyzji (obiektu) zależy od tego, jakie warunki występują w trakcie jej realizacji, a ich rozkład prawdopodobieństwa występowania niekoniecznie jest znany. O jakości (użyteczności) obiektu możemy zatem mówić w „kategoriach warunkowych" lub w kontekście wartości oczekiwanej. Możemy to opisać następująco:

Niech $f: X \times \mathsf{N} \to \mathsf{R}$ oznacza warunkową funkcję użyteczności decyzji (obiektu).

Liczbę $f(x, n)$ możemy interpretować jako warunkową wartość użyteczności (jakości) obiektu x w sytuacji, gdy wystąpią warunki typu $n \in N$. Formalnie zatem do warunkowej oceny decyzji (obiektu) $x \in X$ możemy wykorzystać funkcję

$$F : X \to \mathsf{R}^N \tag{1.1}$$

taką, że jej wartość: $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x), \ldots, F_N(x)) \in \mathsf{R}^N$

będzie „wektorową oceną warunkową" decyzji $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, gdzie

$$F_n(x) = f(x, n), \quad n \in \mathsf{N}, \quad x \in X. \tag{1.2}$$

Zatem zbiór:

$$Y = F(X) = \left\{ y \in \mathsf{R}^N \middle| y = f(x), \quad x \in X \right\} \tag{1.3}$$

będący obrazem zbioru X jest zbiorem warunkowych modeli jakościowych obiektów (decyzji) $x \in X$. Problem rankingu elementów zbioru X w warunkach niepewności możemy więc sprowadzić do rankingu elementów zbioru Y. Wprowadzając relację R poprzedzania w rankingu elementów zbioru Y, otrzymamy zadanie optymalizacji wielokryterialnej [2, 3, 6, 7] typu: (X, F, R), która po uwzględnieniu (1.3) przyjmie postać:

$$(Y, R). \tag{1.4}$$

2. Ogólna koncepcja tworzenia rankingu w warunkach niepewności

Kluczowym zagadnieniem w skonstruowaniu (wyznaczeniu) rankingu elementów zbioru Y, uwzględniającym specyfikę „niepewności", jest relacja „rankingowego poprzedzania" $R \subset Y \times Y$ [3, 5, 16]. W pracy zostanie poddany analizie przede wszystkim „model niepewności" Hurwicza [1, 2, 9]. W zagadnieniach podejmowania decyzji w warunkach niepewności ważne znaczenie odgrywają również relacja Pareto i relacja leksykograficzna [3], których zastosowania w ogólnych procedurach rankingowych omówiono szczegółowo w pracy [5].

Niech zatem Y — niepusty zbiór elementów (obiektów), który ma podlegać procedurze rankingowej. $R \subset Y \times Y$ — relacja poprzedzania rozumiana następująco: para (y, z) należy do relacji wtedy i tylko wtedy, gdy „element y jest przed elementem z". Zdanie „y jest przed z" (albo: „y poprzedza z") najczęściej jest rozumiane w kontekście jakościowym „y jest lepszy od z" [2, 3]. Relacja R bywa nazywana relacją preferencji poprzedzenia albo w skrócie relacją rankingowania. Podstawą tworzenia każdego algorytmu rankingowego są tak zwane elementy ekstremalne zbioru w przestrzeni ze zdefiniowaną relacją poprzedzania (jakości) [3, 5, 13]. Elementy ekstremalne zbioru wykorzystywane w rankingowaniu to elementy najmniejsze i minimalne (lub największe i maksymalne) [3, 12, 14, 15, 16]. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$Y^R_{\inf}$ — zbiór elementów najmniejszych zbioru Y przy relacji R,

$Y^R_{\min}$ — zbiór elementów minimalnych zbioru Y przy relacji R.

Zbiory te w ogólności można zdefiniować następująco:

$$Y^R_{\inf} = \left\{ y \in Y \middle| (y, z) \in R \text{ dla każdego } z \in Y \setminus \{y\} \right\}, \tag{2.1}$$

$$Y^R_{\min} = \left\{ y \in Y \middle| \text{ nie istnieje } z \in Y \setminus \{y\}, \ \text{ że} (z, y) \in R \right\}. \tag{2.2}$$

Element najmniejszy zbioru Y to taki, który poprzedza wszystkie pozostałe elementy ze zbioru Y. Element minimalny zbioru Y to taki element, który nie jest poprzedzany przez żaden z pozostałych elementów zbioru Y. Do utworzenia rankingu elementów zbioru Y możemy wykorzystać zbiór elementów ekstremalnych — w zależności od potrzeb: zbiór elementów najmniejszych (lub zbiór elementów minimalnych) w następujący sposób [5] — ze zbioru Y wybieramy elementy, które poprzedzają wszystkie pozostałe elementy. Następnie ze zbioru pozostałych elementów wybieramy kolejne elementy, które poprzedzają wszystkie pozostałe i tak, aż zbiór pozostałych elementów stanie się pusty.

