

## **Maciej Romaniuk**

Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk,  
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa, Polska

i

Katolicki Uniwersytet Lubelski Jana Pawła II  
ul. Konstantynów 1 H, 20-708 Lublin, Polska

e-mail: [mroman@ibspan.waw.pl](mailto:mroman@ibspan.waw.pl)

### **O symulowaniu kosztów utrzymania dla systemu dystrybucji wody o parametrach rozmytych**

**Streszczenie:** *W niniejszym artykule przedstawiono model obliczający koszty utrzymania i konserwacji dla systemu dystrybucji wody (WDS). Zbiór możliwych stanów każdego połączenia (tzn. odcinku rurociągu w WDS) jest zdefiniowany przez różne poziomy jakości rury oraz występujące typy uszkodzeń. Proces przejść pomiędzy tymi stanami jest opisany procesem semi-Markowa. Wykorzystując symulacje Monte Carlo, uzyskano długości okresów obsługi oraz momenty niezbędnych wymian i napraw. Wartości te są następnie wykorzystywane do estymowania kosztów utrzymania całego WDS. W kroku tym brana jest pod uwagę wartość pieniądza w czasie. W przeciwieństwie do innych podejść, zamiast stałej stopy procentowej, założono stochastyczny proces stopy (dany jednowymiarowym modelem Vasicka). Następnie na podstawie przeprowadzonych symulacji wykonano analizę opartą o różne miary niezawodności i obliczone koszty obsługi, np. zbadano wpływ parametrów połączenia (takich jak intensywność uszkodzeń) na ostateczne koszty konserwacji. Analizy tego typu mogą pełnić istotną rolę w ocenie ryzyka dla różnych możliwych do podjęcia decyzji. Poza podejściem typu crisp, zastosowano również symulacje Monte Carlo gdy niektóre z parametrów WDS zostały określone w sposób rozmyty. Dzięki temu można wykorzystać niepewność oraz wiedzę ekspercką w proponowanej metodzie estymacji kosztów obsługi. Zwrócono uwagę na różnice występujące pomiędzy podejściem crisp i rozmytym. Zostały również opisane niezbędne dla obydwu podejść odpowiednie algorytmy symulacyjne.*

**Słowa kluczowe:** *system dystrybucji wody, koszty konserwacji, proces semi-Markowa, symulacje Monte Carlo, wartość obecna*

## **1. Wprowadzenie**

Głównym celem każdego systemu dystrybucji wody (WDS – w j. ang. water distribution system) jest dostarczenie wody o odpowiedniej jakości i w założonej ilości do konsumentów. W celu spełnienia tego celu niezbędne jest wykonywanie odpowiednich

czynności serwisowych, takich jak reperowanie i wymiana uszkodzonych lub nie działających elementów.

Literatura poświęcona problemowi symulowania zachowania się systemów WDS jest bardzo obszerna (opis rozmaitych podejść znaleźć można np. [3, 4, 7, 10, 11, 15, 17, 19, 25, 29], a w [16, 28] podany jest dokładniejszy przegląd wykorzystywanych metod i piśmiennictwa na ten temat). Ze względu na długi horyzont planowania (np. 20 lub nawet 50 lat), niezbędne jest branie pod uwagę wartości pieniądza w czasie dla kosztów obsługi serwisowej. Ten aspekt jest również często obecny w literaturze.

Przykładowo, w [20], głównym celem jest estymacja i sprawdzenie poprawności różnych funkcji kosztu dla rozmaitych WDS, gdy ich hydrauliczne (np. przepływ, moc pompy) i fizyczne właściwości (np. objętość, użyty materiał, przekrój) są zapisane w specjalnie przygotowanej bazie danych. Metoda liniowej regresji jest następnie użyta do modelowania zależności pomiędzy różnymi rodzajami kosztu (jak koszt wyposażenia) i wspomnianymi charakterystykami rury (jak przekrój) dla kilku WDS w Portugalii. Niestety, metoda obliczania wartości obecnej całkowitych kosztów nie jest zbyt mocno rozwinięta w owym artykule.

W przeciwieństwie do poprzednio wspomnianego podejścia, w [12] rozwinięto metodę, którą można by nazwać „mikrozarządzaniem”. Przedstawiony został tam problem odnowy WDS dla wyjątkowo długiego horyzontu czasowego. Przeanalizowano w nim aspekty ekonomiczne oraz pojemności hydraulicznej WDS, gdy proces pogarszania się jakości rury spełnia równanie Hazena-Williamsa. Całkowite koszty są przy tym związane z odnową rurociągu i pewnymi dodatkowymi kosztami obsługi (głównie kosztami naprawy uszkodzenia rury). Aby modelować intensywność uszkodzeń, założono wykładniczą zależność od wieku rury. Wartość obecna całkowitych kosztów jest obliczana z wykorzystaniem stałej stopy dyskontowej. Głównym celem zaprezentowanego podejścia jest minimalizacja kosztów związanych z odnowieniem systemu, o ile pewne hydrauliczne wartości brzegowe (takie jak jakość i ilość dostarczanej wody) zostaną zachowane. Jak wspomniano w tym artykule, standardowym horyzontem czasowym dla takiej analizy jest 30-60 lat.

Istnieją również bardziej specjalistyczne podejścia do problemu estymacji kosztów. Przykładowo, w [25] również przedstawiono procedurę optymalizacyjną dla problemu minimalizacji kosztów. W tym przypadku autorzy wyrazili koszty całkowite odnowy, ryzyka i niedostępności WDS jako jedną funkcję zależną od czasu. Następnie równanie kosztu jest minimalizowane z wykorzystaniem obserwacji, że grupy rur mogą być naprawiane łącznie, jeśli tylko koszty takiego grupowania są zbilansowane z kosztami odsunięcia ich naprawy w czasie. Specjalny „algorytm zachłanny” jest użyty w celu znalezienia minimum dla takiej optymalizacji. Następnie owa metoda numeryczna jest użyta dla WDS w norweskiej gminie średniej wielkości. Autorzy donoszą o wysokiej wartości potencjalnych oszczędności, jeśli ich metoda grupowania zostanie wykorzystana.

Poza planowaniem kalendarza napraw, estymacja kosztów ma wpływ również na inne typy decyzji, również te dotyczące fizycznych właściwości rur. W [21] analizowane są koszty związane z prostym WDS dla okresu 50 lat. Przedstawione są dwa rodzaje scenariuszy (z wymianą i bez wymiany), dla których zastosowano procedurę minimalizacji wykorzystującą koszty instalacji i napraw oraz tzw. mnożnik kosztów szkód i niedogodności (które są powiązane ze szkodami i innymi niedogodnościami wynikającymi z uszkodzeń). W tym przypadku do rozwiązania problemu został użyty algorytm genetyczny. Pozwoliło to na wyciągnięcie praktycznych wniosków dotyczących przekroju rur oraz ich wieku, gdy powinny być wymienione zamiast przyprowadzania ich dalszej naprawy. Ponownie autorzy podkreślają możliwe oszczędności wynikające z zastosowania odpowiedniej analizy problemu.

Autorzy [3] również koncentrują się na fizycznych właściwościach rurociągu. Dla rozmaitych rodzajów materiału wprowadzone zostają różne modele częstości szkód, bazujące na funkcji wykładniczej. Podejście to prowadzi do odmiennych funkcji kosztów dla których zostały uwzględnione koszty i możliwe korzyści wynikające z różnych technologii inspekcji. Trzeba jednak podkreślić, że w artykule tym rozpatrywana jest jedynie wartości nominalna pieniądza.

W przypadku niektórych artykułów, czas niezbędny przy dokonywaniu naprawy jest całkowicie pomijany. Założenie takie może być przyjęte nawet w praktycznych aplikacjach (np. w [28] została przeprowadzona stosowna dyskusja tego założenia), ale wielu autorów wykorzystuje zmienną losową, aby modelować czas naprawy. Przykładowo, w [11] użyty jest uogólniony rozkład wykładniczy. Autorzy opisują również rozmaite typy kosztów związane z naprawami, jak np. koszty samego serwisu, dodatkowej energii (wymaganej w celu zaspokojenia potrzeb ludności), koszty strat wody i dochodów (które mają miejsce, gdy wymagania dotyczące wody nie są w pełni spełnione).

Zupełnie inna skala problemu kosztów (którą można by określić jako „mikrozarządzanie”) jest rozpatrywana w [1]. Autorzy, wykorzystując system USACREL condition index (CI), optymalizują czas eksploatacji dla instalacji wodno-kanalizacyjnej pojedynczego budynku – Esteghlal Hotel w Iranie. Koszty reperowania opisane są wirtualną zmienną powiązaną z indeksem kondycji danego elementu, a koszty wymiany związane są z fizycznymi właściwościami rury. W celu optymalizacji kosztów wykorzystana jest metoda „saving to investment”. Pozwoliło to autorom na analizę kosztów zarządzania eksploatacją i sformułowanie praktycznych wniosków dotyczących momentu, kiedy cała instalacja w budynku powinna zostać wymieniona zamiast kontynuowania dalszej jej eksploatacji i przeprowadzania kolejnych napraw.

