

**Marcin
Kąkol****Daniel
Kuśmierz****Zbigniew
Lozia**

Wpływ niehamowanej przyczepy jednoosiowej na długość drogi zatrzymania samochodu dwuosowego

Streszczenie

Artykuł przedstawia wyniki obliczeń symulacyjnych procesu hamowania w ruchu prostoliniowym zespołu pojazdów dwuosowy – jednoosiowa niehamowana przyczepa oraz samego pojazdu dwuosowego. Oceniano długość drogi zatrzymania zespołu pojazdów na poziomej i pochylonej wzdłużnie drodze, zarówno dla jezdni suchej jak i mokrej. Zmieniano pochylenie wzdłużne drogi, a także masę przyczepy oraz położenie wzdłużne i pionowe jej środka masy. Efektem pracy jest jakościowa i ilościowa ocena wpływu na skuteczność hamowania samochodu dwuosowego z dołączoną do niego niehamowaną przyczepą jednoosiową. Otrzymane wyniki wykazały, że dodatkowe obciążenie pojazdu bez przyczepy nie ma wpływu na długość drogi zatrzymania ani na wartość maksymalnego opóźnienia hamowania, gdy kierowca może w pełni wykorzystać przyczepność kół jezdnych do nawierzchni. Dołączenie niehamowanej przyczepy ma największy wpływ na drogę zatrzymania dla pojazdu o najmniejszej masie. Jak można było oczekiwać, wzniesienie skraca drogę zatrzymania, natomiast spadek drogi wydłuża ją. Długość drogi zatrzymania znacznie wydłuża się na mokrej nawierzchni, co uwiadcza się szczególnie na spadku drogi.

Słowa kluczowe

Hamowanie, droga zatrzymania, pojazd ciągnący, przyczepa, zespół pojazdów.

Otrzymano 4 maja 2023 r., zatwierdzono do druku 20 maja 2023 r.

DOI: 10.4467/15053520PnD.23.004.17720

1. Wprowadzenie

Hamowanie to często występujący proces w ruchu pojazdu. Umożliwia zmniejszanie prędkości oraz zatrzymanie samochodu. Dotyczy to także zespołu pojazdów ciągnący – przyczepa. W przypadku niehamowanej przyczepy, źródłem sił hamujących jest samochód. Składowe siły na złączu zespołu pojazdów wpływają na

Mgr inż. **Marcin Kąkol**, Wojskowy Instytut Techniki Pancernej i Samochodowej w Sulejówku, doktorant Szkoły Doktorskiej Politechniki Warszawskiej, ORCID: 0000-0003-0451-9590; inż. **Daniel Kuśmierz**, rzeczoznawca komunikacyjny; prof. dr hab. inż. **Zbigniew Lozia**, Politechnika Warszawska, Wydział Transportu, ORCID: 0000-0002-3188-545X.

sumaryczną siłę hamującą, gdyż zmieniają rozkład reakcji normalnych na osiach jezdnych pojazdu ciągnącego i w ten sposób wpływają na graniczne siły hamujące, a więc w efekcie na skuteczność procesu hamowania zespołu pojazdów.

Proces hamowania i skuteczność działania hamulców są definiowane i opisywane w aktach normatywnych [12–16]. Obejmują one wymagania techniczne konieczne do spełnienia w celu uzyskania homologacji (dopuszczenia „typu WE” pojazdu lub „typu pojazdu” [12]) i dopuszczenia do ruchu konkretnego pojazdu. Lekka przyczepa jest zdefiniowana w ustawie *Prawo o ruchu drogowym* [12] jako pojazd bez silnika, przeznaczony dołączenia z innym pojazdem, o dopuszczalnej masie całkowitej nie większej niż 750 kg. Dopuszcza się [14, 16] konstrukcje przyczep z hamulcem lub bez hamulca. W obwieszczeniu [16] zawarte są informacje o dopuszczalnych masach oraz obciążeniach dotyczących przyczep, zgodnie z którymi wymaga się, żeby minimalne statyczne obciążenie pionowe urządzenia sprzęgającego pojazdu nie było mniejsze niż ciężar masy 25 kg. Dopuszczalne maksymalne masy przyczep ciągniętych przez konkretny pojazd są zapisane w jego dowodzie rejestracyjnym. W regulaminie ECE nr 13 [15] określa się skuteczność hamowania zespołu pojazdów ciągnący – przyczepa w postaci drogi zatrzymania (tu mierzonej od chwili, kiedy kierowca rozpoczyna uruchamianie sterowania układu hamulcowego do chwili zatrzymania zespołu pojazdów) i w pełni rozwiniętego opóźnienia. Należy zwrócić uwagę, że przytoczona z aktu normatywnego [15] nazwa „droga zatrzymania” nie uwzględnia fragmentu drogi przebywanej w czasie reakcji kierowcy. Rzeczoznawcy i biegli sądowi posługują się natomiast pojęciem „drogi zatrzymania” uwzględniającej ten odcinek. W dalszej części artykułu pod pojęciem „droga zatrzymania” należy rozumieć drogę przejechaną w czasie reakcji, narastania opóźnienia hamowania i hamowania.

W Polsce zagadnienia procesu hamowania pojazdów drogowych omówiono szeroko w monografii [11], pochodzącej z lat 70. XX wieku. Obejmuje ona zagadnienia związane z hamowaniem pojazdów oraz ich zespołów. Nowsze pozycje [2, 7, 8] omawiają je na tle opisu własności dynamicznych samochodów.

W opracowaniu monograficznym [2] oraz w pracy [7] zawarto opisy i modele różnych kombinacji pojazdów hamowanych: samochodów osobowych (lub lekkich furgonetek) i lekkich przyczep lub przyczep kempingowych, pojazdów użytkowych (samochodów ciężarowych) i przyczep, zespołów pojazdów ciągnik siodłowy – naczepa. Przedstawia się w nich znany i zrozumiały fakt zwiększania długości drogi hamowania pojazdu po dołączeniu przyczepy. Istotna jest ocena ilościowa tych zmian. Szczegółowe odniesienia do własności aktualnych konstrukcji pojazdów, w tym zespołów pojazdów ciągnący – przyczepa, można znaleźć w publikacjach [2, 3, 4, 5, 6, 10].

W pracy [4] przedstawiono testy drogowe hamowania pojazdu z przyczepą lekką bez hamulca najazdowego z prędkości początkowej 80 km/h, która stanowi maksymalną dopuszczalną prędkość takiego zespołu pojazdów. Badania wykonano

dla samochodu bez przyczepy, z przyczepą oraz z trzema dodatkowymi osobami i przyczepą. Zarówno na suchej jak i na mokrej nawierzchni jezdni długość drogi hamowania samochodu z przyczepą była o 40% większa w porównaniu do długości drogi hamowania samochodu bez przyczepy. Po obciążeniu samochodu dodatkowymi pasażerami długość drogi hamowania samochodu z przyczepą wzrosła o 29% na suchej i 32% na mokrej nawierzchni jezdni w porównaniu do długości drogi hamowania samochodu bez przyczepy. Stwierdzono, że długość drogi hamowania samochodu po dołączeniu przyczepy zwiększa się znacząco, co ma duży wpływ na bezpieczeństwo ruchu drogowego.