Zapiszemy to następująco, przyjmując, że $Y_{\inf}^{R}(0)=\varnothing$:

1. Wyznacz $$Y_{\inf}^{R}(1)=Y_{\inf}^{R} \tag{2.3}$$

2. Wyznacz $$Y_{\inf}^{R}(2)=\left(Y \setminus Y_{\inf}^{R}(1)\right)_{\inf}^{R} \text{ itd.}$$

3. Ogólnie zapiszemy: $$Y_{\inf}^{R}(k)=\left(Y \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} Y_{\inf}^{R}(i)\right)_{\inf}^{R}, \quad k=1,2,3,... \tag{2.4}$$

Algorytm kończy się w kroku $k = K$ takim, że

$$\bigcup_{i=1}^{K} Y_{\inf}^{R}(i)=Y. \tag{2.5}$$

Podobną procedurę możemy zastosować, korzystając z zależności (2.2). Otrzymamy wtedy (przyjmując, że $Y_{\min}^{R}(0)=\varnothing$):

$$Y_{\min}^{R}(k)=\left(Y \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} Y_{\min}^{R}(i)\right)_{\min}^{R} \quad \text{dla } k=1,2,3,... \tag{2.6}$$

Klastrem k-tego stopnia nazywać będziemy zbiór $Y_{\inf}^{R}(k)$ lub $Y_{\inf}^{R}(k)$ dla $k = 1, 2, 3\ldots$

Najprostszy przypadek jest oczywiście wówczas, gdy wszystkie zbiory $Y_{\inf}^{R}(k)$ lub $Y_{\min}^{R}(k)$ są jednoelementowe, czyli przypadek, gdy

$$\left|Y_{\inf}^{R}(k)\right|=1 \quad \text{lub} \quad \left|Y_{\min}^{R}(k)\right|=1 \quad \text{dla } k=1,...,K. \tag{2.7}$$

Mamy wtedy tak zwany ranking jednoznaczny (liniowy). Taka sytuacja występuje między innymi wtedy, gdy relacja jakości (rankingowania) R jest relacją liniowego porządku (zwrotna, antysymetryczna, przechodnia i spójna [12]).

W przypadku gdy relacja R jest relacją liniowego porządku, symbolem $Y(R)_{\inf}$ lub $Y(R)_{\min}$ oznaczać będziemy ranking zbioru Y (ciąg podzbiorów (klastrów) jednoelementowych) uzyskany przy relacji preferencji R [5].

W dalszej części pracy rozważania związane z procedurami rankingowymi w warunkach niepewności będą ilustrowane pewnym przykładem dotyczącym rankingu zbioru dwudziestu obiektów [5]. Założymy, że jakość (użyteczność) tych obiektów jest uzależniona od dwóch typów warunków, które mogą wystąpić, a których rozkładu prawdopodobieństwa wystąpienia nie znamy. Poniższa tabela przedstawia zbiór tych obiektów (ponumerowanych indeksem m = 1, …, 20) oraz odpowiadające im wartości warunkowej użyteczności (n = 1, 2).

Tabela 1

Warunkowa użyteczność obiektów

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1^m	2	4	5	6	6	6	5	3	2	1	0	1	2	4	5	4	3	2	3	3
y_2^m	7	7	6	5	3	2	1	1	1	2	4	6	6	5	4	3	2	4	5	4

W przykładzie przyjęto założenie, że im wartości użyteczności są większe, tym „ogólna jakość obiektu" jest wyższa. Przykładowo, użyteczność obiektu nr 1 jest równa dwa (o ile wystąpią warunki nr 1), lub jest równa 7 (o ile wystąpią warunki typu 2). Ogólnie: warunkowym modelem jakościowym obiektu nr m będzie element:

$$y^m = \left(y_1^m, y_2^m\right) \in \mathsf{R}^2,\ \ m \in \mathrm{M} = \left\{1,\ldots,20\right\}. \tag{2.8}$$

Zbiorem modeli jakościowych rozpatrywanych obiektów jest zatem zbiór:

$$Y = \left\{ y^m \in \mathsf{R}^2 \,\middle|\, m \in \mathrm{M} \right\}. \tag{2.9}$$

Rankingi jakościowe zbioru Y mogą być tworzone w oparciu o zależność (2.1) lub (2.2). O jednoznaczności (liniowości) rankingów decydują głównie własności przyjętego modelu preferencji R. Może się jednak zdarzyć, że przeciwobraz jednoznacznego rankingu zbioru Y nie będzie jednoznaczny w zbiorze X. Oznaczać to będzie, że co najmniej dwa różne obiekty mają identyczny obraz w przestrzeni jakości (te same wartości wszystkich cech uwzględnianych w procesie modelowania [2, 4, 5]).