Stosowane są również inne podejścia do funkcji kosztów. W [32] rozpatrywana jest niezawodność filtrów piaskowych, jako elementu całego WDS. Dla funkcji kosztów wybrano model Life Cycle Costing. Poza różnymi źródłami płatności (podczas etapu konstrukcji, fazy eksploatacji i wreszcie usuwania elementu), brane pod uwagę są również inne ważne czynniki: economical operational readiness rate, target operational readiness rate, critical operational readiness rate. Razem tworzą one całą koncepcję analizy ryzyka związanego z możliwymi kosztami.

Jak zostało to przedstawione na przykładzie wspomnianych artykułów, problem analizy i estymacji kosztów jest bardzo istotny podczas konstrukcji oraz późniejszej eksploatacji WDS. Podejścia do tego problemu są bardzo różnorodne, począwszy od formuły funkcji kosztów (która może zależeć od fizycznych właściwości rury, czasu naprawy itd.), poprzez skalę WDS (pojedynczy budynek lub cały system), rozpatrywane elementy WDS (rury, filtry, ujścia itd.), aż po zakres rozpatrywanej analizy (która może obejmować pewne dodatkowe kroki optymalizacyjne, obliczenie miar statystycznych itp.) itd. Możemy jednak wskazać pewne elementy bardzo często występujące w wymienionych artykułach. Po pierwsze, zazwyczaj rozpatrywany jest długi okres, nawet 50-60 lat. Po drugie, stosowany jest algorytm numeryczny, który generuje możliwe momenty pojawienia się uszkodzeń, zróżnicowane wielkości kosztów itd. Po trzecie, algorytm ten jest związany z pewnym losowym procesem, który zakłada się dla zaproponowanego modelu. Po czwarte, ponieważ wykorzystywany jest długi przedział czasowy, zazwyczaj brana jest pod uwagę wartość pieniądza w czasie.

Podejście to (tzn. wprowadzenie zależności pomiędzy czasem i wartością przepływów pieniężnych) jest szeroko stosowane w matematyce finansowej, wiemy bowiem, że jedna jednostka pieniężna, płatna teraz, ma inną wartość niż ta sama jednostka płatna w przyszłości. Dlatego też również zastosujemy to podejście i będziemy analizować estymowaną wartość obecną (czyli wartość pieniądza w chwili terażniejszej) przyszłych kosztów eksploatacji. Koszty eksploatacji są jednym z ważniejszych czynników wyboru decyzji z możliwego zbioru

decyzyjnego, jeśli bierzemy pod uwagę ryzyko finansowe. Niestety, w wielu artykułach czynnik dyskontujący jest mało istotnym, nieomal pomijalnym parametrem w omawianym tam modelu symulacyjnym. Zazwyczaj odpowiednia stopa procentowa wyrażona jest jako stały parametr w czasie. W naszych rozważaniach stochastyczny model stopy procentowej jest bezpośrednio wbudowany w procedurę symulacji Monte Carlo, stanowiąc istotny czynnik analizy niezawodności. Stopa ta jest dana jednowymiarowym modelem Vasicka. Dzięki temu stopa ta może być lepiej dopasowana do danych rzeczywistych (np. poprzez estymację na gruncie statystycznym), szczególnie jeśli rozpatrujemy długi przedział czasowy. Ponadto inne, bardziej skomplikowane modele stopy procentowej mogą być bezpośrednio zastosowane dla ogólnego podejścia omówionego w poniższym artykule. Zgodnie z najlepszą wiedzą autora, w innych artykułach dotyczących analizy WDS nie został wykorzystany stochastyczny model stopy procentowej. Co więcej, poprzez zastosowanie metod Monte Carlo zostanie pokazane, że pojawiają się istotne różnice w estymowanym wyniku, jeśli zamiast modelu stochastycznego wykorzystamy bardziej klasyczne podejście (jak stała stopa procentowa). Oznacza to, że jeśli zignorujemy stochastyczną naturę stopy procentowej (która oczywiście nie może być stała w czasie), to analiza kosztów będzie obciążona istotnym błędem.

Co więcej, w wielu artykułach jest rozpatrywane tylko jedno źródło niepewności, tzn. pewien proces losowy opisuje zachowanie się WDS, np. występowanie momentów uszkodzeń. Istnieją jednak inne źródła niepewności, które można powiązać z zagadnieniem wprowadzenia wiedzy eksperckiej. W związku z tym, w rozpatrywanym dalej modelu parametry są opisane z użyciem liczb rozmytych. Oznacza to, że nie są one zupełnie precyzyjne (tzn. typu „crisp”), ale, w pewien sposób, niepewne („blisko do / około”). Podejście to jest bliskie zastosowaniom praktycznym, ponieważ np. bezwarunkowy czas wymiany rury ma raczej postać „około 5 lat” niż „zawsze i dokładnie 5 lat i ani dnia lub miesiąca więcej / mniej”.

W poniższym artykule koszty eksploatacji są związane ze zbiorem możliwych stanów pojedynczego połączenia. Stany te odzwierciedlają różne stopnie jakości i degradacji rury oraz jej aktualne zachowanie (tzn. czy połączenie działa). Będziemy zakładać, że losowe przejścia pomiędzy stanami pojedynczego połączenia będą opisane procesem semi-Markowa. Na przejścia te wpływać będzie również deterministyczny, bezwarunkowy czas wymiany, który może być elementem procesu eksploatacji.

Połączenia w WDS można grupować według ich rodzajów, zależnych od różnych własności technicznych (jak jakość, rozmiar itp.), co prowadzi do ich odmiennych parametrów statystycznych i niezawodnościowych. Następnie wartość obecna przyszłych kosztów eksploatacji jest estymowana na podstawie metody Monte Carlo dla całego WDS z podziałem na wspomniane grupy. Poza estymatorem wartości obecnej możliwe jest uzyskanie innych statystycznych miar dla napraw i wymian, jak również ich kosztów, bezpośrednio z użyciem owych symulacji. Miary te mogą być istotnym wkładem do analizy eksploatacji WDS.

Niniejszy artykuł można rozpatrywać jako istotny krok w uogólnieniu podejścia zaproponowanego w [26]. Wkład ten można rozpatrywać w czterech dziedzinach. Po pierwsze, jak wcześniej wspomniano, zamiast stałej stopy procentowej, stopa ta modelowana jest z użyciem procesu stochastycznego. Symulacje Monte Carlo trajektorii tego procesu są bezpośrednio powiązane z procedurą generowania kosztów obsługi WDS. Model stochastyczny umożliwia lepsze dopasowanie stopy procentowej do prawdziwych danych oraz minimalizację błędu, który popełniamy przy założeniu jej stałości. Prawidłowa estymacja przyszłych kosztów eksploatacji jest bardzo ważna dla praktyków. Po drugie, zamiast klasycznego łańcucha Markowa o dyskretnej przestrzeni stanów, zaproponowano proces semi-Markowa do opisu przejść pomiędzy stanami z uwzględnieniem

deterministycznego, bezwarunkowego czasu wymiany. Umożliwia to użycie innych rozkładów prawdopodobieństwa, a nie tylko rozkładu wykładniczego. Po trzecie, proponowany model został wzbogacony poprzez wykorzystanie fuzyfikacji (rozmycia) niektórych parametrów połączeń w WDS, jak koszty obsługi i intensywność przejść. Fuzyfikacja odzwierciedla niepewność widoczną w danych rzeczywistych, którą można wyeliminować z użyciem wiedzy eksperckiej. Ponadto pozwala nam to, przynajmniej w pewnym stopniu, na mierzenie „błędu” wynikającego z użycia nieprecyzyjnych parametrów, gdyż uzyskany wynik jest również liczbą rozmytą. Jest to szczególnie ważne dla analizy eksploatacyjnej, ponieważ umożliwia nam lepszą estymację przyszłych, niepewnych kosztów. Po czwarte, oprócz przykładów wykorzystania metod Monte Carlo dla przypadków „crisp”, przedstawione zostały stosowne przykłady dla trójkątnych liczb rozmytych. Należy również wspomnieć, że inne typy liczb rozmytych, takie jak liczby L-R, mogą być bezpośrednio zastosowane w rozważanej w tym artykule metodologii.

Struktura niniejszego artykułu jest następująca: w rozdziale 2 zaproponowano model WDS. Omówiony został tam zbiór możliwych stanów połączenia, model kosztów eksploatacji powiązany z naprawami i wymianami oraz jednowymiarowy model Vasicka. W rozdziale 3 użyto symulacji Monte Carlo do generowania zachowania się WDS, jeśli wszystkie parametry są dane w sposób dokładny („crisp”). Poza przedstawieniem stosownych algorytmów, omówiono przykłady dla różnych zestawów danych. Rozdział 4 jest poświęcony zagadnieniu rozmycia parametrów modelu. Najpierw wprowadzone zostały pewne podstawowe pojęcia i oznaczenia. Następnie, bazując na metodach Monte Carlo, przedstawione zostały różne przykłady uzyskanych wyników dla parametrów rozmytych.