W pracy [6] zrelacjonowano badania procesu hamowania samochodu, w tym połączonego z przyczepą, z prędkości początkowej z przedziału 40–50 km/h. Oceńniano średnie w pełni rozwinięte opóźnienie hamowania MFDD¹ [15], drogę hamowania oraz czas hamowania. Wykorzystanie przyczepy bez hamulca najazdowego prowadzi do znacznego pogorszenia badanych parametrów procesu hamowania.

W artykule [3] przedstawiono możliwości wykorzystania opóźnienia hamowania do oceny skuteczności procesu hamowania samochodu osobowego z przyczepą lekką. Autor przedstawił model zespołu pojazd – przyczepa oraz wyprowadzenie wzoru na opóźnienie hamowania, biorąc pod uwagę różne warianty blokowania kół poszczególnych osi zespołu pojazdów. W opisanych pomiarach i obliczeniach wykorzystano dane dwóch samochodów oraz dwóch lekkich przyczep: z hamulcem najazdowym i bez hamulca. Oba samochody były wyposażone w system przeciwblokujący ABS. W badaniach drogowych prędkości początkowe zespołów różnią się. W obliczeniach autor wykorzystał oszacowanie długości drogi hamowania, odpowiadające zmierzonej wartości opóźnienia hamowania (niestety, nie podano sposobu określania wartości tego opóźnienia, reprezentującego zmierzony, zmienny jego przebieg), dla hipotetycznej prędkości początkowej 30 km/h. Uznano, że w ten sposób możliwe było porównanie wartości opóźnienia hamowania dla różnych wariantów zespołu pojazd – przyczepa. Autor ocenił w ten sposób wpływ ładunku na przebieg procesu hamowania dla różnych typów pojazdów.

W pracy [10] zbadano możliwości obliczenia prędkości początkowej zespołu pojazd – przyczepa. W tym celu skorzystano z różnych dostępnych metod: wzorów fizykalnych o różnym stopniu uproszczenia i symulacji komputerowej oraz przeprowadzono badania drogowe. Zaprezentowano rysunki przedstawiające układy sił działających na samochód ciągnący oraz przyczepę, w tym przyczepę jednoosiową.

Przedstawione źródła literaturowe prezentują problematykę hamowania samochodu z przyczepą jednoosiową. Wykazują zmiany długości drogi zatrzymania oraz opóźnienia na poziomej nawierzchni, a także przedstawiają proste metody badania tego procesu. Zaprezentowane w nich wyniki badań wskazują, że zespół samochód – jednoosiowa przyczepa osiąga znacznie dłuższą drogę zatrzymania niż

¹ MFDD – Mean Fully Developed Deceleration.

sam samochód. Ma na to wpływ między innymi masa przyczepy, obciążenie pojazdu, stan nawierzchni oraz rodzaj przyczepy (z hamulcem lub bez).

W przytoczonych badaniach brakuje wyników przedstawiających, jaki wpływ na długość drogi zatrzymania zespołu pojazdów ma nachylenie wzdłużne drogi oraz położenie wzdłużne i pionowe środka masy przyczepy.

Niniejszy artykuł prezentuje model obliczeniowy i wyniki badań, stanowiące próbę odpowiedzi na te pytania.

2. Model ruchu prostoliniowego samochodu ciągnącego niehamowaną jednoosiową przyczepę, na poziomej i pochyłej drodze

Wykorzystano opracowanie [5] jednego ze współautorów, zawierające model, równania równowagi dynamicznej oraz wzór na drogę zatrzymania zespołu pojazdów ciągnący (samochód dwuosiowy) – niehamowana przyczepa jednoosiowa, dla przypadku ruchu prostoliniowego na równej poziomej i pochyłej drodze. Opracowanie to było inspirowane treścią prac [7] i [2].

2.1. Założenia wstępne

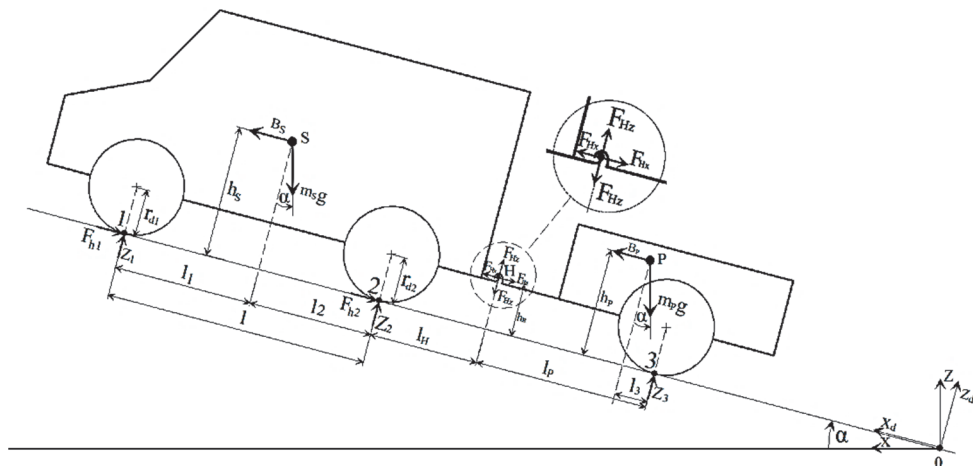
Przyjęto następujące założenia wstępne, głównie o charakterze upraszczającym:

- a. pojazd porusza się po idealnie równej nawierzchni jezdni, ale o niezerowym pochyleniu wzdłużnym,
- b. rozpatrywany jest ruch prostoliniowy,
- c. pomijany jest czołowy opór powietrza (opór ten jest niewielki i można go pominać, szczególnie jeśli hamowanie jest intensywne i zaczyna się od umiarkowanej prędkości [1]),
- d. pomijany jest opór toczenia łącznie z wpływem mas wirujących kół jezdnych (można przyjąć, że wpływ mas wirujących kół znosi się z wpływem oporu toczenia [1]),
- e. hamowanie odbywa się z odłączonym od układu napędowego silnikiem.

Dodatkowe, szczegółowe założenia, wykorzystujące kontekst prowadzonego wyprowadzenia, zostaną podane w dalszej treści pracy.

2.2. Model hamowania analizowanego zespołu pojazdów

Na ryc. 1 przedstawiono przyjęty model samochodu dwuosiowego z jednoosiową niehamowaną przyczepą w trakcie ruchu prostoliniowego [5]. Uwzględnia on wykorzystywane oznaczenia układów współrzędnych, zaznaczonych punktów, wymiarów geometrycznych, mas pojazdów oraz sił.



Ryc. 1. Model samochodu dwuosiowego z jednoosiową niehamowaną przyczepą w trakcie prostoliniowego hamowania [5] (oznaczenia opisano w tekście artykułu).