3. Model preferencji rankingowych Hurwicza i jego przypadki szczególne

Wśród wielu metod i wielu modeli preferencji jakościowych podejmowania decyzji w warunkach niepewności szczególną rolę odgrywają modele optymisty i pesymisty oraz ich uogólnienie — model Hurwicza [1, 2, 8, 9].

Zbiór $Y = \left\{F\left(x\right) = y \in \mathsf{R}^N \,\middle|\, x \in X\right\}$, zgodnie z interpretacją (1.2) i (1.3), zostanie poddany rankingowi jakościowemu z wykorzystaniem odpowiedniej relacji preferencji w warunkach niepewności. Zakładamy, że rozkład prawdopodobieństwa występowania warunków, w których będą realizowane decyzje, nie jest znany [3, 8, 9].

Relacją preferencji optymisty R^O [2, 9] nazywać będziemy następującą relację

$$R^O = \left\{ (y,z) \in Y \times Y \,\middle|\, \max_{n\in N} y^n \geq \max_{n\in N} z_n \right\}. \tag{3.1}$$

Model (relacja) R^O oznacza, że z dwóch elementów (obrazów warunkowej jakości decyzji) y lub z decydent woli y, ponieważ w sytuacji najbardziej sprzyjającej y przyniesie większą (co najmniej taką samą) użyteczność niż z. Jest to „filozofia" działania decydenta optymisty (ryzykanta).

Przeciwieństwem modelu optymisty w kontekście „skłonności" do ryzyka jest model (relacja) pesymisty R^P definiowany następująco:

$$R^P = \left\{ (y,z) \in Y \times Y \,\middle|\, \min_{n\in N} y_n \geq \min_{n\in N} z_n \right\}. \tag{3.2}$$

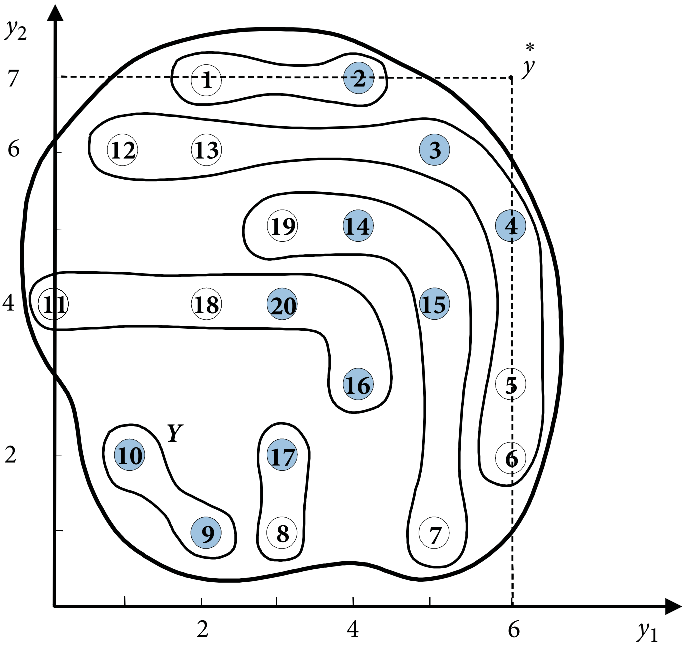
Tu z kolei element y jest preferowany, ponieważ w warunkach nawet najbardziej niesprzyjających przynosi większą użyteczność niż element z.

Uogólnieniem modeli (relacji) (3.1) i (3.2) jest model (relacja) Hurwicza, zdefiniowany następująco:

$$R_\alpha^H = \left\{ \begin{array}{l} (y,z) \in Y \times Y \,\middle|\, \alpha\left(\max\limits_{n\in N} y_n \right) + (1-\alpha)\left(\min\limits_{n\in N} y_n \right) \geq \alpha\left(\max\limits_{n\in N} y_n \right) + \\ + (1-\alpha)\left(\min\limits_{n\in N} z_n \right) \end{array} \right\}, \tag{3.3}$$

gdzie $\alpha \in [0, 1]$ — tzw. „współczynnik optymizmu" charakteryzujący skłonności decydenta do ryzyka [8]. Model (relacja) R_α^H jest tylko quasi-porządkiem (nie jest antysymetryczny) dla każdego $\alpha \in [0, 1]$, zatem najczęściej nie prowadzi do rankingu jednoznacznego zbioru Y [1, 2, 9]. Stąd też w rozpatrywanym przykładzie przyjęto możliwość zastosowania dodatkowej relacji leksykograficznej $\mathsf{L}_\geq$ [5], w przypadku gdy uzyskiwane klastry (2.4) będą miały liczność większą od 1. W przyjętej leksykografii $\mathsf{L}_\geq$ założono, że warunki typu 1 „są ważniejsze" niż warunki typu 2. Może to być np. konsekwencją tego, że prawdopodobieństwo wystąpienia warunków typu 1 jest większe niż typu 2, o ile znany jest rozkład lub jego oszacowanie. W przypadku braku takiej przesłanki może być przyjęte (jako równoważne) uporządkowanie alternatywne.