## 2. Model WDS

Załóżmy, że rozważany WDS jest opisany pewnym grafem  $G$ . W grafie tym każde połączenie (tzn. rura będąca elementem WDS) reprezentowana jest jako krawędź, zaś możliwe źródła lub ujęcia są oznaczone jako wierzchołki. W praktyce możliwe są różne typy takich wierzchołków (dokładniejszą dyskusję znaleźć można w [18]).

### 2.1. Stany połączenia

W dalszej części artykułu skupimy się jedynie na krawędziach grafu  $G$ , tzn. połączeniach rozważanego WDS. Załóżmy, że stan każdego połączenia dla danej chwili  $t$  opisany jest jednym z możliwych stanów ze zbioru  $S = \{0,1,2,3,4\}$ . Te numerowane stany odpowiadają różnym poziomom jakości rury (która zależy od stopnia jej degradacji oraz prawdopodobieństwa uszkodzenia) i jej aktualnemu zachowaniu (tzn. czy dane połączenie działa, czy nie). W ten sposób otrzymujemy:

- **Stan 0** Rozważany element WDS jest w *trakcie wymiany*, ponieważ jest całkowicie zepsuty i nie działa.
- **Stan 1** Element jest w *trakcie naprawy*, ponieważ uległ chwilowemu uszkodzeniu i nie może być wykorzystywany.
- **Stan 2** Połączenie działa i jest w stanie *burn-in phase*, gdy pewne początkowe uszkodzenia są możliwe wkrótce po zainstalowaniu tego połączenia (jako całkowicie nowego elementu).
- **Stan 3** Połączenie działa i jest w stanie *normal operations state (standard state)*, gdyż okres początkowych uszkodzeń się już skończył.
- **Stan 4** Element działa, ale osiągnął stan *wear-out period (po standard state)*, co oznacza, że uszkodzenia są możliwe z większym prawdopodobieństwem w wyniku postępującej degradacji połączenia.

Niektóre z wyżej wspomnianych stanów (burn-in, normal operations i wear-out phases) są dokładniej opisane w [4]. Jakość rury może być opisana również z wykorzystaniem innych metod, patrz np. [7, 17, 25, 28, 29]. Niemniej jednak zaprezentowane tutaj podejście jest bardziej elastyczne, ponieważ pozwala na wprowadzenie więcej niż pięciu rozważanych stanów. W związku z tym, jakość połączenia może być modelowana w bardziej złożony sposób, jeśli jest to potrzebne z jakichś praktycznych powodów. Co więcej, parametry dla każdego ze stanów mogą być estymowane zupełnie niezależnie od siebie.

Naszym głównym celem jest analiza stanu  $j$ -tego połączenia w chwili  $t$ , czyli *procesu stanu połączenia*  $S^{(j)}(t)$ . Z wcześniejszych założeń wynika, że  $S^{(j)}(t) \in \{0,1,2,3,4\}$ , tzn. dla dowolnej chwili  $t$  stan  $j$ -tego połączenia jest opisany przez jeden ze stanów ze zbioru  $S$ .

Stąd  $S^{(j)}(0)$  jest *stanem startowym* dla  $j$ -tego połączenia, tzn. jest to stan rury w momencie inicjalizacji całego algorytmu (lub odpowiednio procedury estymacji). Zachowanie się procesu  $S^{(j)}(t)$  dla ustalonego  $j$  jest opisane losowymi ciągami  $L_1^{(j)}, L_2^{(j)}, \dots$  i  $S_1^{(j)}, S_2^{(j)}, \dots$ . Zmienne w pierwszym ciągu odpowiadają odstępom czasowym pomiędzy momentami, gdy  $j$ -te połączenie osiąga pewien stan, a potem go opuszcza w celu przejścia do innego stanu. Drugi ciąg opisuje kolejne stany, jakie są osiągnięte przez  $j$ -te połączenie w chwilach  $L_1^{(j)}, L_1^{(j)} + L_2^{(j)}, \dots$

Zakładając będziemy, że proces  $(S_i^{(j)}, L_1^{(j)} + \dots + L_i^{(j)})_i$  jest procesem odnowy Markowa.

Stąd, bezpośrednio

$$N^{(j)}(t) = \max_n \{L_1^{(j)} + \dots + L_n^{(j)} \leq t\}$$

jest markowowskim procesem liczącym (tzn. procesem określającym ilość przejść pomiędzy stanami), a  $S^{(j)}(t) = S_{N^{(j)}(t)}^{(j)}$  jest procesem semi-Markowa.

Co więcej, zakładając będziemy, że dla każdego  $i, j$  procesy  $S^{(i)}(t)$  i  $S^{(j)}(t)$  są niezależne od siebie w sensie probabilistycznym. Z praktycznego punktu widzenia oznacza to, że nie ma żadnego „przepływu informacji” pomiędzy połączeniami, a stan jednego połączenia nie zależy od innego elementu.

Jeśli dla ustalonego  $j$  ciąg  $L_1^{(j)}, L_2^{(j)}, \dots$  jest ciągiem zmiennych *iid* z rozkładu wykładniczego, to proces  $S^{(j)}(t)$  redukuje się do łańcucha Markowa z ciągłym czasem  $t$  i o dyskretnej, skończonej przestrzeni stanów  $S$  (patrz np. [22]). Jednak ze względu na kolejne założenia i wprowadzanie podejścia rozmytego, tego typu uproszczenie nie jest możliwe do zastosowania w niniejszym artykule.

Niech  $R^{(j)}$  będzie deterministycznym i bezwarunkowym czasem wymiany (tzw. planowanej wymiany). Oznacza to, że jeśli długość okresu od ostatniej wymiany połączenia  $j$  przekroczy  $R^{(j)}$ , to połączenie to jest zawsze wymieniane, niezależnie od wcześniejszej jego historii stanów (patrz również [19]). Matematycznie rzecz biorąc, obliczamy

$$R_*^{(j)} = \max_{0 \leq t_1 \leq t_2} \{t_2 - t_1 : S^{(j)}(t_1) = 0, S^{(j)}(t) \neq 0 \text{ for } t \in (t_1, t_2)\} \quad (1)$$

i jeśli  $R_*^{(j)} \geq R^{(j)}$ , to proces  $S^{(j)}(t)$  od razu zmienia swoją wartość na stan 0 (czyli w trakcie wymiany).

Jak łatwo zauważyć, jeśli deterministyczne przejścia dane przez  $R^{(j)}$  nie są brane pod uwagę, to zachowanie się procesu  $S^{(j)}(t)$  jest w pełni opisane przez proces odnowy Markowa  $(S_i^{(j)}, L_1^{(j)} + \dots + L_i^{(j)})$ . W celu wykonania symulacji, prawdopodobieństwa przejścia

$$Q_{kl}^{(j)}(t) = Pr(S_{n+1}^{(j)}(t) = l, L_{n+1}^{(j)} \leq t | S_n^{(j)}(t) = k), \quad (2)$$

tzn. rozkłady czasu  $t$  przejścia ze stanu  $k$  do stanu  $l$  dla każdego połączenia  $j$ , muszą być odpowiednio ustalone. W dalszej części artykułu założymy, że

$$Q_{kl}^{(j)} = \min_{l \in S} \{X_{kl}^{(j)}\}, \quad (3)$$

gdzie  $X_{k0}^{(j)}, \dots, X_{k4}^{(j)}$  są niezależnymi zmiennymi losowymi, a każde  $X_{kl}^{(j)}$  jest dane rozkładem wykładniczym z parametrem  $\lambda_{kl}^{(j)}$ , czyli  $X_{kl} \sim \text{Exp}(\lambda_{kl}^{(j)})$ . Oznacza to, że rozkład  $Q_{kl}^{(j)}$  jest określony jako minimum losowych czasów przejść ze stanu  $k$  do dowolnego innego stanu. W przypadku rozkładu wykładniczego, wzór (3) jest zgodny z klasycznym podejściem, czyli wcześniej wspomnianym łańcuchem Markowa. Jednak w praktycznych zastosowaniach można zastosować inne rodzaje rozkładów prawdopodobieństwa do modelowania zmiennych  $X_{k0}^{(j)}, \dots, X_{k4}^{(j)}$ , jak np. rozkład lognormalny. Co więcej, wzór (3) prowadzi bezpośrednio do symulacyjnej metody generowania przejść pomiędzy stanami w przypadku rozmytym, opisaną w rozdziale 4.