Wykorzystując ten model można przeprowadzić analizę hamowania pojazdu z uwzględnieniem pochylenia wzdłużnego drogi, przy czym użyte symbole oznaczają:

S – środek masy samochodu,

P – środek masy przyczepy,

α – kąt pochylenia wzdłużnego drogi,

m_S – masa samochodu,

m_P – masa przyczepy,

g – przyspieszenie ziemskie,

B_S – siła bezwładności samochodu,

B_P – siła bezwładności przyczepy,

Z_1, Z_2 – reakcje normalne drogi dla osi jezdnych samochodu,

Z_3 – reakcja normalna drogi dla osi jezdnej przyczepy,

F_{Hx}, F_{Hy} – składowe siły działającej na kulę urządzenia sprzęgającego,

F_{H1}, F_{H2} – siły hamowania osi przedniej i tylnej samochodu,

r_{d1}, r_{d2} – promienie dynamiczne kół samochodu,

$l, l_1, l_2, l_H, l_P, l_3$ – odległości między zaznaczonymi punktami,

h_S, h_H, h_P – odległości (wysokości) zaznaczonych punktów od jezdni,

1, 2, 3 – punkty styku kół z nawierzchnią,

Ox – układ współrzędnych związany z poziomą jezdnią,

Ox_dZ_d – układ współrzędnych związany z pochyłą jezdnią.

Na podstawie przyjętego modelu, po prezentacji wyprowadzeń wzorów, możliwe jest określenie wartości sił dla danego pochylenia wzdłużnego drogi α (dodatniego dla wzniesienia, zerowego dla jezdni poziomej, ujemnego dla spadku) oraz

zależności opisujących opóźnienie hamowania zespołu pojazdów i długość drogi zatrzymania.

Dla modelu przedstawionego na ryc. 1 zachodzą następujące zależności:

$$m = m_S + m_P \quad (1)$$

$$B_S = -m_S \cdot \ddot{x}_{dS} = -m_S \cdot \ddot{x}_d = m_S \cdot a \quad (2)$$

a [m/s^2] to maksymalne opóźnienia hamowania samochodu lub zespołu pojazdów.

$$B_P = -m_P \cdot \ddot{x}_{dP} = -m_P \cdot \ddot{x}_d = m_P \cdot a \quad (3)$$

$$a = -\ddot{x}_d = -\ddot{x}_{dS} = -\ddot{x}_{dP} \quad (4)$$

$$F_h = F_{h1} + F_{h2} \quad (5)$$

Przyjęto, że hamowanie następuje z prędkości początkowej

$$V_0[km/h] = 3,6 \cdot v_0[m/s] \quad (6)$$

Czas reakcji (kierowcy i samochodu) oznaczono t_r [s].

Czas narastania sił (i opóźnienia) hamowania oznaczono t_n [s].

Założono, że w czasie reakcji t_r i w czasie narastania t_n na samochód działa siła pochodząca od oporów wzniesienia

$$F_w = (m_S + m_P) \cdot g \cdot \sin \alpha \quad (\text{dla spadku } \alpha \text{ jest ujemna}) \quad (7)$$

a więc składowa całkowitego przyspieszenia w kierunku $0x_d$ o wartości

$$a_w = g \cdot \sin \alpha \quad (\text{gdyż } a_w = \frac{F_w}{m_S + m_P}) \quad (8)$$

Równania równowagi dynamicznej dla całego zespołu pojazd ciągnący (samochód) – przyczepa.

Dla kierunku $0x_d$

$$B_S + B_P - m_S \cdot g \cdot \sin \alpha - m_P \cdot g \cdot \sin \alpha - F_{h1} - F_{h2} = 0 \quad (9)$$

Dla kierunku $0z_d$

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 - m_S \cdot g \cdot \cos \alpha - m_P \cdot g \cdot \cos \alpha = 0 \quad (10)$$

Równania równowagi dynamicznej dla pojazdu ciągniętego (samochodu).

Dla kierunku $0x_d$

$$B_S + F_{Hx} - F_{h1} - F_{h2} - m_S \cdot g \cdot \sin \alpha = 0 \quad (11)$$

Dla kierunku $0z_d$

$$Z_1 + Z_2 - m_S \cdot g \cdot \cos \alpha - F_{Hz} = 0 \quad (12)$$

Równania równowagi dynamicznej dla przyczepy.

Dla kierunku $0x_d$

$$B_P - F_{Hx} - m_P \cdot g \cdot \sin \alpha = 0 \quad (13)$$

Dla kierunku $0z_d$

$$Z_3 - m_P \cdot g \cdot \cos \alpha + F_{Hz} = 0 \quad (14)$$

Z sumy momentów sił względem punktu H, dla przyczepy

$$Z_3 \cdot l_p + (B_p - m_p \cdot g \cdot \sin \alpha) \cdot (h_p - h_H) - m_p \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot (l_p - l_3) = 0 \quad (15)$$

Czyli

$$Z_3 = \frac{-(B_p - m_p \cdot g \cdot \sin \alpha) \cdot (h_p - h_H) + m_p \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot (l_p - l_3)}{l_p} \quad (16)$$

Z zależności (14)

$$F_{HZ} = m_p \cdot g \cdot \cos \alpha - Z_3$$

$$F_{HZ} = m_p \cdot g \cdot \cos \alpha + (B_p - m_p \cdot g \cdot \sin \alpha) \cdot \frac{h_p - h_H}{l_p} - m_p \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \frac{l_p - l_3}{l_p} \quad (17)$$

Z zależności (13)

$$F_{HX} = B_p - m_p \cdot g \cdot \sin \alpha \quad (18)$$

Poszukiwane są zależności określające wartości reakcji normalnych kół poszczególnych osi jezdnych. Zależność (16) określa wartość Z_3 .

Zależność (12) uzupełniona zostaje równaniem momentów sił względem punktu 2.

$$F_{HX} \cdot h_H - F_{HZ} \cdot l_H + (B_S - m_S \cdot g \cdot \sin \alpha) \cdot h_S + m_S \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot l_2 - Z_1 \cdot l = 0 \quad (19)$$

Stąd

$$Z_1 = [F_{HX} \cdot h_H - F_{HZ} \cdot l_H + (B_S - m_S \cdot g \cdot \sin \alpha) \cdot h_S + m_S \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot l_2] \cdot \frac{1}{l} \quad (20)$$

Z (12)

$$Z_2 = m_S \cdot g \cdot \cos \alpha + F_{HZ} - Z_1 \quad (21)$$

$$Z_2 = m_S \cdot g \cdot \cos \alpha + F_{HZ} - F_{HX} \cdot \frac{h_H}{l} + F_{HZ} \cdot \frac{l_H}{l} + \\ - (B_S - m_S \cdot g \cdot \sin \alpha) \cdot \frac{h_S}{l} - m_S \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \frac{l_2}{l} \quad (22)$$

Założono, że w samochodzie działa układ przeciwblokujący ABS lub nie działa i koła są zablokowane. Jeżeli koła nie są zablokowane to (przy działającym ABS) założono, że na kołach przednich i tylnych osiągnięty jest ten sam poziom jednostkowej siły stycznej μ_a ($\mu_{a1} = \mu_{a2} = \mu_a$), który jest średnią wartością jednostkowej siły stycznej μ (dla kierunku wzdłużnego) w kontakcie koło ogumione – nawierzchnia. Wynosi on:

$$\mu_a = p\% \cdot \frac{\mu_1}{100\%} \quad (23)$$

gdzie: $p\%$ – procentowy wskaźnik efektywności układu ABS,

μ_1 – współczynnik przyczepności przyłgowej.