Na rysunkach 1 i 2 przedstawiono ranking elementów zbioru Y (podział na klastry rankingowe) odpowiednio dla optymisty i pesymisty. Z uwagi na własności quasi-porządkowe relacji R^O [2] ranking został utworzony w oparciu o formułę (2.1). Z zapisu (3.1) wynika prosta metoda wyznaczania zbiorów elementów najmniejszych optymisty [2] (szczegóły metody wyznaczania klastrów opisane zostaną w kolejnym punkcie pracy dotyczącym ogólnych własności rankingów w warunkach niepewności). Rezultaty zastosowanej metody pokazuje rysunek 1.



Rys. 1. Podział zbioru *Y* na klastry optymisty

Na rysunkach 1 i 2 zaznaczono dodatkowo tak zwany paretowski punkt idealny dla zbioru *Y* [5, 15] jako szczególny punkt odniesienia. Redukując (wydzielając kolejne klastry elementów równoważnych) zbiór *Y*, można wyznaczać kolejne „zredukowane punkty idealne" [5], których parametry metryczne mogą posłużyć do definiowania kompleksowych charakterystyk jakościowych poszczególnych klastrów świadczących o globalnej ich jakości. Elementy „podcieniowane" w poszczególnych klastrach to te, które dodatkowo są optymalne w sensie Pareto (4.8). Wyznaczone zgodnie z (2.4) klastry będą miały następującą zawartość (patrz definicja relacji optymisty):

$$Y_{\inf}^{R^O}(1) = Y_{\inf}^{R^O} = \{1, 2\},$$

$$Y_{\inf}^{R^O}(2) = \left(Y - Y_{\inf}^{R^O}(1)\right)_{\inf}^{R^O} = \{3, 4, 5, 6, 12, 13\} \text{ itd.},$$

$$Y_{\inf}^{R^O}(3) = \{7, 14, 15, 19\},$$

$$Y_{\inf}^{R^O}(4) = \{11, 16, 18, 20\},$$

$$Y_{\inf}^{R^O}(5)=\{8,\ 17\},$$
$$Y_{\inf}^{R^O}(6)=\{9,\ 10\}.$$

Jak widać, otrzymaliśmy sześć klastrów równoważności rankingowej w sensie optymisty. Nie są one jednoelementowe i wymagają „dodatkowych rankingów wewnętrznych" na przykład w oparciu o przyjętą leksykografię $L_{\geq}$. Dostajemy w tej sytuacji następujące uporządkowania wewnątrz klastrów [5]:

$$Y_{\inf}^{R^O}(1)\rightarrow Y_{\inf}^{R^O}(1)(L_{\geq})_{\inf}=(2,\ 1),$$
$$Y_{\inf}^{R^O}(2)\rightarrow Y_{\inf}^{R^O}(2)(L_{\geq})_{\inf}=(4,\ 5,\ 6,\ 3,\ 13,\ 12),$$
$$Y_{\inf}^{R^O}(3)\rightarrow Y_{\inf}^{R^O}(3)(L_{\geq})_{\inf}=(15,\ 7,\ 14,\ 19),$$
$$Y_{\inf}^{R^O}(4)\rightarrow Y_{\inf}^{R^O}(4)(L_{\geq})_{\inf}=(16,\ 20,\ 18,\ 11),$$
$$Y_{\inf}^{R^O}(5)\rightarrow Y_{\inf}^{R^O}(5)(L_{\geq})_{\inf}=(17,\ 8),$$
$$Y_{\inf}^{R^O}(6)\rightarrow Y_{\inf}^{R^O}(6)(L_{\geq})_{\inf}=(9,\ 10).$$

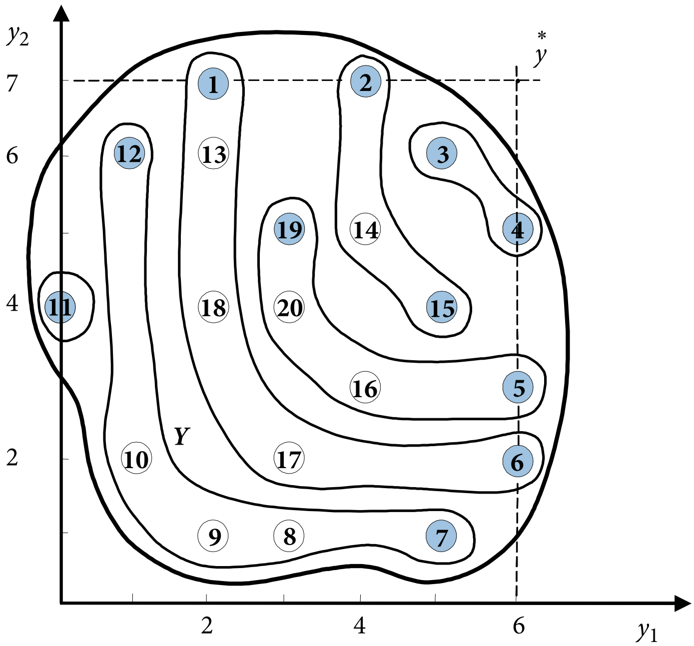
Ranking końcowy optymisty w warunkach niepewności przyjmie zatem postać:

$$Y\left(R^O, L_{\geq}\right)_{\inf}=(2,\ 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 3,\ 13,\ 12,\ 15,\ 7,\ 14,\ 19,\ 16,\ 20,\ 18,\ 11,\ 17,\ 8,\ 9,\ 10).$$

Klaster o numerze 1, zawierający obiekty o numerach 1 i 2, jest klastrem najlepszym (pierwszym w rankingu) z punktu widzenia optymisty, gdyż gwarantuje najwyższą użyteczność (w kwocie 7) pod warunkiem, że wystąpią warunki typu 2 (patrz 3.1), a na to liczy optymista. Drugi pod względem jakości jest klaster numer 2, zawierający obiekty o numerach: 3, 4, 5, 6, 12, 13 prowadzące do użyteczności w wysokości 6 jednostek (w tym sensie obiekty te są równoważne). W ramach klastrów obiekty zostały wewnętrznie uporządkowane zgodnie z przyjętą leksykografią (1, 2). Analogiczną interpretację decyzyjną mają kolejne klastry. Gdyby w pomocniczej leksykografii przyjąć, że „ważniejsze" (na przykład bardziej prawdopodobne) są warunki typu 2 niż typu 1, to ranking końcowy optymisty miałby postać:

$$Y\left(R^O, L_{\geq}\right)_{\inf}=(2,\ 1,\ 3,\ 13,\ 12,\ 4,\ 5,\ 6,14,\ 19,\ 15,\ 7,\ 20,\ 18,\ 11,\ 16,\ 17,\ 8,\ 10,\ 9).$$

Na rysunku 2 przedstawiony został natomiast podział zbioru Y na klastry pesymisty (3.2). Szczegóły metody wyznaczania klastrów pesymisty opisane są (podobnie jak w przypadku „optymisty") w kolejnym punkcie pracy. Metody wyznaczania zawartości klastrów (2.4) opierają się na klasycznych algorytmach wyznaczania optymalnych decyzji w warunkach niepewności w zastosowaniu odpowiednio do modelu optymisty i pesymisty [2, 8, 9]. Polegają one na sformułowaniu i rozwiązaniu prostych zadań optymalizacji z jednym, skalarnym kryterium.



Rys. 2. Podział zbioru Y na klastry pesymisty

W omawianych wyżej algorytmach rankingowych kluczową rolę odgrywają zawsze moduły wyznaczania zbiorów elementów ekstremalnych $Y_{\inf}^{R}$ lub też $Y_{\min}^{R}$ (2.4) i (2.6). W przypadku zbiorów skończonych oraz specyficznych własności relacji $\mathsf{L}_{\geq}$, R^{O}, R^{P} i R_{α}^{H} są to na ogół proste algorytmy optymalizacyjne ze skalarną funkcją kryterium [2]. W przypadku rankingów paretowskich bardzo efektywnymi w praktyce algorytmami okazały się algorytmy inspirowane biologicznie.

4. Własności rankingów w warunkach niepewności

Własności rankingów w warunkach niepewności wynikają głównie z przyjętego modelu preferencji rankingowych. Praktyka pokazuje, że najczęściej stosowane relacje w procedurach optymalizacji decyzji w warunkach niepewności to: relacja

Hurwicza $\left(R_{\alpha}^{H}\right)$, a w szczególności jej przypadki skrajne, czyli model optymisty $\left(R^{O}\right)$ i pesymisty $\left(R^{P}\right)$, oraz relacja Pareto (≥), leksykograficznego porządku $\left(\mathsf{L}_{\geq}\right)$.

Relacja leksykograficzna $\left(\mathsf{L}_{\geq}\right)$ jest najczęściej stosowana jako relacja pomocnicza w sytuacjach, gdy utworzone klastry rankingowe nie są jednoelementowe. Relacja ta jest też bardzo chętnie wykorzystywana, jeśli znany jest rozkład prawdopodobieństwa występowania warunków lub jego przybliżenie (oszacowanie) [8, 9, 13]. Z kolei relacja Pareto rzadko jest stosowana w warunkach niepewności ze względu na bardzo „restrykcyjne" zasady poprzedzania (obiekt y jest lepszy od obiektu z, jeśli użyteczność y jest większa od z w każdych warunkach), co powoduje, że klastry typu (2.6) są bardzo „rozległe", chociaż decyzje optymalne w sensie Pareto (o ile takie się znajdą w klastrach) są szczególnie cenne.