Jeśli ograniczymy się tylko do rozkładów wykładniczych dla  $\{X_{kl}^{(j)}\}_{k,l \in S}$ , to dla ustalonego połączenia  $j$  otrzymujemy *macierz intensywności*

$$\Lambda^{(j)} = \left( \lambda_{kl}^{(j)} \right)_{k,l \in S}.$$

W praktyce wartości  $\Lambda^{(j)}$  powinny być estymowane na podstawie rzeczywistych obserwacji. W celu wykonania odpowiednich obliczeń, zauważmy, że oczekiwany czas pozostawania w stanie  $k$  jest określony przez

$$\tau_k^{(j)} = \frac{1}{\sum_{l \neq k} \lambda_{kl}^{(j)}} \quad (4)$$

zaś prawdopodobieństwo przejścia w jednym kroku pomiędzy stanami  $k$  i  $l$  jest równe

$$Pr_{kl}^{(j)} = Q_{kl}^{(j)}(\infty) = \frac{\lambda_{kl}^{(j)}}{\sum_{m \neq k} \lambda_{km}^{(j)}}. \quad (5)$$

Następnie, wykorzystując układ równań bazujących na (4) i (5) dla wszystkich możliwych stanów, możemy ustalić wartości macierzy przejścia dla konkretnego obserwowanego przypadku. Przykładowo,  $\tau_1^{(j)}$  jest średnim czasem wykonywania reperacji,  $\tau_2^{(j)}$  jest średnim czasem, gdy połączenie jest w stanie burn-in, zaś  $Pr_{12}^{(j)}$  jest prawdopodobieństwem, że po wykonaniu naprawy rura może być traktowana jakby była następnie w stanie burn-in. Oczywiście, takie obliczenia mogą wymagać dodatkowej eksperckiej wiedzy (np. dotyczącej średniego czasu pozostawania w stanie burn-in). Niemniej jednak wymaganie to bezpośrednio łączy się z ideą wprowadzenia podejścia rozmytego, omawianą w rozdziale 4.

Jeśli zamiast rozkładów wykładniczych wykorzystamy inne rozkłady prawdopodobieństwa, to możliwe jest użycie równań podobnych do (4) i (5). Mamy bowiem (patrz np. [13])

$$\tau_k^{(j)} = \int_0^\infty \prod_{l \neq k} \left( 1 - F_{kl}^{(j)}(t) \right) dt,$$

gdzie  $F_{kl}^{(j)}(t)$  jest dystrybuantą czasu spędzonego w stanie  $k$ , związanego z przejściem z  $k$  do  $l$ , zaś

$$Q_{kl}^{(j)}(t) = \int_0^t \prod_{m \neq k} \left( 1 - F_{km}^{(j)}(x) \right) dF_{kl}^{(j)}(x)$$

jest odpowiednim elementem macierzy przejść. Powyższe całki mogą nie mieć postaci analitycznej dla bardziej skomplikowanych rozkładów, ale nadal jest możliwa kalibracja

niezbędnych parametrów dla założonych gęstości, nawet w praktycznych zastosowaniach (dokładniejszą dyskusję i przykłady znaleźć można np. w [13]).

Jak zostało to wspomniane wcześniej, w przypadku zbioru stanów  $S$  rozważanego w tym artykule, tylko niektóre przejścia pomiędzy stanami są możliwe. Zatem tylko pewne intensywności  $\lambda_{kl}^{(j)}$  dla odpowiednich rozkładów wykładniczych są różne od zera. Macierz intensywności ma zatem postać

$$\Lambda^{(j)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & X & X \\ X & X & 0 & X & 0 \\ X & X & 0 & 0 & X \\ X & X & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

gdzie  $X$  oznacza niezerowy element. Wiersze i kolumny macierzy (6) są numerowane w ten sam sposób, co stany ze zbioru  $S$ , tzn. od 0 do 4. Przykładowo,  $\lambda_{02}^{(j)}$  odpowiada intensywności wymiany uszkodzonej części na zupełnie nową, która rozpocznie cykl życia w stanie burn-in, zaś  $\lambda_{30}^{(j)}$  opisuje intensywność uszkodzenia z konieczną potem wymianą, jeśli połączenie było w stanie normal operations.

Co więcej, z opisów stanów założyć możemy

$$\lambda_{20}^{(j)} > \lambda_{30}^{(j)}, \lambda_{40}^{(j)} > \lambda_{30}^{(j)}$$

oraz

$$\lambda_{21}^{(j)} > \lambda_{31}^{(j)}, \lambda_{41}^{(j)} > \lambda_{31}^{(j)}.$$

Nierówności te odpowiadają faktowi, że stany burn-in i wear-out mają większe intensywności prowadzące do reperowania i wymiany niż faza normal operations, jak zostało to wspomniane wcześniej.

Ponadto w trakcie symulacji Monte Carlo rozważanych w tym artykule, proces stanu połączenia  $S^{(j)}(t)$  jest dodatkowo modyfikowany poprzez uwzględnienie natychmiastowych przejść spowodowanych przez zmienną  $R^{(j)}$ .

W dalszej części artykułu zakładamy, że wszystkie połączenia mogą być pogrupowane w  $K$  grup, odpowiadających własnościom technicznym rur, np. ich wymiarom, rodzajom użytych materiałów itp. (dalsze szczegóły znaleźć można np. w [3]). Typy te mają oczywiście bezpośrednie odwzorowanie w odmiennych macierzach intensywności i np. stanach startowych połączeń lub bezwarunkowych czasach wymian.

## 2.2. Model kosztów obsługi

Bazując na modelu opisanym w rozdziale 2.1, podejście Monte Carlo może zostać użyte do symulowania trajektorii procesu  $S^{(j)}(t)$  dla każdego połączenia  $j$ , ale również (w podobny sposób) do generowania zachowania się całego WDS. Długości okresów pomiędzy przejściami do stanów są również elementem tej generacji, a momenty przejść do stanów 0 lub 1 (czyli konieczność wymiany lub naprawy jakiejś części) mogą być bezpośrednio znalezione. Od teraz momenty takie będziemy oznaczać przez  $t_1, t_2, \dots$

W niniejszym artykule skupiamy się tylko na kosztach eksploatacji związanych z wymianą i naprawą. Oczywiście, inne typy kosztów (jak koszty strat wody, koszty utraconych dochodów itp. – patrz np. [4]) mogą być również uwzględnione w omawianym modelu numerycznym.

Będziemy zakładać, że wspomniane koszty zależą od rodzaju obsługi eksploatacyjnej (tzn. czy niezbędna jest wymiana, czy naprawa), długości czasu tej obsługi oraz rodzaju połączenia. Stąd otrzymujemy

$$c^{(j)}(t_i) = c_{const}^{(j)} + c_{var}^{(j)}, \quad (7)$$



gdzie  $c^{(j)}(t_i)$  oznacza całkowitą sumę kosztów dla danego połączenia  $j$  i momentu  $t_i$  rozpoczęcia odpowiedniej procedury obsługi,  $c_{const}^{(j)}$  jest pewną stałą wartością niezależną od czasu obsługi, tzn. kosztem stałym, zaś  $c_{var}^{(j)}$  oznacza koszt zmienny, tzn. wartość zależną od długości czasu obsługi serwisowej.

Symulacje Monte Carlo można zastosować w różnych podejściach do problemu obliczania kosztów zmiennych. Przykładowo, koszty te mogą zależeć bezpośrednio od długości czasu trwania obsługi serwisowej (czyli być w pełni deterministyczne) lub być modelowane dodatkową zmienną losową, zależną od wspomnianej długości czasu, typu połączenia lub innych parametrów (co prowadzi do losowych wartości płatności).

### 2.3. Model stopy procentowej

Jak wspomniano, w rozważanym przez nas podejściu zakładamy zależność wartości pieniądza od czasu, co oznacza, że stosujemy tzw. wartość obecną, koncept szeroko znany w matematyce finansowej (patrz np. [5, 27]). Tego typu podejście jest szczególnie użyteczne, jeśli zakładamy odległy horyzont czasowy  $T$  (np. 10 – 20 lat) dla którego mamy obliczyć estymatory kosztów eksploatacji. W takim przypadku koszty te mogą być porównane dla różnorodnych scenariuszy „wyrażonych” dla chwili obecnej (tzn. dla  $t=0$ ). Scenariusze tego typu mogą być powiązane bezpośrednio z możliwymi decyzjami (np. dotyczącymi różnych wartości  $R^{(j)}$ ), co prowadzi do wyboru najlepszej decyzji uwzględniającej ryzyko finansowe.

Będziemy obliczać wartość obecną całkowitej sumy kosztów napraw i wymiany  $PV(c)$ , która jest dana jako

$$PV(c) = \sum_{i,j} PV\left(c^{(j)}(t_i)\right). \quad (8)$$

W celu obliczenia (8), musimy założyć odpowiedni model stopy procentowej, niezbędny do znalezienia  $PV(\cdot)$  dla każdego  $c^{(j)}(t_i)$ . W matematyce finansowej znanych jest wiele modeli tego typu (patrz np. [5]), ale w tym artykule skupimy się na jednowymiarowym modelu Vasicka, opisanym równaniem

$$dr_t = a(b - r_t) + \sigma dW_t, \quad (9)$$

gdzie  $r_t$  jest wartością stopy w chwili  $t$ ,  $W_t$  jest standardowym ruchem Browna, zaś  $a$ ,  $b$ ,  $\sigma$  są parametrami modelu. Co więcej,  $b$  opisuje długoterminowy poziom średni (tzn. trajektoria  $r_t$  kieruje się ku  $b$  dla odpowiednio długiego czasu),  $a$  jest tempem „ruchu” do  $b$ , zaś  $\sigma$  jest zmiennością trajektorii związaną z losowym czynnikiem ruchu Browna.