Dla perfekcyjnego przypadku działania tego układu $p\% = 100\%$ i $\mu_a = \mu_1$.

Dla wszystkich zablokowanych kół pojazdu ciągnącego:

$$\mu_a = \mu_2 \quad (24)$$

gdzie μ_2 to współczynnik przyczepności poślizgowej.

Wymuszeniem dla badanego zespołu pojazd ciągnący (samochód) – niehamowana przyczepa są momenty hamowania M_{h1}, M_{h2} .

Siły hamowania nie mogą przekroczyć wartości:

$$F_{h1} = M_{h1}/r_{d1} \quad (25)$$

$$F_{h2} = M_{h2}/r_{d2} \quad (26)$$

ale są na tyle duże, że możliwe jest wykorzystanie działania ABS lub zablokowanie kół (dla pojazdu bez ABS).

Dla tak opisanego działania układu hamulcowego osiągnane są wartości sił hamowania:

- dla działającego ABS:

$$F_{h1} = \mu_a \cdot Z_1 \quad (27)$$

$$F_{h2} = \mu_a \cdot Z_2 \quad (28)$$

- dla kół zablokowanych, przy braku działania ABS:

$$\mu_a = \mu_2 \quad (29)$$

Do zależności (9) podstawiono prawe strony zależności (2) i (3) oraz (27) i (28):

$$m_S \cdot a + m_P \cdot a - (m_S + m_P) \cdot g \cdot \sin \alpha - \mu_a \cdot Z_1 - \mu_a \cdot Z_2 = 0 \quad (30)$$

Po uwzględnieniu (20), (22), (17), (18), (2), (3), pogrupowaniu oraz uproszczeniu otrzymano zależność:

$$a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha + \mu_a \cdot m_S \cdot g \cdot \cos \alpha + \mu_a m_P \cdot g \cdot (-\sin \alpha \cdot \frac{h_P - h_H}{l_P} + \cos \alpha \cdot \frac{l_3}{l_P})}{m - m_P \cdot \mu_a \cdot \frac{h_P - h_H}{l_P}} \quad (31)$$

Rozwiązanie (31) ma sens fizyczny, gdy $Z_3 > 0$. Do zależności (16) wstawiamy (2) i (3):

$$Z_3 = -(m_P \cdot a - m_P \cdot g \cdot \sin \alpha) \cdot \frac{h_P - h_H}{l_P} + m_P \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \frac{l_P - l_3}{l_P} > 0 \quad (32)$$

Ponieważ $m_P > 0$ (to występuje zawsze) oraz $l_P > 0$ (to występuje dla standardowych rozwiązań konstrukcyjnych).

$$-m_P \cdot a \cdot \frac{h_P - h_H}{l_P} + m_P \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot \frac{h_P - h_H}{l_P} + m_P \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \frac{l_P - l_3}{l_P} > 0 \quad (33)$$

$$a \cdot (h_P - h_H) < g \cdot \sin \alpha \cdot (h_P - h_H) + g \cdot \cos \alpha \cdot (l_P - l_3) \quad (34)$$

Dla
$$h_P - h_H > 0 \quad (35)$$

$$Z_3 > 0 \text{ dla } a < g \cdot \sin \alpha + g \cdot \cos \alpha \frac{l_P - l_3}{h_P - h_H} \quad (36)$$

Jeżeli jest inaczej, czyli dla
$$h_P - h_H \leq 0 \quad (37)$$

przejsie od (34) do (36) będzie miało inny rezultat, związany jednak z wartościami $Z_3 > 0$. Nie ma tu więc zagrożenia oderwania się kół przyczepki od nawierzchni jezdni.

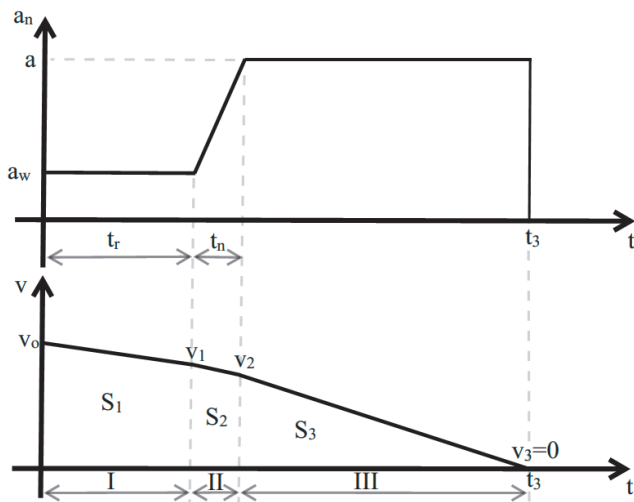
Niespełnienie warunku (36), czyli dla

$$Z_3 \leq 0 \quad (38)$$

oznacza, że przyczepka może obrócić się wokół punktu H i „przelecieć” w kierunku $0x_d$, co oznacza sytuację, której nie opisuje model na ryc. 1. Warunek (36) ogranicza zatem, przedział rozwiązań (31) do spełniających zależność (36).

2.3. Droga zatrzymania zespołu pojazdów

Poniżej opisany zostanie przyjęty w obliczeniach przebieg czasowy procesu hamowania zespołu pojazdów. Cały proces hamowania można podzielić na trzy okresy, przedstawione na ryc. 2.



Ryc. 2. Wykres przebiegu czasowego procesu hamowania – zmiany opóźnienia oraz prędkości pojazdu (zaczepnięto z pozycji [5], w której był on inspirowany wykresem publikowanym w [1] dla jezdni poziomej). Cyfry I, II, III oznaczają kolejne okresy.

Obejmują one:

- okres I – czas reakcji t_r (kierowcy i samochodu) w przedziale $\langle 0, t_r \rangle$; opóźnienie hamowania samochodu (lub zespołu pojazdów) ma wartość a_w ,
- okres II – czas narastania opóźnienia hamowania t_n w przedziale $\langle t_r, t_r+t_n \rangle$, w którym opóźnienie zaczyna wzrastać,
- okres III – czas w przedziale $\langle t_r+t_n, t_3 \rangle$, w którym prędkość uzyskana na końcu okresu drugiego, zmniejsza się liniowo do zera; opóźnienie hamowania samochodu (lub zespołu pojazdów) osiąga maksymalną wartość a .

