

Mikołaj BUSŁOWICZ*

ANALIZA TRÓJELEMENTOWEGO OBWODU MEMRYSTOROWEGO NIECAŁKOWITEGO RZĘDU

W pracy rozpatrzono szeregowy obwód elektryczny niecałkowitego rzędu zawierający supercewkę, superkondensator i układ memrystorowy. Stosując badania teoretyczne oraz symulacyjne, przeprowadzone w środowisku systemu Matlab/Simulink, dokonano analizy wpływu niecałkowitego rzędu równań opisujących rozpatrywany obwód na możliwość wystąpienia drgań chaotycznych.

SŁOWA KLUCZOWE: układ memrystorowy, niecałkowity rząd, drgania chaotyczne

1. WSTĘP

Ostatnio w pracy [11] (patrz też [7, 8]) został zaproponowany prosty szeregowy obwód elektryczny zawierający trzy elementy: cewkę, kondensator i układ memrystorowy, w którym występują drgania chaotyczne. Układ ten w przypadku gdy kondensator jest elementem niecałkowitego rzędu, a związek pomiędzy napięciem występującym na nim i przepływającym przez niego prądem jest opisany zależnością różniczkową niecałkowitego rzędu rozpatrzono w pracy [3].

W niniejszej pracy rozpatrzemy przypadek ogólniejszy, w którym zarówno kondensator jak i cewka są elementami niecałkowitego rzędu. Takie elementy elektryczne były analizowane między innymi w pracach [6, 9, 10]. Zostanie przeprowadzona analiza dynamiki rozpatrywanego obwodu, w tym głównie analiza możliwości wystąpienia drgań chaotycznych. Zostaną też podane wyniki badań symulacyjnych w środowisku systemu Matlab/Simulink z wykorzystaniem Ninteger Fractional Control Toolbox for MatLab [12].

2. WPROWADZENIE I SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

W pracy będziemy rozpatrywać szeregowy obwód elektryczny o schemacie jak na rysunku 1. Obwód ten został zaproponowany w pracy [11] i był analizowany w [7, 8]. Podobnie jak w [11], element oznaczony literą M nie jest dokładnie elementem zdefiniowanym w [4] jako memrystor lecz bardziej ogólnym

* Politechnika Białostocka.

elementem zdefiniowanym w [5] i określonym jako układ memrystorowy. W takim układzie zachodzą zależności

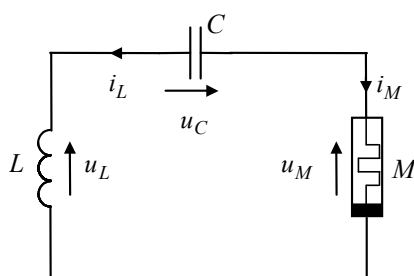
$$u_M(t) = R(z(t))i_M(t), \quad \dot{z}(t) = f(z(t), i_M(t)), \quad (1)$$

gdzie $z(t)$ jest wewnętrznym stanem memrystora zaś $R(z(t))$ jest memrystancją.

Podobnie jak w pracy [11] przyjmujemy, że

$$R(z(t)) = \beta(z^2(t) - 1), \quad f(z(t), i_M(t)) = -\alpha z(t) + i_M(t)(1 - z(t)), \quad (2)$$

przy czym $\alpha = 0.6$, $\beta = 3/2$.



Rys. 1. Rozważany obwód elektryczny

Z zależności (1), (2) i praw Kirchhoffa, przyjmując $L = 3$ i $C = 1$, otrzymamy następujące równanie stanu nieliniowego obwodu pokazanego na rysunku 1 [11]

$$\dot{X}(t) = F(X(t)), \quad (3)$$

gdzie

$$F(X(t)) = \begin{bmatrix} y(t) \\ -(1/3)x(t) + 0,5y(t) - 0,5z^2(t)y(t) \\ -y(t) - 0,6z(t) - y(t)z(t) \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

przy czym zmienna stanu $x(t)$ jest napięciem na kondensatorze, $y(t)$ jest prądem płynącym przez cewkę, $z(t)$ jest wewnętrznym stanem układu memrystorowego.

Układ (3), (4) ma jeden punkt równowagi X_e w początku przestrzeni (x, y, z) zaś liniowe przybliżenie w jego otoczeniu ma postać $\dot{X}(t) = A_e X(t)$, przy czym

$$A_e = \left. \frac{\partial F(X)}{\partial X} \right|_{X_e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -0,6 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Macierz (5) ma wartości własne: $-0,6$ oraz $0,25 \pm j0,52$. Liniowe przybliżenie w otoczeniu punktu równowagi nie jest więc asymptotycznie stabilne.