Wiele bardzo interesujących własności posiada model Hurwicza (3.3) [8, 9] oraz model oparty na procedurze Savage'a [2], uwzględniające w szczególności aspekt ryzyka. Relacja Hurwicza (3.3) jest tylko (i tylko) quasi-porządkiem dla każdego $\alpha \in [0, 1]$. To powoduje, że w rankingach wykorzystuje się klasteryzację typu (2.4), opartą na elementach najmniejszych. W przypadku relacji optymisty bardzo łatwo jest wyznaczyć klastry (2.4), gdyż zachodzi [2]:

$$(y,z)\in R^{O} \text{ wtedy i tylko wtedy gdy } \|y\|_{\infty} \geq \|z\|_{\infty}. \tag{4.1}$$

Wprowadźmy dla uproszczenia zapisu następujące oznaczenia:

$$Y(k)=Y \setminus \bigcup_{i=0}^{i=k-1} Y_{\inf}^{R}(i), \quad k=1,2,... \tag{4.2}$$

Wtedy
$$Y_{\inf}^{R^{O}}(k)=\left\{ \overset{*}{y} \in Y(k) \;\middle|\; \left\|\overset{*}{y}\right\|_{\infty} = \max_{y\in Y(k)} \|y\|_{\infty} \right\}. \tag{4.3}$$

Jest to proste zadanie maksymalizacji normy $\|y\|_{\infty}$ [2]. W rozpatrywanym przykładzie (tab. 1), w przypadku klastra $Y_{\inf}^{R^{O}}$ (1), otrzymamy:

$$\left\|\overset{*}{y}\right\|_{\infty} = \max_{y\in Y(1)} \|y\|_{\infty} = \max_{y\in Y} \|y\|_{\infty} = \max_{m\in \mathrm{M}} \max\left\{y_1^m, y_2^m\right\} = 7.$$

Zatem (patrz rys. 1):

$$Y_{\inf}^{R^{O}}(1)=\left\{ \overset{*}{y} \in Y \;\middle|\; \left\|\overset{*}{y}\right\|_{\infty} = 7 \right\} = \left\{y^1, y^2\right\} = \{1, 2\}.$$

Zawartość pozostałych klastrów wyznaczamy analogicznie. W tabeli 2 zostały pokazane wyniki zastosowanej powyższej procedury wyznaczania klastrów optymisty. W przedostatnim wierszu tabeli znajdują się wartości maksymalnej współrzędnej poszczególnych punktów, a w ostatnim wierszu numery klastrów, które skojarzone z odpowiednimi elementami pierwszgo wiersza tabeli pokazują ich zawartość. Przykładowo klaster nr 3 zawiera elementy {7, 14, 15, 19}.

Tabela 2

Optymista

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1^m	2	4	5	6	6	6	5	3	2	1	0	1	2	4	5	4	3	2	3	3
y_2^m	7	7	6	5	3	2	1	1	1	2	4	6	6	5	4	3	2	4	5	4
max	7	7	6	6	6	6	5	3	2	2	4	6	6	5	5	4	3	4	5	4
k	1	1	2	2	2	2	3	5	6	6	4	2	2	3	3	4	5	4	3	4

Zawartość ostatniego wiersza tabeli jest wyznaczana następująco: „1” wpisujemy pod maksymalnymi wartościami w wierszu przedostatnim, „2” wpisujemy pod kolejnymi co do wielkości wartościami przedostatniego wiersza itd.

Kolejne interesujące własności rankingów Hurwicza wynikają z faktu, że dla każdego $\alpha \in [0, 1]$ zachodzi (relacja Pareto jest podzbiorem każdej relacji Hurwicza)

$$\geq \ \subset R_\alpha^H. \tag{4.4}$$

Zatem zachodzi również:

$$\geq \ \subset R^O \ \text{ oraz } \ \geq \ \subset R^P. \tag{4.5}$$

Z tego wynikają następujące własności dla każdego $\alpha \in [0, 1]$ [2, 3]:

$$Y_{\inf}^{\geq} \subset Y_{\inf}^{R_\alpha^H}, \tag{4.6}$$

$$Y_{\inf}^{R_\alpha^H} \subset Y_{\min}^{\geq}, \tag{4.7}$$

$$Y_{\inf}^{R_\alpha^H} \cap Y_{\min}^{\geq} \neq \varnothing. \tag{4.8}$$

Szczególnie własność (4.8) jest interesująca i ważna z praktycznego punktu widzenia, gdyż wynika z niej, że w każdym klastrze $Y_{\inf}^{R_\alpha^H}(k)$, $k = 1, 2, \ldots$ istnieje co najmniej jeden element optymalny w sensie Pareto (jeden element minimalny w sensie Pareto). W rozpatrywanym przykładzie (dla relacji optymisty) są to następujące podzbiory elementów optymalnych w sensie Pareto zawarte w poszczególnych klastrach („podcieniowane” na rysunku 1):

{2} dla klastra Nr 1,
{3, 4} dla klastra Nr 2,
{14, 15} dla klastra Nr 3 itd.