W przypadku rozważanego w tym artykule podejścia, model stopy procentowej jest bezpośrednio powiązany z symulacjami Monte Carlo, jak wyjaśniono to w rozdziale 3. W związku z tym zachodzi potrzeba zastosowania schematu iteracyjnego do generowania przyrostów  $\Delta r_t$  oraz odpowiedniego czynnika dyskontującego. W przypadku modelu (9), wykorzystana procedura (więcej szczegółów znaleźć można w [5]) polega na obliczaniu  $r_t$  dla ustalonych momentów  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  z użyciem wzoru

$$r_{t_{i+1}} = \exp(-a(t_{i+1} - t_i))r_{t_i} + b\left(1 - \exp(-a(t_{i+1} - t_i))\right) + \sigma \sqrt{\frac{1 - \exp(-2a(t_{i+1} - t_i))}{2a}} Z_i,$$

gdzie  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  są próbkami *iid* z rozkładu  $N(0,1)$ . Wtedy rozkład  $r_{t_{i+1}}$  dla ustalonej wartości  $r_{t_i}$  ma postać

$$r_{t_{i+1}} \sim N\left(\exp(-a(t_{i+1} - t_i))r_{t_i} + b\left(1 - \exp(-a(t_{i+1} - t_i))\right), \sigma^2 \frac{1 - \exp(-2a(t_{i+1} - t_i))}{2a}\right). \quad (10)$$

W ten sam sposób obliczany jest czynnik

$$fv_{(t_i, t_{i+1})} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} r_s ds,$$

który jest niezbędny do znalezienia wartości obecnej. Rozkład  $fv_{(0, t_{i+1})}$  dla ustalonych  $fv_{(0, t_i)}$  i  $r_{t_i}$  (patrz np. [5]) ma postać

$$fv_{(0, t_{i+1})} \sim N\left(fv_{(0, t_i)} + \frac{1}{a}\left(1 - \exp(-a(t_{i+1} - t_i))\right)r_{t_i} + \frac{b}{a}\left(\exp(-a(t_{i+1} - t_i)) + a(t_{i+1} - t_i) - 1\right), \frac{\sigma^2}{a^2}\left((t_{i+1} - t_i) + \frac{1}{2a}\left(1 - \exp(-2a(t_{i+1} - t_i))\right) + \frac{2}{a}\left(\exp(-a(t_{i+1} - t_i)) - 1\right)\right)\right). \quad (11)$$

Warunkowa kowariancja dla pary  $(r_{t_{i+1}}, fv_{(0, t_{i+1})})$  przy ustalonej wartości  $(r_{t_i}, fv_{(0, t_i)})$  wynosi

$$\frac{\sigma^2}{2a}\left(1 + \exp(-2a(t_{i+1} - t_i)) - 2\exp(-a(t_{i+1} - t_i))\right).$$

## 2.4. Parametry modelu

Biorąc pod uwagę wcześniejsze rozważania, parametry całego modelu można podzielić na dwie grupy:

1. Parametry danego rodzaju  $k = 1, \dots, K$  połączenia, związane z jego niezawodnością i kosztami eksploatacji:  $S^{(k)}(0)$  – początkowy stan połączenia,  $R^{(k)}$  – bezwarunkowy czas wymiany,  $\Lambda^{(k)}$  – macierz intensywności,  $c_{const}^{(k)}$  – koszty stałe ( $c_{const, rpl}^{(k)}$  dla wymiany i  $c_{const, rpr}^{(k)}$  w przypadku konieczności reperacji),  $c_{var}^{(k)}$  – koszty zmienne ( $c_{var, rpl}^{(k)}$  dla wymiany i  $c_{var, rpr}^{(k)}$  w przypadku reperowania),  $n_k$  – ilość połączeń danego typu.
2. Parametry związane ze stopą procentową:  $a$  – parametr powrotu,  $b$  – średnia stopa długoterminowa,  $\sigma$  – zmienność.

## 3. Symulacje – przypadek crisp

W tym rozdziale zakładając będziemy, że wszystkie parametry wymienione w rozdziale 2.4 są dane liczbami rzeczywistymi (tzn. rozważamy przypadek „crisp”). W związku z tym założeniem, odpowiedni algorytm symulujący zachowanie się WDS oraz stóp procentowych ma znacznie prostszą postać niż dla przypadku rozmytego, opisanego w rozdziale 4.

### 3.1. Algorytm

W celu znalezienia wartości obecnej kosztów eksploatacji i innych miar, użytecznych w analizie niezawodności i eksploatacji WDS (patrz przykłady opisane w rozdziale 3.2), należy powtórzyć  $n$  razy trzy główne fazy algorytmu, gdzie  $n$  jest ogólną ilością wykonanych symulacji (patrz Dodatek, algorytm 1).

Podczas pierwszej fazy algorytmu, odpowiedni proces odnowy Markowa jest symulowany z wykorzystaniem prawdopodobieństw przejść danych przez (2) (przypadek ogólny) lub (3) (dla rozkładów wykładniczych, rozważanych w tym artykule). Dodatkowo, warunek (1) powinien być sprawdzany i jeśli  $R_*^{(j)} \geq R^{(j)}$ , to stan jest deterministycznie zmieniany na 0. Następnie wszystkie przejścia do stanów 0 i 1 dla każdej trajektorii powinny zostać znalezione, a czasy obsługi serwisowej dla tych stanów – obliczone. Prowadzi to do określenia nominalnej sumy kosztów dla każdego wygenerowanego momentu obsługi, zgodnie ze wzorem (7).

W drugim etapie, iteracyjne wzory (10) dla  $r_t$  oraz (11) dla  $f v_{(0,t)}$  wykorzystywane są w celu wygenerowania trajektorii stopy procentowej (9) i jednocześnie czynnika dyskontującego. W tym celu brane są pod uwagę uporządkowane rosnąco względem czasu momenty przejść do stanów 0 i 1, uzyskane podczas wcześniejszej procedury Monte Carlo.

Podczas trzeciego etapu obliczany jest estymator zdyskontowanej sumy kosztów eksploatacji.

### 3.2. Przykłady analizy

W każdym z kolejnych przykładów wykonano  $n = 1\,000\,000$  symulacji.

#### 3.2.1. Przykład I

W dalszej części artykułu, w celu sprawdzenia poprawności działania algorytmów oraz zademonstrowania przydatności uzyskanych wyników zastosujemy sztuczne wartości parametrów. Część z nich została jednak skonsultowana z ekspertami. Załóżmy, że rozważamy tylko jeden rodzaj rur, opisany przez parametry

$$S^{(1)}(0) = 2, R^{(1)} = 5, c_{const,rpl}^{(1)} = 5, c_{const,rpr}^{(1)} = 4, c_{var,rpl}^{(1)} = 3, c_{var,rpr}^{(1)} = 2, n_1 = 20. \quad (12)$$

Z kolei macierz intensywności ma postać

$$\Lambda^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 26 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0.4 & 0.9 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0.6 & 1.1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

zaś jednostką czasu jest rok. Stąd średni czas wymagany do wykonania pełnej wymiany wynosi około miesiąca, średni czas naprawy (jeśli wcześniej osiągnięto stan burn-in) jest równy połowie tego okresu, czas bezwarunkowej wymiany jest równy pięć lat itd. Oczywiście, w przypadku praktycznych zastosowań odpowiednie wartości parametrów powinny zostać estymowane na podstawie rzeczywistych obserwacji (lub bazować na opiniach ekspertów), tak jak zostało to przedstawione w rozdziale 2.1

Dla stopy procentowej założymy wartości parametrów dane przez

$$a = 0.1, b = 0.05, r_0 = 0.04, \sigma = 0.001, \quad (14)$$

będziemy również wykonywać analizę dla dwudziestoletniego horyzontu czasowego (tzn.  $T=20$ ).

Wykorzystując symulacje Monte Carlo, dla rozważanego przedziału czasowego znaleziono następujące estymatory:  $\bar{x}_{rpr} = 360.597$  (średnia liczba napraw),  $\bar{x}_{rpl} = 190.164$  (średnia liczba wymian),  $\bar{x}_{rpl,R} = 18.1029$  (średnia liczba bezwarunkowych, planowanych wymian),  $\bar{x}_{rpl,NR} = 172.061$  (średnia liczba wymian bez wymian bezwarunkowych, tzn. tylko wymiany nieplanowane) i  $PV(c) = 1629.2$  (zdyskontowana suma kosztów eksploatacji). Inne estymatory dla czasów i kosztów również mogą zostać obliczone na podstawie wygenerowanej próby (przykłady niektórych z nich można znaleźć w tabeli 1).