Chaotyczny atraktor układu (3), (4) wyznaczony za pomocą badań symulacyjnych środowisku systemu Matlab/Simulink jest pokazany w pracy [3].

Układ (3), (4) był też analizowany w pracy [3] w przypadku, gdy kondensator jest elementem niecałkowitego rzędu (superkondensatorem).

Celem niniejszej pracy jest analiza rozpatrywanego obwodu elektrycznego w przypadku, gdy kondensator i cewka są elementami niecałkowitego rzędu. Związki pomiędzy napięciem i prądem na takich elementach [6, 9, 10]:

– na superkondensatorze: $i_C(t) = Cu_C^{(p)}(t)$,

– na supercewce: $u_L(t) = Li_L^{(q)}(t)$,

przy czym będziemy przyjmować, że $p \in (0, 1)$ i $q \in (0, 1)$ oraz

$$f^{(p)}(t) = (d^{(p)} f(t)) / dt^p = \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t \frac{\dot{f}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^p} \quad (6)$$

jest pochodną Caputo rzędu $p \in (0, 1)$ zmiennej $f(t)$, $\dot{f}(t) = df(t)/dt$ zaś $\Gamma(l)$ jest funkcją gamma Eulera.

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Rozpatrywany obwód elektryczny z superkondensatorem ($q=1$ zaś $p \in (0, 1)$) został przeanalizowany w pracy [3]. Dlatego w niniejszej pracy najpierw rozpatrzmy przypadek, w którym $p=1$ zaś $q \in (0, 1)$. W tym przypadku równanie stanu (3) przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y^{(q)}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = F(X(t)), \quad (7)$$

przy czym prawa strona ma postać (4).

Wyznaczając liniowe przybliżenie układu (7) w otoczeniu punktu równowagi (tego samego co układ (3)) otrzymamy

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y^{(p_1)}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = A_e \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Wielomian charakterystyczny układu (8) niecałkowitego rzędu ma postać

$$\det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 1/3 & s^q - 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & s + 0,6 \end{bmatrix} = (s + 0,6)(s^{q+1} - 0,5s + 1/3). \quad (9)$$

Z teorii stabilności liniowych układów ciągłych niecałkowitego rzędu wiadomo, że układ (8) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie zera jego wielomianu charakterystycznego (9) mają ujemne części rzeczywiste [1, 2].

Z (9) wynika, że jedno zero jest rzeczywiste i ujemne zaś pozostałe zera są zerami wielomianu

$$w_1(s) = s^{q+1} - 0,5s + 1/3. \quad (10)$$

Do sprawdzenia, czy wszystkie zera wielomianu (10) mają ujemne części rzeczywiste zastosujemy metodę częstotliwościową podaną w pracach [1, 2] i zastosowaną też w [3].

Niech $w_0(s)$ będzie dowolnym wielomianem odniesienia niecałkowitego stopnia $q+1$, którego wszystkie zera mają ujemne części rzeczywiste. Za $w_0(s)$ możemy wybrać np. wielomian o postaci $w_0(s) = (s+c)^{q+1}$, $c > 0$.

Z prac [1, 2] wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. Układ (8) niecałkowitego rzędu jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wykres funkcji

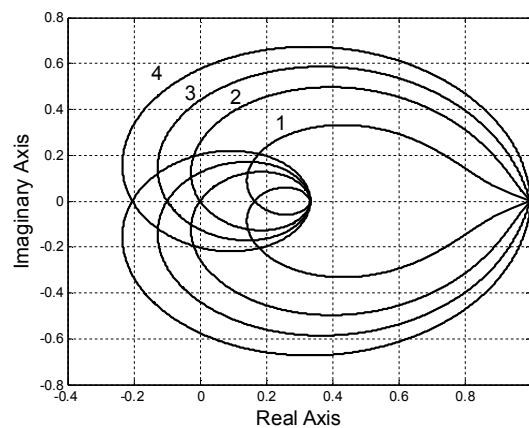
$$\psi(j\omega) = w_1(j\omega) / w_0(j\omega) \quad (11)$$

przy wartościach ω zmieniającym się od $-\infty$ do ∞ nie obejmuje początku płaszczyzny zmiennej zespolonej ani nie przechodzi przez niego.