W przypadku relacji pesymisty R^P uzyskiwane rankingi mają własności analogiczne [2, 3]. Konstrukcja tabeli 3 jest analogiczna jak tabeli 2. W wierszu przedostatnim tabeli 3 znajdują się wartości minimalne poszczególnych składowych punktów reprezentujących obiekty. W ostatnim wierszu tabeli są natomiast „adresy" (numery) kolejnych tworzonych klastrów. Ostatni wiersz tabeli w skojarzeniu z wierszem pierwszym pokazuje zawartość poszczególnych klastrów pesymisty.

TABELA 3

Pesymista

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1^m	2	4	5	6	6	6	5	3	2	1	0	1	2	4	5	4	3	2	3	3
y_2^m	7	7	6	5	3	2	1	1	1	2	4	6	6	5	4	3	2	4	5	4
min	2	4	5	5	3	2	1	1	1	1	0	1	2	4	4	3	2	2	3	3
k	4	2	1	1	3	4	5	5	5	5	6	5	4	2	2	3	4	4	3	3

Przykładowo zawartość klastra k = 3 jest następująca: {5, 16, 19, 20}. Wynika to z następujących zapisów:

Zależność (4.3) w przypadku relacji pesymisty R^P zapiszemy następująco:

$$Y_{\inf}^{R^P}(k)=\left\{\overset{*}{y}\in Y(k)\ \middle|\ \min\left\{\overset{*}{y}_1,\overset{*}{y}_2\right\}=\max_{y\in Y(k)}\min\left\{y_1,y_2\right\}\right\}. \tag{4.9}$$

W rozpatrywanym przykładzie, w przypadku klastra $Y_{\inf}^{R^P}(1)$, otrzymamy:

$$\min\left\{\overset{*}{y}_1,\overset{*}{y}_2\right\}=\max_{y\in Y(1)}\min\left\{y_1,y_2\right\}=\max_{y\in Y}\min\left\{y_1,y_2\right\}=5,$$

Zatem $Y_{\inf}^{R^P}(1)=\left\{\overset{*}{y}\in Y\ \middle|\ \min\left\{\overset{*}{y}_1,\overset{*}{y}_2\right\}=5\right\}=\{3,4\}$ (patrz rys. 2).

Zawartość kolejnych klastrów wyznaczamy analogicznie.

Nawiązując do własności (4.8), można wskazać podzbiory elementów optymalnych w sensie Pareto zawarte w kolejnych klastrach $Y_{\inf}^{R^P}(k)$, $k=1, 2, \ldots$

Są to następujące podzbiory („podcieniowane" na rysunku 2): {3, 4} dla klastra nr 1; {2, 15} dla klastra nr 2; {5, 19} dla klastra nr 3 itd.

Jak widać, metoda wyznaczania klastrów rankingowych w warunkach niepewności jest bardzo prosta, gdyż bazuje na rozwiązywaniu prostego zadania typu „max max" lub „max min" funkcji skalarnej dla zbiorów skończonych. Problem „wewnętrznych rankingów" w ramach poszczególnych klastrów można rozwiązywać, korzystając z relacji leksykograficznej (szczególnie w przypadku gdy znany jest rozkład prawdopodobieństwa warunków lub jego oszacowanie) lub innej zasady [1, 8, 9, 13].