	Minimum	Q <sub>1</sub>	Średnia	Q <sub>3</sub>
Czas reperowania	5.58913e-11	0.00574441	0.0199603	0.0276658
Czas wymiany	3.55271e-15	0.0238704	0.0829755	0.115023
Koszty reperowania	4	4.01149	4.03992	4.05533
Koszty wymiany	5	5.07161	5.24893	5.34507

	Maksimum	Odchylenie stand.
Czas reperowania	0.333829	0.0199602
Czas wymiany	1.64975	0.0829587
Koszty reperowania	4.66766	0.0399203
Koszty wymiany	9.94925	0.248876

**Tabela 1.** Wybrane estymatory dla przykładu I.

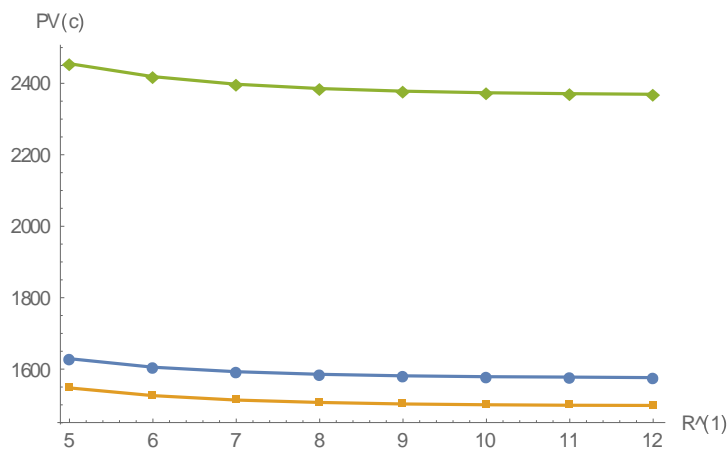
Uzyskany estymator zdyskontowanych kosztów eksploatacji w przypadku modelu Vasicka  $PV(c)$  można porównać z podobnymi miarami dla bardziej klasycznych podejść – wartością nominalną sumy płatności (oznaczaną dalej przez  $PV_{nomin}(c)$ ) oraz wartością dla stałej stopy procentowej  $r$  (oznaczaną dalej przez  $PV_{const}(c)$ ). Stosując odpowiednio zmienione podejście symulacyjne Monte Carlo, otrzymujemy odpowiednio  $PV_{nomin}(c) = 2454.9$  i  $PV_{const}(c) = 1547.42$ . W tym drugim przypadku założona została stała stopa procentowa  $r=0.05$ , co odpowiada parametrowi  $b$  dla modelu Vasicka opisanego parametrami (14). Względne różnice pomiędzy wynikami uzyskanymi dla tych modeli są dość istotne, przy porównaniu wartości nominalnej i modelu Vasicka różnica ta wynosi 50.6813%, zaś dla stałej stopy procentowej jest ona równa -5.01964%. Jak więc widzimy, wybór odpowiedniego modelu stopy procentowej jest bardzo istotnym krokiem w procesie decyzyjnym.

### 3.2.2. Przykład II

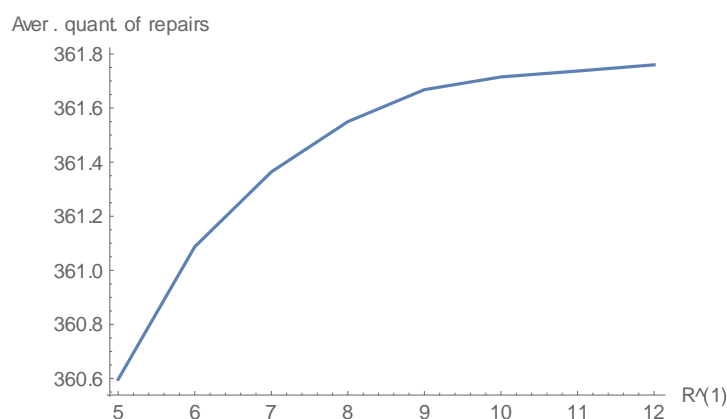
Rozważane symulacyjne podejście Monte Carlo może być również użyteczne dla osób podejmujących decyzje przy badaniu wpływu różnych parametrów czy scenariuszy na uzyskiwane wyniki, takie jak estymatory kosztów eksploatacji lub statystyki niezawodności. Na przykład, patrząc na wyniki z wcześniej zaprezentowanej analizy, możemy osądzić, iż średnia ilość bezwarunkowych wymian jest zbyt duża i powinniśmy wydłużyć czas pomiędzy takimi wymianami, tzn. zwiększyć wartość  $R^{(1)}$ . Oczywiście taka decyzja może mieć niekorzystny skutek w długim przedziale czasowym i jeśli wartość  $R^{(1)}$  jest zbyt duża, to ilość „zwykłych” (czyli nieplanowanych) wymian i napraw spowodowanych procesami degradacji połączenia może również się zwiększyć. Na szczęście symulacje, podobne do tych opisanych wcześniej, mogą pomóc w podjęciu odpowiednich decyzji.

Przykładowo, dla parametrów rozważanych w tym artykule, warto podjąć tego typu decyzję, ponieważ dla  $R^{(1)} = 10$  uzyskujemy  $\bar{x}_{rpr} = 361.715$ , co jest podobną wartością co we wcześniejszej analizie (choć jednocześnie średnia ta jest trochę większa, względna różnica wynosi 0.310041%),  $\bar{x}_{rpl} = 173.847$  jest zdecydowanie mniejszą wartością,  $\bar{x}_{rpl,R} = 1.2931$  stanowi tylko 7.14% wcześniejszej średniej ilości bezwarunkowych wymian,  $\bar{x}_{rpl,NR} = 172.554$  (wartość ta jest podobna do wcześniejszej, choć jednocześnie względna różnica jest dodatnia i wynosi 0.286468%), zaś suma zdyskontowanych kosztów zmniejsza się do  $PV(c) = 1578.87$ .

Podobna analiza może zostać wykonana dla całego przedziału możliwych wartości  $R^{(1)}$ . Rysunek 1 przedstawia zależność pomiędzy bezwarunkowym czasem wymiany i  $PV(c)$ , w podobny sposób jak w przykładzie I dla różnych modeli stóp procentowych: modelu Vasicka (koła), stałej stopy (kwadraty) i wartości nominalnej (romby). Wszystkie wartości obecne w tym przypadku są wykładniczo malejącymi funkcjami, ale różnice między nimi są ponownie bardzo wyraźne.



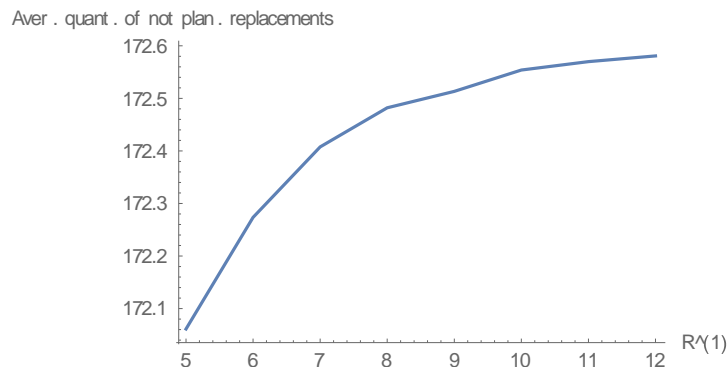
**Rysunek 1.** Wykres zależności pomiędzy  $R^{(1)}$  i  $PV(c)$  w przykładzie II.



**Rysunek 2.** Wykres zależności pomiędzy  $R^{(1)}$  i  $\bar{x}_{rpr}$  w przykładzie II.

Analiza tego typu może zostać wykonana również dla innych miar, istotnych dla praktyków i osób podejmujących decyzje, np. dla średniej ilości napraw  $\bar{x}_{rpr}$  (patrz

rysunek 2) lub średniej ilości nieplanowanych wymian  $\bar{x}_{rpl,NR}$  (patrz rysunek 3). Dla obydwu tych miar średnia ilość czynności serwisowych jest wolno rosnącą funkcją  $R^{(1)}$  dla omawianego zestawu parametrów.



**Rysunek 3.** Wykres zależności pomiędzy  $R^{(1)}$  i  $\bar{x}_{rpl,NR}$  w przykładzie II.

#### 4. Rozmycie parametrów

Jak wiadomo, niepewność wynikająca z niektórych źródeł można modelować za pomocą podejścia rozmytego (czyli „fuzzy”, patrz np. [6]). W takim przypadku wartość niepewnego parametru bazuje na eksperckiej wiedzy. Podejście takie jest szczególnie użyteczne wtedy, gdy informacji jest mało, a inne metody analizy danych, takie jak statystyka, nie mają zastosowania lub są mało użyteczne. Wtedy, bazując na wiedzy ekspertów, można oszacować wartości niezbędnych parametrów w modelu. Zazwyczaj takie opinie ekspertów nie mają w pełni precyzyjnej formy (np. nie są dane liczbami rzeczywistymi). Są one raczej formułowane w postaci „wartość tego parametru wynosi około 5”, co oznacza, że mogą zostać wyrażone w specjalnej sposób, poprzez liczby rozmyte. Liczby rozmyte są również wykorzystywane w procesie podejmowania decyzji statystycznych (przykład ich wykorzystania dla danych niezawodnościowych znaleźć można np. w [9]).