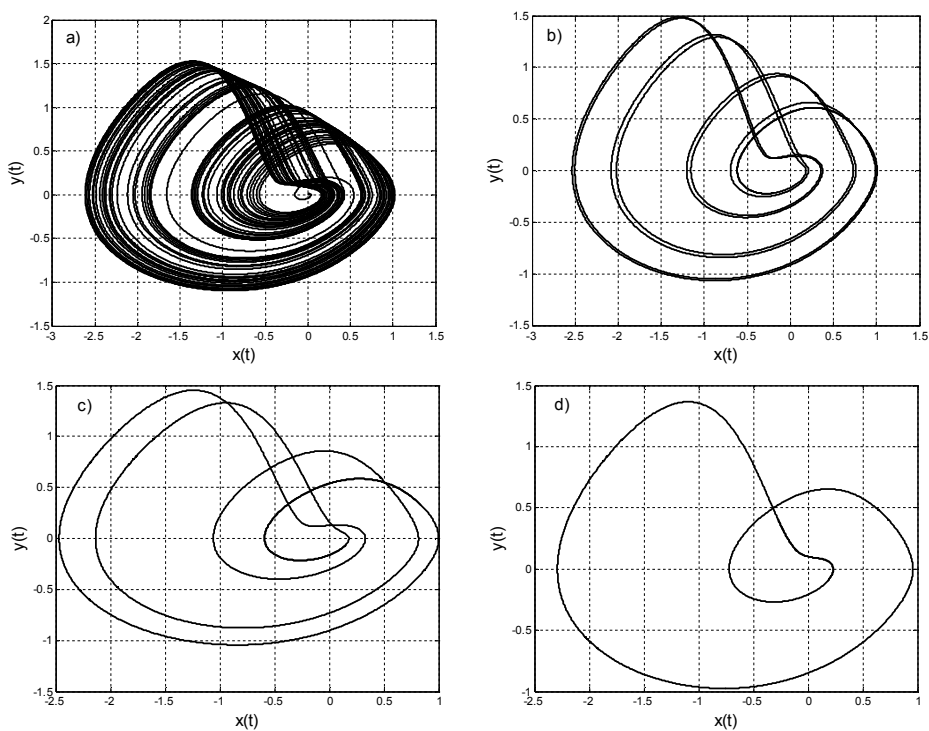
Aby zbadać stabilność układu (8) wyznaczano wykresy funkcji (11) przy $w_0(j\omega) = (j\omega+1)^{q+1}$ dla różnych wartości niecałkowitego rzędu $q \in (0, 1)$. Kilka z nich jest pokazanych na rysunku 2. Wynika z niego, że wykresy obejmują początek układu współrzędnych dla $q \in (0, 539, 1)$, nie obejmują dla $q \in (0, 537)$ zaś dla $q \approx 0, 538$ wykres funkcji (11) przechodzi przez początek układu współrzędnych. Oznacza to, że układ (8) niecałkowitego rzędu jest asymptotycznie stabilny dla $q \in (0, 537)$ i nie jest asymptotycznie stabilny dla dowolnego $q \in (0, 539, 1)$. Dla $q \approx 0, 538$ jest on na granicy stabilności.

Uwzględniając powyższe rozważania oraz niestabilność układu (8) dla $q = 1$ możemy stwierdzić, że punkt równowagi rozpatrywanego obwodu niecałkowitego rzędu nie jest asymptotycznie stabilny dla dowolnego $q \in (0, 539, 1]$. Oznacza to, że w tym obwodzie mogą wystąpić drgania chaotyczne dla $q \in (0, 539, 1]$.

Aby przeanalizować możliwość wystąpienia drgań chaotycznych w rozpatrywanym obwodzie, podobnie jak w pracy [3], przeprowadzono badania symulacyjne w środowisku systemu Matlab/Simulink z wykorzystaniem *Ninteger Fractional Control Toolbox for MatLab* [12]. Przyjmowano wartości niecałkowitego rzędu q malejące od 1 do 0,92 z krokiem 0,1 oraz $q = 0,9$ i analizowano otrzymane przebiegi. Wybrane trajektorie są pokazane na rysunku 3.



Rys. 2. Wykresy funkcji (11) dla kilku wartości parametru q :
 1 – dla $q = 0,3$; 2 – dla $q = 0,538$; 3 – dla $q = 0,7$; 4 – dla $q = 0,9$



Rys. 3. a) Chaotyczny atraktor dla $q = 0,94$ oraz cykle graniczne dla kilku wartości q :
 b) $q = 0,93$; c) $q = 0,92$; d) $q = 0,9$

Z przeprowadzonych badań i z rysunku 3 wynika, że w układzie (8) drgania chaotyczne występują dla $q \in [0,94, 1]$. Natomiast dla wszystkich wartości q malejących od 0,93 do granicy stabilności $q \approx 0,538$ występuje cykl graniczny.