W pracy [5] w sposób formalny dokonano dwukrotnego całkowania przebiegu czasowego $a(t)$. W jego wyniku otrzymano podane niżej zależności. Droga zatrzymania wyraża się wzorem:

$$S_Z = \{S_1\} + \{S_2\} + \{S_3\} \quad (39)$$

$$S_Z = \left\{ v_0 t_r - a_w \frac{t_r^2}{2} \right\} + \left\{ \left[v_0 - (a - a_w) \frac{t_r^2}{2t_n} \right] t_n + \frac{1}{2} \left[-a_w \left(1 + \frac{t_r}{t_n} \right) + a \frac{t_r}{t_n} \right] [(t_r + t_n)^2 - t_r^2] + -\frac{a-a_w}{6t_n} [(t_r + t_n)^3 - t_r^3] \right\} + \left\{ \frac{A^2}{2a} - A(t_r + t_n) + \frac{a}{2} (t_r + t_n)^2 \right\} \quad (40)$$

gdzie:
$$A = v_0 + a_w \frac{t_r^2 - (t_r + t_n)^2}{2t_n} + a \left(t_r + \frac{t_n}{2} \right) \quad (41)$$

Nawiasów klamrowych użyto celowo, by wskazać powiązanie ze wzorem (39).

3. Przyjęte do obliczeń dane pojazdu ciągnącego i przyczepy jednoosiowej oraz warunki ruchu

Obliczenia wykonano dla danych samochodu osobowego, dla dwóch przypadków jego obciążenia: bez ładunku (ale z kierowcą) i w stanie obciążonym (w pełni załadowanym). W tabeli 1 podano przyjęte w obliczeniach dane pojazdu. W tabeli 2 przedstawiono wykorzystane w obliczeniach dane w pełni obciążonej przyczepy jednoosiowej. Przyjęto założenie upraszczające, że zmiana obciążenia pojazdu nie zmienia odległości punktu H od nawierzchni jezdni. Należy zauważyć, że we wzorach końcowych, wykorzystywanych w prezentowanych obliczeniach, nie występują wartości r_{d1} , r_{d2} (promienie dynamiczne kół samochodu).

Tabela 1. Dane dwuosioowego samochodu osobowego Kia Cee'd w stanie bez ładunku i w stanie obciążonym.

Parametr modelu samochodu	Oznaczenie [jedn.]	Stan obciążenia	
		bez ładunku (tylko kierowca)	całkowicie obciążony
Masa samochodu	m_S [kg]	1621	1870
Wysokość środka masy S	h_S [m]	0,555	0,503
Odległość środka przegubu sprzęgającego H od nawierzchni jezdni	h_H [m]	0,430	0,430
Rozstaw osi	l [m]	2,655	2,655
Odległość środka masy pojazdu S od osi przedniej	l_1 [m]	1,030	1,134
Odległość środka masy pojazdu S od osi tylnej	l_2 [m]	1,625	1,521
Odległość środka przegubu sprzęgającego H od osi tylnej	l_H [m]	1,045	1,045

Tabela 2. Dane obciążonej przyczepy jednoosiowej.

Parametr przyczepy towarowej	Oznaczenie [jednostka]	Wartość
Masa przyczepy	m_P [kg]	750
Wysokość środka masy P	h_P [m]	0,600
Odległość osi jezdnej przyczepy od środka przegubu sprzęgającego H	l_P [m]	1,750
Odległość osi jezdnej przyczepy od jej środka masy P	l_3 [m]	0,035

Obliczenia wykonano dla hamowanego samego pojazdu (bez przyczepy) oraz dla hamowanego zespołu pojazd ciągnący – przyczepa.

Przyjęto prędkość początkową $V_0 = 70 \text{ km/h} = 19,4 \text{ m/s} = v_0$ oraz czas reakcji (kierowcy i samochodu) $t_r = 1,0 \text{ s}$ i czas narastania sił (i opóźnienia) hamowania $t_n = 0,4 \text{ s}$ [9]. Celowo przyjęto krótki czas reakcji, aby skupić się głównie na własnościach badanego zespołu pojazd ciągnący – przyczepa, przypisując mniejsze znaczenie wpływowi kierowcy. Na podstawie danych z monografii [7] przyjęto dwa rodzaje nawierzchni jezdni:

- suchy asfalt $\mu_1 = 0,84$, $\mu_2 = 0,80$,
- mokry asfalt $\mu_1 = 0,68$, $\mu_2 = 0,60$.

Założono współczynnik procentowej efektywności układu ABS $p\% = 88\%$ (patrz zależność (23)). Dla hamowania samego pojazdu i zespołu pojazdów, wykonano obliczenia dla kąta α odpowiadającego procentowemu pochyleniu wzdłużnemu drogi $W\%$ z przedziału $\langle -10\%, 10\% \rangle$ z krokiem jeden procent (1%). Wykorzystano zależność

$$\alpha = \arctg \left(\frac{W\%}{100\%} \right) \quad (42)$$

Wzniesienie $W\%$ (związane z kątem α) jest odkładane na odciętej wykresów dla analizowanych 8 przypadków, opisanych w tab. 3.

Tabela 3. Znaczenie wyróżnionych przypadków obliczeń na jezdni pochylej.

Przypadek obliczeń	Opis analizowanego przypadku obliczeń
Przypadek 1	Samochód obciążony kierowcą, bez przyczepy, nawierzchnia mokra
Przypadek 2	Samochód obciążony kierowcą, bez przyczepy, nawierzchnia sucha
Przypadek 3	Samochód całkowicie obciążony, bez przyczepy, nawierzchnia mokra
Przypadek 4	Samochód całkowicie obciążony, bez przyczepy, nawierzchnia sucha
Przypadek 5	Samochód obciążony kierowcą, przyczepa, nawierzchnia mokra
Przypadek 6	Samochód obciążony kierowcą, przyczepa, nawierzchnia sucha

Przypadek 7	Samochód całkowicie obciążony, przyczepa, nawierzchnia mokra
Przypadek 8	Samochód całkowicie obciążony, przyczepa, nawierzchnia sucha

Poza powyżej opisanymi przypadkami, dla ruchu na poziomej nawierzchni drogi, wykonano także obliczenia dla ruchu zespołu pojazd – przyczepa na nawierzchni poziomej, dla zmiennego położenia środka masy przyczepy i zmiennej masy przyczepy. Tabela 4 zawiera opis dodatkowych przypadków obliczeń.

Tabela 4. Znaczenie wyróżnionych dodatkowych przypadków obliczeń na jezdni poziomej.