W dalszej części zakładamy, że niektóre z parametrów opisujących rozważany typ połączenia (wymienione w rozdziale 2.4) mają postać rozmytą. Założenie takie wymaga zupełnie innej procedury Monte Carlo niż podejście „crisp”, dlatego też nowy algorytm zostanie przedstawiony w rozdziale 4.2. Porównanie użycia metod Monte Carlo do symulowania liczb rozmytych i „crisp” znaleźć można np. w [8].

Na przykład czas planowanej wymiany połączenia  $R^{(j)}$  będzie wyrażony dalej liczbą rozmytą. Teoretycznie parametr taki powinien być opisany w pełni deterministyczną i precyzyjną wartością, np. możemy powiedzieć „ $R^{(j)}$  jest równe 5 lat”. Niemniej jednak, w praktycznych zastosowaniach wartość ta nie jest w pełni precyzyjna, jest raczej wyrażona poprzez „około 5 lat plus / minus kilka dni / miesięcy”. Jest to spowodowane np. brakiem funduszy remontowych w wyznaczonym okresie, nagłymi i bardzo ważnymi czynnościami serwisowymi dokładnie w momencie planowanej wymiany (co powoduje brak doświadczonej ekipy w wyznaczonej chwili), problemami z planowaniem zmian w komunikacji miejskiej dla określonej daty (takiej jak dzień z dużym ruchem miejskim) itd. Wprowadzone rozmycie ma zatem praktyczne podstawy.

Niemniej jednak, pewna ilościowa informacja dotycząca planowanego czasu wymiany połączenia lub też innego parametru jest nadal niezbędna. Założmy, że eksperci wyrazili swoje opinie. Mogą one mieć formę np. zmiennych lingwistycznych (jak „czas planowanej

wymiany jest raczej krótszy niż dłuższy”). W przypadku podejścia rozważanego w tym artykule, opinie takie muszą zostać jednak przekształcone do zmiennych w postaci liczb rozmytych, tzn. mających swoje funkcje przynależności (patrz np. [30]). Następnie liczby te, które muszą też spełniać pewne dodatkowe wymagania dotyczące monotoniczności ich funkcji przynależności (takie jak liczby L-R) są wykorzystywane w symulacjach do otrzymania rozmytych wyników, np. rozmytych kosztów eksploatacyjnych. Stosując takie podejście uzyskujemy pewną dodatkową informację odnośnie zależności pomiędzy niepewnymi (rozmytymi) parametrami (tzn. opiniami ekspertów) a symulowanym (rozmytym) wynikiem (czyli wnioskami, które są istotne przy podejmowaniu decyzji). Oznacza to, że poziom niepewności danych wejściowych jest bezpośrednio odwzorowany w niepewności danych wyjściowych i może zostać łatwo zmierzony. Przykładowo, różnica pomiędzy rozmytymi kosztami eksploatacyjnymi dla dwóch różnych scenariuszy – „planowany czas wymiany wynosi 5 lat plus / minus pół roku” oraz „planowany czas wymiany wynosi 4.5 roku plus / minus pół roku” – może być bezpośrednio zaobserwowana i zmierzona, co umożliwi podjęcie odpowiedniej decyzji.

Należy podkreślić, że wprowadzenie liczb rozmytych jest związane z innym typem niepewności w stosunku do modelowanej przez zmienne losowe. Oznacza to wzbogacenie rozważanego modelu w istotny sposób.

#### 4.1. Informacje wstępne

Obecnie przedstawimy podstawowe definicje i oznaczenia, które będą potem wykorzystywane w artykule. Dodatkowe szczegóły znaleźć można np. w [14].

Dla podzbioru rozmytego  $\tilde{A}$  zbioru liczb rzeczywistych  $R$ , przez  $\mu_{\tilde{A}}$  oznaczamy będziemy jego funkcję przynależności  $\mu_{\tilde{A}}: R \rightarrow [0,1]$ , a przez  $\tilde{A}[\alpha] = \{x: \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$   $\alpha$ -cięcie  $\tilde{A}$  dla  $\alpha \in (0,1]$ . Wtedy  $\tilde{A}[0]$  jest domknięciem zbioru  $\{x: \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$ .

Liczba rozmyta  $\tilde{a}$  jest rozmytym podzbiorem  $R$ , przy czym zakładamy, że funkcja  $\mu_{\tilde{a}}$  jest normalna, półciągła z góry, wypukła, o domkniętym nośniku. Wtedy dla każdego  $\alpha \in [0,1]$ ,  $\alpha$ -cięcie liczby  $\tilde{a}[\alpha]$  jest domkniętym przedziałem  $\tilde{a}[\alpha] = [\tilde{a}_L[\alpha], \tilde{a}_U[\alpha]]$ , dla którego  $\tilde{a}_L[\alpha], \tilde{a}_U[\alpha] \in R$  i  $\tilde{a}_L[\alpha] \leq \tilde{a}_U[\alpha]$ .

Jeśli przez  $+, -, \cdot, /$  oznaczymy operatory arytmetyczne dla liczb rozmytych (odpowiadające klasycznym operatorom dla liczb rzeczywistych), to dla liczb rozmytych  $\tilde{a}, \tilde{b}$  ich wynik jest również liczbą rozmytą. Wykorzystując odpowiednie  $\alpha$ -cięcia i algebrę przedziałową, otrzymujemy

$$\begin{aligned}(\tilde{a} + \tilde{b})[\alpha] &= [\tilde{a}_L[\alpha] + \tilde{b}_L[\alpha], \tilde{a}_U[\alpha] + \tilde{b}_U[\alpha]], \\(\tilde{a} - \tilde{b})[\alpha] &= [\tilde{a}_L[\alpha] - \tilde{b}_U[\alpha], \tilde{a}_U[\alpha] - \tilde{b}_L[\alpha]],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\tilde{a} \cdot \tilde{b})[\alpha] &= [\min\{\tilde{a}_L[\alpha]\tilde{b}_L[\alpha], \tilde{a}_L[\alpha]\tilde{b}_U[\alpha], \tilde{a}_U[\alpha]\tilde{b}_L[\alpha], \tilde{a}_U[\alpha]\tilde{b}_U[\alpha]\}, \\ &\quad \max\{\tilde{a}_L[\alpha]\tilde{b}_L[\alpha], \tilde{a}_L[\alpha]\tilde{b}_U[\alpha], \tilde{a}_U[\alpha]\tilde{b}_L[\alpha], \tilde{a}_U[\alpha]\tilde{b}_U[\alpha]\}],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\tilde{a}/\tilde{b})[\alpha] &= [\min\{\tilde{a}_L[\alpha]/\tilde{b}_L[\alpha], \tilde{a}_L[\alpha]/\tilde{b}_U[\alpha], \tilde{a}_U[\alpha]/\tilde{b}_L[\alpha], \tilde{a}_U[\alpha]/\tilde{b}_U[\alpha]\}, \\ &\quad \max\{\tilde{a}_L[\alpha]/\tilde{b}_L[\alpha], \tilde{a}_L[\alpha]/\tilde{b}_U[\alpha], \tilde{a}_U[\alpha]/\tilde{b}_L[\alpha], \tilde{a}_U[\alpha]/\tilde{b}_U[\alpha]\}],\end{aligned}$$

pod warunkiem, że  $\tilde{b}[\alpha]$  nie zawiera zera dla wszystkich  $\alpha \in [0,1]$  w ostatnim przypadku.

Liczba rozmyta  $\tilde{a}$  jest nazywana nieujemną ( $\tilde{a} \geq 0$ ), jeśli  $\mu_{\tilde{a}}(x) = 0$  dla  $x < 0$  i jest nazywana dodatnią ( $\tilde{a} > 0$ ), jeśli  $\mu_{\tilde{a}}(x) = 0$  dla  $x \leq 0$ .

Liczba rozmyta L-R jest to liczba rozmyta o funkcji przynależności postaci

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{x-a}{b-a}\right), & x \in [a, b] \\ 1, & x \in [b, c] \\ R\left(\frac{d-x}{d-c}\right), & x \in [c, d] \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases},$$

gdzie  $L, R: [0,1] \rightarrow [0,1]$  są niemalejącymi funkcjami, takimi, że  $L(0) = R(0) = 0$  i  $L(1) = R(1) = 1$ .

Trójkątna liczba rozmyta, oznaczana dalej przez  $[a, b, c]$ , jest to liczba rozmyta L-R, której funkcja przynależności ma postać

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b] \\ \frac{x-c}{b-a}, & x \in [b, c] \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}.$$

W dalszej części artykułu, w celu przybliżenia rozmytego wyniku  $\tilde{f}$ , będziemy sprawdzać monotoniczność odpowiedniej funkcji  $f(x)$ , dla której wszystkie argumenty (czyli parametry modelu), poza pojedynczą zmienną  $x$ , będą stałe.

Podobne podejście, związane z zasadą rozszerzenia, stosowane będzie do liczby L-R  $\tilde{\lambda} > 0$ , która opisywać będzie rozmytą intensywność dla rozkładu wykładniczego. W związku z tym, jeśli  $f(\lambda)$  jest funkcją rosnącą, to dla określonego  $\alpha$  lewy kraniec  $\tilde{f}_L[\alpha]$  będziemy przybliżać w symulacjach Monte Carlo za pomocą  $\tilde{\lambda}_L[\alpha]$ , jako intensywności zmiennej z rozkładu wykładniczego. Analogicznie,  $\tilde{\lambda}_U[\alpha]$  zostanie użyte do przybliżenia  $\tilde{f}_U[\alpha]$  (patrz również np. [2, 23, 24]).