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy zarówno cewka jak i kondensator są elementami niecałkowitego rzędu. W takim przypadku równanie stanu (3) przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} x^{(p)}(t) \\ y^{(q)}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = F(X(t)), \quad (12)$$

przy czym prawa strona ma postać (4). Układ (12) ma ten sam punkt równowagi co układ (3), a więc początek układu współrzędnych.

Wielomian charakterystyczny układu (12) niecałkowitego rzędu ma postać

$$\det \begin{bmatrix} s^p & -1 & 0 \\ 1/3 & s^q - 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & s + 0,6 \end{bmatrix} = (s + 0,6)(s^{p+q} - 0,5s^p + 1/3). \quad (13)$$

Biorąc pod uwagę fakt, że w przypadku supercewki drania chaotyczne występują dla $q \in [0,94, 1]$, w dalszych rozważaniach przyjmiemy $q = 0,97$. Przy takim założeniu o stabilności układu decydują miejsca zerowe wielomianu niecałkowitego stopnia

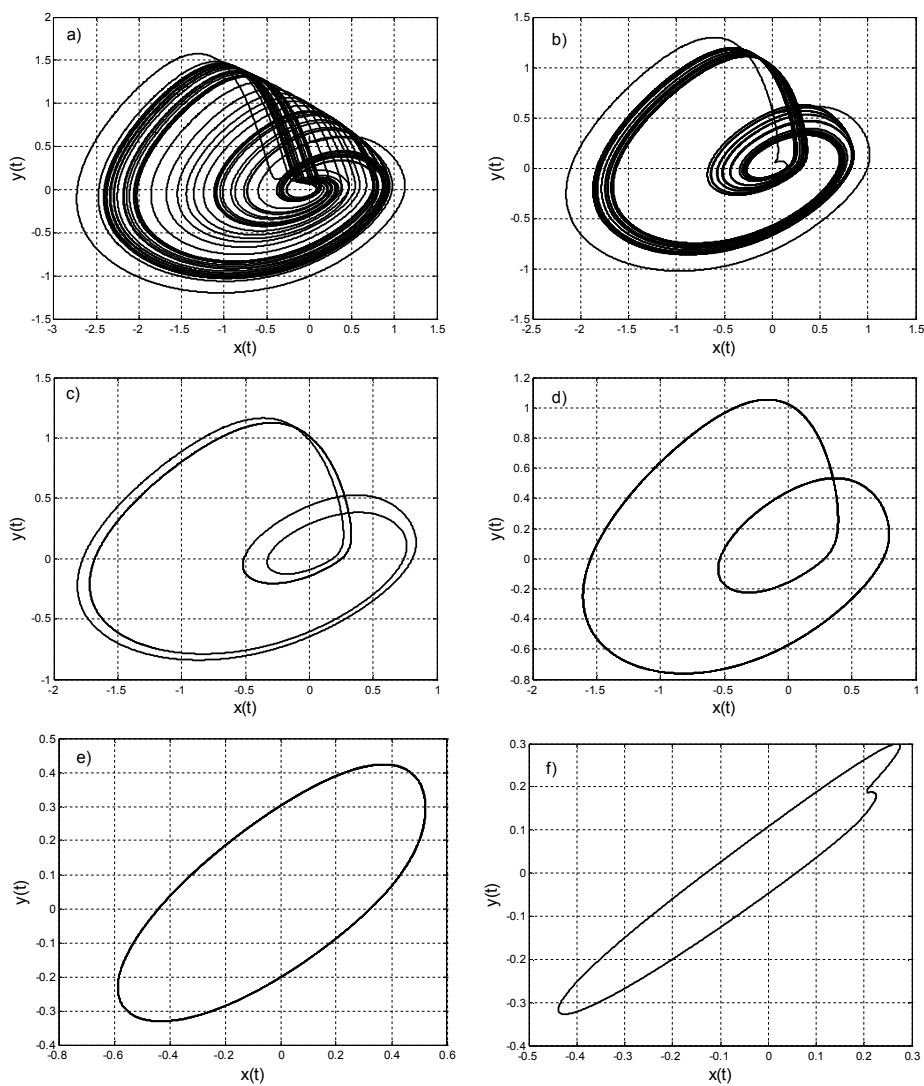
$$w_2(s) = s^{0,97+p} - 0,5s^p + 1/3. \quad (14)$$

Postępując podobnie jak w przypadku wielomianu (10) możemy sprawdzić, że wielomian (14) ma zera o nieujemnej części rzeczywistej dla każdego $p \in (0, 1]$. Oznacza to, że punkt równowagi jest niestabilny i rozpatrywany obwód elektryczny przy $q = 0,97$ może być chaotyczny dla dowolnego $p \in (0, 1]$.