Przypadek obliczeń	Opis analizowanego przypadku obliczeń
Przypadek 5a	Samochód obciążony kierowcą, przyczepa, nawierzchnia mokra. Zmianie ulega położenie wzdłużne środka masy przyczepy.
Przypadek 5b	Samochód obciążony kierowcą, przyczepa, nawierzchnia mokra. Zmianie ulega położenie pionowe środka masy przyczepy.
Przypadek 5c	Samochód obciążony kierowcą, przyczepa, nawierzchnia mokra. Zmianie ulega masa przyczepy.
Przypadek 6a	Samochód obciążony kierowcą, przyczepa, nawierzchnia sucha. Zmianie ulega położenie wzdłużne środka masy przyczepy.
Przypadek 6b	Samochód obciążony kierowcą, przyczepa, nawierzchnia sucha. Zmianie ulega położenie pionowe środka masy przyczepy.
Przypadek 6c	Samochód obciążony kierowcą, przyczepa, nawierzchnia sucha. Zmianie ulega masa przyczepy.

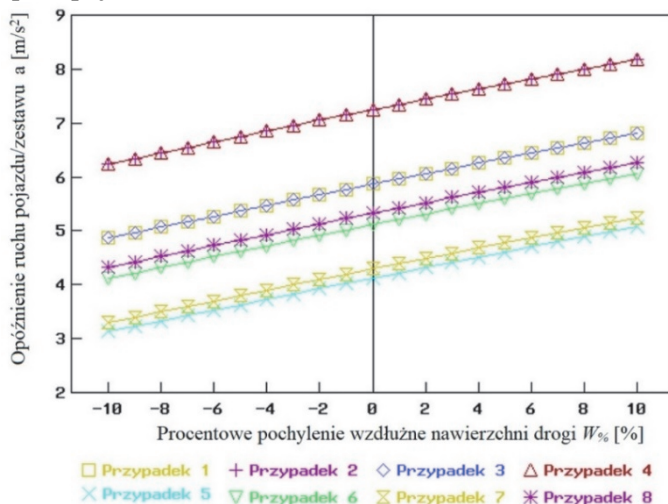
Położenie wzdłużne środka masy przyczepy l_3 zmieniano od wartości $-0,2$ m do $0,4$ m, położenie pionowe środka masy przyczepy h_P od wartości $0,3$ m do $0,8$ m, a masę przyczepy m_P od wartości 130 kg do 1000 kg. Dla zmiany każdego z wymienionych parametrów, pozostałe pozostawały na poziomie wartości nominalnych (tabela 1 i 2). W każdym z wymienionych przypadków (5a–6c) wykonywano obliczenia w 51 punktach, w podanych zakresach zmian.

4. Wyniki obliczeń

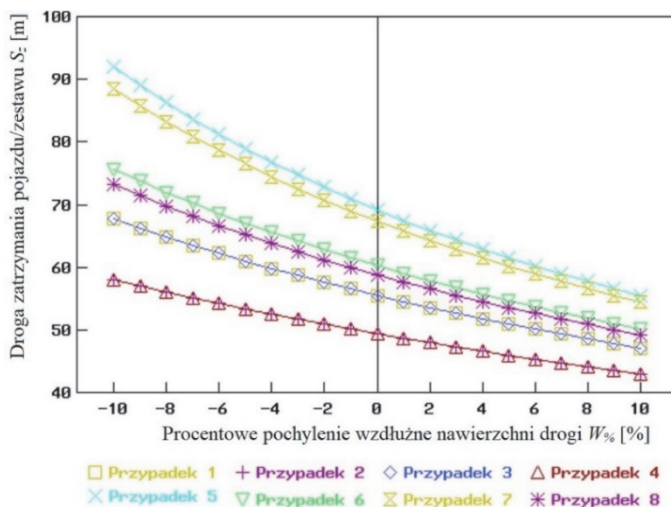
Wyniki zostaną zaprezentowane głównie w formie graficznej, dla wyróżnionych przypadków 1–8, 5a, 5b, 5c, 6a, 6b i 6c.

4.1. Wpływ pochylenia wzdłużnego drogi dla różnych stanów obciążenia zespołu pojazdów, na nawierzchni mokrej i suchej

Obliczenia wykonano dla przypadków 1–8. Zmieniano kąt α tak, że odpowiadał procentowemu pochyleniu wzdłużnemu drogi $W\%$ z przedziału $\langle -10\%, 10\% \rangle$, z krokiem jeden procent (1%). $W\%$ jest zmienną niezależną przedstawionych wykresów. Ryc. 3 obrazuje maksymalną wartość opóźnienia hamowania samochodu (lub zespołu pojazdów) a (patrz ryc. 2). Ryc. 4 przedstawia drogę zatrzymania samochodu/zespołu pojazdów S_z .



Ryc. 3. Opóźnienie hamowania pojazdu lub zespołu pojazdów w funkcji procentowego pochylenia wzdłużnego drogi dla analizowanych przypadków 1–8.



Ryc. 4. Droga zatrzymania pojazdu lub zespołu pojazdów w funkcji procentowego pochylenia wzdłużnego drogi dla analizowanych przypadków 1–8.

Wraz ze wzrostem procentowego pochylenia wzdłużnego drogi $W\%$ zwiększa się opóźnienie hamowania a i maleje długość drogi zatrzymania S_z . W stosunku do jezdni poziomej, dodatnie pochylenie (wzniesienie) powoduje wzrost opóźnienia i skrócenie drogi zatrzymania. Ujemnie pochylenie zmniejsza opóźnienie hamowania i wydłuża drogę zatrzymania. Dla danego pochylenia drogi $W\%$ największe opóźnienie hamowania i najkrótsza droga zatrzymania osiągane są dla rozważanych przypadków 2 i 4, dalej dla 1 i 3, 8, 6, 7 i 5. Proces hamowania jest najbardziej skuteczny dla samochodu bez przyczepy, na suchej nawierzchni, a najmniej skuteczny dla pojazdu obciążonego tylko kierowcą i całkowicie obciążonego, w obu przypadkach z przyczepą, na mokrej nawierzchni. Dla najmniej wrażliwych przypadków (2 i 4) na wpływ pochylenia wzdłużnego drogi zmiana długości drogi zatrzymania w stosunku do hamowania na drodze poziomej wynosi 17,6% dla $W\% = -10\%$ i $-12,9\%$ dla $W\% = 10\%$.

Dla najbardziej wrażliwego przypadku 5 na wpływ pochylenia wzdłużnego drogi, zmiana długości drogi zatrzymania w stosunku do hamowania na drodze poziomej wynosi 33,0% dla $W\% = -10\%$ i $-19,8\%$ dla $W\% = 10\%$.

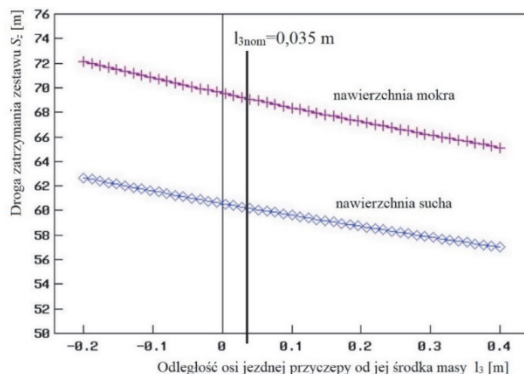
Jeżeli przyjmiemy jako odniesienie wyniki osiągane dla przypadków charakteryzujących się największą skutecznością hamowania (2 i 4), to zmiana drogi zatrzymania wynosi (dla $W\%$ od -10% do 10%) 16,6% – 9,6% dla przypadków 1 i 3, 59,6% – 29,7% dla przypadku 5, 31,2% – 17,2% dla przypadku 6, 53,4% – 27,2% dla przypadku 7 oraz 26,8% – 15,0% dla przypadku 8.