5. Podsumowanie

Dotychczasowa literatura z zakresu metod konstruowania rankingów w warunkach niepewności (w przeciwieństwie do ogólnej teorii podejmowania decyzji w warunkach niepewności) jest stosunkowo skromna. Sprowadzenie zagadnienia optymalizacji decyzji w warunkach niepewności do zadania optymalizacji wielokryterialnej w postaci (1.4) (w pewnym sensie „sztucznego") pozwoliło na wykorzystanie wielu pojęć optymalizacji wielokryterialnej w definiowaniu i wyznaczaniu rozwiązań tego typu zadań. Stosując rekurencyjną metodę wyznaczania elementów ekstremalnych zbioru (2.4) lub (2.6), uzyskuje się odpowiednie klastry rankingowe. Własności rankingów w warunkach niepewności wynikają głównie z własności zastosowanych relacji poprzedzania (dominowania) rankingowego. W pracy skupiono się głównie na modelu niepewności w sensie Hurwicza. W przypadku znajomości rozkładu prawdopodobieństwa występowania warunków (lub nawet tylko jego oszacowania) można go wykorzystać do zdefiniowania relacji leksykograficznej $\left(L_{\geq}\right)$, którą potem można zastosować do porządkowania elementów wewnątrz klastrów o liczności większej niż 1. Rozkład prawdopodobieństwa można też wykorzystać do zdefiniowania rankingu elementów według wartości oczekiwanej ich użyteczności. W literaturze z obszaru podejmowania decyzji w warunkach niepewności (ryzyka) dominuje jednak pogląd o „praktycznej niechęci" decydentów do podejmowania „decyzji jednorazowych" na podstawie wartości oczekiwanej. Przedstawiona w pracy metodologia konstruowania rankingów w warunkach niepewności daje możliwość o wiele szerszej analizy jakościowej decyzji niż klasyczne podejście oparte na wartości oczekiwanej, w tym również w aspekcie roli współczynnika optymizmu $\alpha \in [0, 1]$. Szczególnie interesującą i praktycznie bardzo użyteczną własnością jest własność (4.8), gwarantująca, że w każdym klastrze rankingowym Hurwicza jest przynajmniej jeden element optymalny w sensie Pareto. Nie bez znaczenia są też stosunkowo proste metody wyznaczania zawartości klastrów (4.3) i (4.9). Identyczną metodologię konstruowania rankingów w warunkach niepewności można zastosować w przypadku innych relacji rankingowania, np. wywodzących się z modelu Savage'a [2, 8].

Artykuł wpłynął do redakcji 20.03.2014 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano 17.09.2014 r.

Praca zrealizowana w ramach badań własnych.

LITERATURA

[1] Adair A., *Podejmowanie decyzji*, Wyd. Petit, Warszawa, 1999.

[2] Ameljańczyk A., *Optymalizacja wielokryterialna*, WAT, Warszawa, 1986.

[3] Ameljańczyk A., *Optymalizacja wielokryterialna w problemach sterowania i zarządzania*, Ossolineum, 1984.

[4] Ameljańczyk A., *Matematyczne aspekty modelowania pajęczynowego obiektów*, Biuletyn ISI, 4, 2009.

[5] Ameljańczyk A., *Metoda podziału zbioru obiektów na wielokryterialne klastry jakościowe*, Biuletyn ISI, 12, 2013.

[6] Bouyssou D., Marchant T., *An axiomatic approach to noncompensatory sorting methods in MCDM*, [in:] The case of two categories, EJOR, 2007.

[7] Brans J., Vincke P., Ph., *A preference ranking organization method: The PROMETHEE method*, Management Sci., 1985.

[8] Courtney H., Kirkland J., Viguerie P., *Strategia w warunkach niepewności*, [w:] Zarządzanie w warunkach niepewności, Harvard Busines Review, Helion, Gliwice, 2006.

[9] Hurwicz L., *The generalized Bayes minimax principle: A criterion for decision making under uncertainty*, Discussion Paper Statistics, 35, 1951.

[10] Kahneman D., Tversky A., *Prospect theory: An Analysis of Decision Under Risk*, Econometrica, vol. 47, no 2, 1974.

[11] Nakamura K., *Preference relations on a set of fuzzy utilities as a basis for decision making*, Fuzzy sets and systems, 20, 1986, 147-162.

[12] Rasiowa H., *Wstęp do matematyki współczesnej*, PWN, Warszawa, 2005.

[13] Saaty T.L., *Rank from comparisons and from ratings in the analytic hierarchy/network processe*s, EJOR, 2006.

[14] Savage L.J., *The foundations of statistics reconsidered*, [in:] Kyburg H.E., & Smokler H.E (eds), Studies in Subjective Probability, 1961, 173-188.

[15] Wald A., *Basic ideas of a general theory of statistical decisions rules*, [in:] A. Wald (ed), Selected papers in Statistics and Probability, 1950, 656-668.

[16] Yu P.L., Leitmann G., *Compromise solutions, domination structures and Salukwadze's solution*, JOTA, vol. 13, 1974.

A. AMELJAŃCZYK

Rankings in conditions of uncertainty

Abstract. The work concerns the procedures for ranking a set of objects whose value (utility) varies depending on the occurrence of the conditions for the probability distribution is not generally known. The procedure involves determining the recursive extreme elements of a set on the basis of its qualitative preference relations under uncertainty. The result of the operation is to divide a set of the qualitative ranking clusters and consequently the ranking of elements analyzed under conditions of uncertainty. The study considered Hurwicz model preferences and special cases are discussed ownership rankings obtained and the methods of their determination.

Keywords: preference relation, extreme elements, ranking clusters, Hurwicz model of uncertainty, ranking under uncertainty