Aby przeanalizować możliwość wystąpienia drgań chaotycznych przeprowadzono badania symulacyjne. Przyjmowano $q = 0,97$ i wartości niecałkowitego rzędu p malejące od 1 do 0,1 i analizowano otrzymane przebiegi. Wybrane trajektorie są pokazane na rysunku 4.

We wszystkich przebiegach przyjmowano te same warunki początkowe $x(0) = 0,001$, $y(0) = 0,1$; $z(0) = -0,01$.

Z przeprowadzonych badań wynika, że w układzie (12) przy $q = 0,97$ drgania chaotyczne występują dla wszystkich $p \in [1, 0,85]$. Natomiast dla wszystkich wartości p mniejszych lub równych 0,84 w układzie występuje cykl graniczny.



Rys. 4. Chaotyczne atraktory układu (12) dla $q = 0,97$ i wartości $p = 0,95$ (rys. a)) i $p = 0,85$ (rys. b)) oraz cykle graniczne dla $p = 0,84$ (rys. c)), $p = 0,8$ (rys. d)), $p = 0,5$ (rys. e)) i $p = 0,1$ (rys. f))

Praca naukowa finansowana ze środków pracy statutowej Katedry Automatyki i Elektroniki nr S/WE/1/11.

LITERATURA

- [1] Busłowicz, M., Stability of State-Space Models of Linear Continuous-Time Fractional Order Systems, *Acta Mechanica et Automatica*, Volume 5, Number 2, 15-22, 2011.
- [2] Busłowicz, M., Stability Analysis of Continuous-Time Linear Systems Consisting of n Subsystems with Different Fractional Orders, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences*, Volume 60, Number 2, 279-284, 2012.
- [3] Busłowicz, M., Analiza Dynamiki Prostego Obwodu Elektrycznego Niecałkowitego Rzędu z Memrystorem, *Poznań University of Technology Academic Journals, Electrical Engineering*, Number 73, 35-42, 2013.
- [4] Chua, L.O., Memristor-The Missing Circuit Element, *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Volume 18, Number 5, 507-519, 1971.
- [5] Chua, L.O., Kang, S.M., Memristive Devices and Systems, *Proc. The IEEE*, Volume 64, 209-223, 1976.
- [6] Dzieliński A., Sarwas G., Sierociuk D., Comparison and validation of integer and fractional order ultracapacitor models, *Advances in Differential Equations*, 1-15, 2011:11, doi:10.1186/1687-1847-2011-11.
- [7] Ginoux J., Letellier C., Chua, L.O., Topological Analysis of Chaotic Solution of a Three-Element Memristive Circuit, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, Volume 20, Number 11, 3819-3827, 2010.
- [8] Hrubos Z., Synthesis of Memristor-Based Chaotic Circuit, *Proc. of the 35th Intern. Conf. on Telecommunications and Signal Processing TSP*, Prague, 416-420, 2012.
- [9] Kaczorek T., Analysis of Fractional Electrical Circuits in Transient States, *Mat. VII Konf. Nauk.-Tech. Logistyka, Systemy Transportowe, Bezpieczeństwo w Transporcie*, Szczyrk, 1695-1704, 2010.
- [10] Kaczorek T., Singular Fractional Linear Systems and Electrical Circuits, *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, Volume 21, Number 2, 379-384, 2011.
- [11] Muthuswamy B., Chua L.O., Simplest Chaotic Circuit, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, Volume 20, Number 5, 1567-1580, 2010.
- [12] Valério D., Ninteger v. 2.3 - Fractional Control Toolbox for MatLab, User and programmer manual, Technical University of Lisbona, Lisbona 2005.

ANALYSIS OF THREE-ELEMENT MEMRISTIVE CIRCUIT OF FRACTIONAL ORDER

The paper considers the electrical circuit of fractional order which has only three elements in series: supercapacitor, supercoil and memristor. Using theoretical analysis and numerical simulations effects of fractional orders on chaotic behavior of the circuit is investigated. Simulations are performed using Ninteger Fractional Control Toolbox for MatLab.