Opisane zmiany są znaczące, a nawet duże i bardzo duże. Są wywołane zmianą konfiguracji zespołu pojazdów, w tym oddziaływaniem nominalnie obciążonej przyczepy.

4.2. Wpływ położenia środka masy przyczepy i jej masy w czasie hamowania na nawierzchni mokrej i suchej

Obliczenia wykonano dla przypadków 5a, 5b, 5c, 6a, 6b i 6c. W każdym z nich dokonywano zmiany wartości tylko jednego z wymienionych parametrów (l_3 , h_P i m_P), pozostawiając pozostałe na nominalnym poziomie. Należy przypomnieć, że dla tych przypadków wykonywano obliczenia dla drogi poziomej.

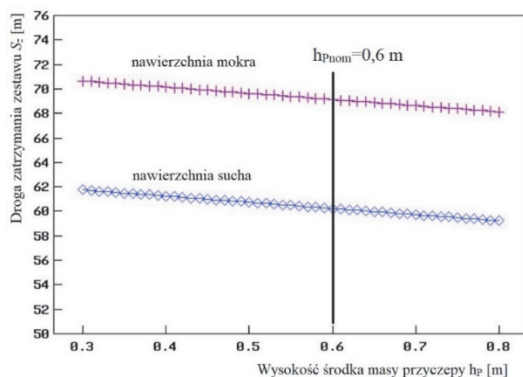
Ryc. 5 przedstawia zmiany drogi zatrzymania zespołu pojazdów w konfiguracji 5a i 6a (różniących się stanem nawierzchni: mokra, sucha) dla zmiennej odległości osi jezdnej przyczepy od jej środka masy l_3 . Zaznaczono nominalną wartość l_{3nom} tego parametru.



Ryc. 5. Droga zatrzymania zespołu pojazdów w funkcji odległości osi jezdnej przyczepy od jej środka masy l_3 dla przypadków 5a i 6a.

Zmiana długości drogi zatrzymania S_z w stosunku do wartości otrzymanej dla l_{3nom} wynosi, dla najmniejszej wartości $l_3 = -0,2$ m, 4,4% dla przypadku 5a (nawierzchnia mokra) i 4,0% dla przypadku 6a (nawierzchnia sucha). Dla największej wartości $l_3 = 0,4$ m, zmiana ta wynosi $-5,8\%$ dla przypadku 5a (nawierzchnia mokra) i $-5,4\%$ dla przypadku 6a (nawierzchnia sucha).

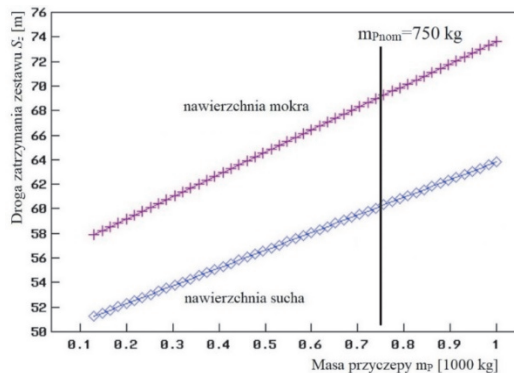
Ryc. 6 przedstawia zmiany długości drogi zatrzymania zespołu pojazdów w konfiguracji 5b i 6b dla zmiennej wysokości środka masy przyczepy h_P . Zaznaczono nominalną wartość h_{Pnom} tego parametru.



Ryc. 6. Droga zatrzymania zespołu pojazdów w funkcji wysokości środka masy przyczepy h_P dla przypadków 5b i 6b.

Zmiana długości drogi zatrzymania S_z w stosunku do wartości otrzymanej dla h_{Pnom} wynosi, dla najmniejszej wartości $h_P = 0,3$ m, 2,2% dla przypadku 5b (nawierzchnia mokra) i 2,5% dla przypadku 6b (nawierzchnia sucha). Dla największej wartości $h_P = 0,8$ m, zmiana ta wynosi $-1,5\%$ dla przypadku 5b (nawierzchnia mokra) i $-1,7\%$ dla przypadku 6b (nawierzchnia sucha).

Ryc. 7 przedstawia zmiany długości drogi zatrzymania zespołu pojazdów w konfiguracji 5c i 6c dla zmiennej masy m_P . Zaznaczono nominalną wartość m_{Pnom} tego parametru.



Ryc. 7. Droga zatrzymania zespołu pojazdów w funkcji masy przyczepy m_P dla analizowanych przypadków 5c i 6c.

Zmiana długości drogi zatrzymania S_z w stosunku do wartości otrzymanej dla m_{Pnom} wynosi dla najmniejszej wartości $m_P = 130$ kg $-16,3\%$ dla przypadku 5c (nawierzchnia mokra) i $-14,9\%$ dla przypadku 6c (nawierzchnia sucha). Dla największej wartości $m_P = 1000$ kg, zmiana ta wynosi $6,5\%$ dla przypadku 5c (nawierzchnia mokra) i $5,9\%$ dla przypadku 6c (nawierzchnia sucha).

Przedstawione zmiany procentowe wyników w stosunku do wartości otrzymanych dla nominalnych wartości analizowanych parametrów mają tę wadę, że zależą w znacznym stopniu od rozważanego zakresu zmian tych parametrów (l_3 , h_P i m_P). Tego typu wad nie ma analiza zmian względnych, która zostanie przeprowadzona poniżej.

Przebieg zmian wielkości prezentowanych na ryc. 5, 6 i 7 jest praktycznie liniowy, dlatego nietrudno jest określić wrażliwość zmian drogi zatrzymania na zmiany położenia środka masy przyczepy l_3 i h_P oraz masy przyczepy m_P . Zostanie wykorzystany współczynnik wrażliwości względnej $R_{fp}^{\%}$ funkcji f_i ($i = 1, 2$; f_1 dla S_z dla nawierzchni mokrej, przypadki 5a, 5b, 5c; f_2 dla S_z dla nawierzchni suchej, przypadki 6a, 6b, 6c) względem parametru p_j (tutaj $j = 1, 2, 3$; p_1 jest tożsame z l_3 , czyli położeniem wzdłużnym środka masy przyczepy; p_2 jest tożsame z h_P , czyli wysokością środka masy przyczepy; p_3 jest tożsame z m_P , czyli masą przyczepy) zdefiniowany za pomocą zależności (43):

$$R_{fp}^{\%} = \frac{\partial(\ln f_i)}{\partial(\ln p_j)} = \frac{\partial(f_i)}{\partial(p_j)} \cdot \frac{p_j}{f_i} \cdot \frac{100\%}{100\%} \approx \frac{\Delta f_i}{\Delta p_j} \cdot \frac{p_j}{f_i} \cdot \frac{100\%}{100\%} \quad [\% / \%] \quad (43)$$

Wartości tych współczynników określano dla wartości średnich analizowanych parametrów (l_3 , h_P i m_P). Dla danych przedstawionych na ryc. 5, 6 i 7 współczynniki $R_{fp}^{\%}$ przyjmują wartości:

- dla zmian l_3 , czyli położenia wzdłużnego środka masy przyczepy: $-0,017$ %/% dla nawierzchni mokrej (5a) i $-0,016$ %/% dla nawierzchni suchej (6a);
- dla zmian h_P , czyli wysokości środka masy przyczepy: $-0,040$ %/% dla nawierzchni mokrej (5b) i $-0,046$ %/% dla nawierzchni suchej (6b);
- dla zmian m_P , czyli masy przyczepy: $0,155$ %/% dla nawierzchni mokrej (5c) i $0,142$ %/% dla nawierzchni suchej (6c).

Przedstawione powyżej wyniki zmian względnych wskazują na największe znaczenie zmian m_P , następnie zmian h_P , a najmniejsze zmian l_3 . Niewielkie nachylenie wykresów na ryc. 6 (w porównaniu do analogicznych wykresów na ryc. 5) jest zatem mylące.

5. Wnioski końcowe

Przedstawione wyniki obliczeń wskazują na duże znaczenie pochylenia wzdłużnego drogi i konfiguracji zespołu pojazd ciągnący – przyczepa na skuteczność procesu hamowania, opisywaną przede wszystkim długością drogi zatrzymania. Dodatkowo pochylenie (wzniesienie) powoduje zwiększenie opóźnienia hamowania i skrócenie drogi zatrzymania. Ujemnie pochylenie (spadek) powoduje natomiast zmniejszenie opóźnienia hamowania i wydłużenie drogi zatrzymania. Zmiany te są bardzo znaczące. W opisie ilościowym istotne znaczenie ma konfiguracja zespołu pojazd – przyczepa, masa przyczepy, położenie jej środka masy oraz stan nawierzchni jezdni (mokra, sucha).

Bibliografia

1. Arczyński, S. (1993). *Mechanika ruchu samochodu*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.
2. Day, A. (2014). Braking system design for vehicle and trailer combinations. W: A. Day. *Braking of road vehicles*. ELSEVIER: Butterworth-Heinemann, 67–96. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-397314-6.00004-8>
3. Filipczyk, J. (2012). Brake deceleration of cars with light luggage trailers, *Problemy Transportu*, 7 (1), 119–128. <https://delibra.bg.polsl.pl/dlibra/publication/30953/edition/27445/content>
4. Klonowski, M., Tyszko, P. (2013). ? Interia. Motoryzacja. *O ile dalej zahamujesz z przyczepą?* <https://motoryzacja.interia.pl/samochody-uzywane/porady/news-o-ile-dalej-zahamujesz-z-przyczepa,nId,1031989>
5. Lozia, Z. (2021). Model, równania równowagi dynamicznej oraz wzór na drogę zatrzymania zestawu pojazd ciągnący (samochód dwuosiowy) – niehamowana przyczepa jednoosiowa. Przypadek ruchu prostoliniowego na równej poziomej i pochyłej nawierzchni drogi. Rękopis autora jest dostępny na https://www.researchgate.net/publication/370653431_Lozia_Z_ZL_wyprowadzenia_2021
6. Marienka, P., Frančáka, M., Jagelčáka, J., Synáka, F. (2020). Comparison of braking characteristics of solo vehicle and selected types of vehicle combinations, *Transportation Research Procedia*, 44, 40–46. <https://doi.org/10.1016/j.trpro.2020.02.007>

7. Mitschke, M. (1987). *Teoria samochodu. Dynamika samochodu*. Tom 1: *Napęd i hamowanie*. WKŁ.
8. Prochowski, L. (2008). *Pojazdy samochodowe. Mechanika ruchu*. WKŁ.
9. Stańczyk, T. L. (2013). *Działania kierowcy w sytuacjach krytycznych. Badania eksperymentalne i modelowe*. Monografie 43. Politechnika Świętokrzyska.
10. Świder, P., Bułka, D. (2016). *Opóźnienie zestawu z niehamowaną przyczepą – teoria, badania, symulacja*. Problemy bezpieczeństwa w pojazdach samochodowych, Kielce-Ameliówka, 22–24.02.2016 r. Materiały konferencyjne. Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej.
11. Wrześniński, T. (1978). *Hamowanie pojazdów samochodowych*. WKŁ.

Akty normatywne

1. Dziennik Ustaw Nr 98 poz. 602. Ustawa z dnia 20 czerwca 1997 r. Prawo o ruchu drogowym.
2. Dziennik Ustaw Nr 238 Załącznik 1 do rozporządzenia Ministra Infrastruktury z dnia 24 października 2005 r. (poz.2010). Definicje kategorii i typów pojazdów dla potrzeb homologacji typu pojazdu.
3. Dziennik Ustaw 1968.27.183 Dział III. Warunki techniczne dopuszczenia przyczep do ruchu na drogach publicznych.
4. Regulamin nr 13-H Europejskiej Komisji Gospodarczej Organizacji Narodów Zjednoczonych – jednolite przepisy dotyczące homologacji samochodów osobowych w zakresie hamowania [2015/2364].
5. Obwieszczenie Ministra Infrastruktury i Budownictwa z dnia 27 października 2016 r. w sprawie ogłoszenia jednolitego tekstu rozporządzenia Ministra Infrastruktury w sprawie warunków technicznych pojazdów oraz zakresu ich niezbędnego wyposażenia. Dz. U. RP, Warszawa, 15.12.2016 r. poz. 2022.

* * *

The influence of an unbraked single-axle trailer on the stopping distance of a two-axle car

Abstract

The article presents the results of simulation calculations of the braking process in a straight-line motion of a set of a two-axle vehicle and a single-axle unbraked trailer. The stopping distance of the set on a horizontal and sloping road surface, dry and wet, was assessed. The longitudinal inclination of the road was changed, as well as the weight of the trailer and the longitudinal and vertical position of its centre of mass. The result of the work is a qualitative and quantitative assessment of the impact (on braking efficiency) of attaching an unbraked single-axle trailer to a two-axle car when going up and down a hill and on a level road surface. The obtained results showed that the additional load of the vehicle itself (without the trailer) had no effect on the length of the stopping distance or on the value of the maximum braking deceleration when the driver could

fully use the traction of the road wheels to the road surface. Attaching an unbraked trailer has the greatest effect on the lightest vehicle. As expected, positive elevation shortens the stopping distance, while negative elevation lengthens it. The length of the stopping distance increases significantly on a wet surface, which is particularly noticeable for negative elevation.

Key words

Braking, stopping distance, towing vehicle, trailer, car with trailer.