## 4.2. Symulacje dla parametrów rozmytych

Będziemy zakładać, że parametry każdego typu połączenia, tzn.  $R^{(k)}, \Lambda^{(k)}, c_{const,rpl}^{(k)}, c_{const,rpr}^{(k)}, c_{var,rpl}^{(k)}, c_{var,rpr}^{(k)}$  dla  $k = 1, \dots, K$  będą dane liczbami rozmytymi L-R. W związku z tym, będą one od teraz oznaczane odpowiednio jako  $\tilde{R}^{(k)}, \tilde{\Lambda}^{(k)}$  itd. Dla macierzy intensywności przejść mamy zatem  $\tilde{\Lambda}^{(k)} = \left( \tilde{\lambda}_{kl}^{(j)} \right)_{k,l \in S}$ , przy czym macierz ta składa się z pięciu kolumn i pięciu wierszy nieujemnych liczb rozmytych, a wartości dodatnie zajmują takie same komórki co w (6).

Wykorzystując symulacje Monte Carlo, uzyskamy następnie wyniki podobne do przedstawionych w rozdziale 3.2. Wartości te jednak są liczbami rozmytymi, użyte zostaną zatem odpowiednie oznaczenia, takie jak  $\tilde{P}\tilde{V}(c)$ .

Rozmyty wynik będzie przybliżany przez  $\alpha$ -cięcia  $\tilde{P}\tilde{V}(c)[\alpha]$ , obliczone z wykorzystaniem algorytmu 2 (patrz Dodatek). Najpierw wybieramy, czy lewy, czy też prawy kraniec dla  $\tilde{P}\tilde{V}(c)$  powinien zostać przybliżony z użyciem symulacji. Na tej podstawie zostaje ustalona odpowiednia dwuargumentowa zmienna o postaci  $left = 1$  lub  $left = 0$ . Pozostałymi parametrami są przy tym: wartość startowa  $\alpha_0 \in [0,1]$ , górne ograniczenie  $\alpha_1 \in (\alpha_0, 1]$  i przyrost  $\Delta\alpha > 0$ .

W pierwszym etapie, dla ustalonego  $\alpha$ , zostają znalezione odpowiednie  $\alpha$ -cięcia dla wszystkich rozmytych parametrów i typów połączeń. Uwzględniając monotoniczność  $PV(c)$  i wartość zmiennej  $left$ , wybrane zostają następnie lewe lub prawe krańce odpowiednich  $\alpha$ -cięć dla wszystkich rozmytych parametrów.



W drugim etapie następuje symulowanie zachowania się całego WDS z użyciem algorytmu 1 (patrz Dodatek). Uzyskany wynik  $PV(c)$  typu „crisp” jest odpowiednim przybliżeniem  $PV_L(c)[\alpha]$  lub  $PV_U(c)[\alpha]$  w zależności od wartości zmiennej  $left$ .

W celu skonstruowania przybliżenia rozmytego wyniku, wartość  $\alpha$  w wyżej opisanej procedurze jest krokowo zmieniana, począwszy od  $\alpha_0$  aż  $\alpha_1$  kończąc, z określonym przyrostem  $\Delta\alpha$ . Po obliczeniu lewych krańców  $PV(c)$  (dla  $left = 1$ ), w podobny sposób następuje obliczenie prawych krańców (tzn. stosujemy  $left = 0$ ). Następnie skonstruowane przedziały są „ustawiane” kolejno na sobie, tworząc przybliżenie liczby rozmytej.

Powyższa metoda wywodzi się z idei rozszerzania, wprowadzonej przez Zadeha (patrz [31]). Podobne podejście, bazujące na użyciu  $\alpha$ -cięć, wykorzystywane jest również w matematyce finansowej do wyceny instrumentów pochodnych (patrz np. [23, 24]), w optymalizacji zadań kolejkowych (patrz np. [2]) itd.

W związku z tym, że rozważana funkcja (tworząca rozmyty wynik  $\tilde{P}\tilde{V}(c)$ ) nie jest dana w postaci analitycznej, zachodzi potrzeba użycia symulacji w celu jej oszacowania. Jak zostało wcześniej wspomniane, w pierwszym etapie procedury niezbędne jest określenie dla każdego z rozmytych parametrów, który koniec odpowiedniego  $\alpha$ -cięcia należy użyć do obliczenia lewego lub prawego końca wynikowego przedziału. Zależy to bezpośrednio od monotoniczności funkcji określającej wynik  $f(p)$ , tzn. czy wynik (jak zdyskontowane koszty eksploatacyjne) jest malejącą lub rosnącą funkcją danego parametru  $p$  (jak stałe koszty napraw). W algorytmie 2 (patrz Dodatek) podejście to wykorzystane jest do obliczenia  $\tilde{P}\tilde{V}(c)$ , ale podobna metoda może zostać użyta dla innych funkcji  $f(\cdot)$ , które są ważne z praktycznego punktu widzenia.

#### 4.2.1. Przykład III

Dla ułatwienia zakładać dalej będziemy, że parametry rozważanego, pojedynczego typu połączenia będą dane trójkątnymi liczbami rozmytymi. Niemniej jednak inne rodzaje liczb L-R mogą zostać również użyte dla omawianej metody. Załóżmy następujące wartości parametrów:

$$\tilde{c}_{const,rpl}^{(1)} = [4,5,6], \tilde{c}_{const,rpr}^{(1)} = [3,4,5], \tilde{c}_{var,rpl}^{(1)} = [2,3,4], \tilde{c}_{var,rpr}^{(1)} = [1,2,3]. \quad (15)$$

Pozostałe parametry są takie same, jak w rozdziale 3.2.1. Jak łatwo zauważyć na podstawie (15), jedynie stałe i zmienne koszty napraw i wymian są trójkątnymi liczbami rozmytymi w tym przypadku. W związku z tym są one jedynym źródłem niepewności w naszym przykładzie.

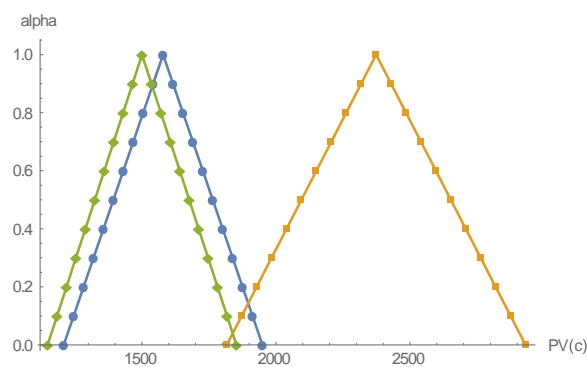
Wykorzystując metodę Monte Carlo opisaną przez algorytm 2, przybliżono rozmyte zdyskontowane koszty eksploatacyjne  $\tilde{P}\tilde{V}(c)$  dla modelu Vasicka (rysunek 4, koła) i rozmytą średnią nominalnych kosztów wymian  $\tilde{c}_{rpl}$  (rysunek 5). Uzyskane liczby rozmyte są bardzo bliskie symetrycznym liczbom trójkątnym, a ich 1-cięcia są równe wartościom wyestymowanym w rozdziale 3.2.2. Wybrane przybliżone wartości przedziałów dla różnych  $\alpha$  znaleźć można w tabeli 2.

$\alpha$	$\tilde{P}\tilde{V}(c)$	$\tilde{c}_{rpl}$
0	[1208.23, 1949.52]	[4.16594, 6.33188]
0.1	[1245.29, 1912.46]	[4.27424, 6.22358]
0.5	[1393.55, 1764.2]	[4.70742, 5.79039]
0.9	[1541.81, 1615.94]	[5.14061, 5.3572]

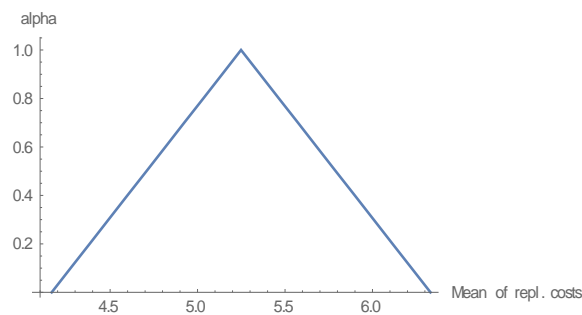
**Tabela 2.** Wybrane  $\alpha$ -cięcia rozmytych zdyskontowanych kosztów eksploatacji  $\tilde{P}\tilde{V}(c)$  i rozmytych średnich nominalnych kosztów wymian  $\tilde{c}_{rpl}$  w przykładzie III.

Zarówno  $PV(c)$ , jak i  $c_{rpl}$  są rosnącymi funkcjami dla rozmytych parametrów (15). Zatem w celu obliczenia lewego krańca przedziału  $PV_L(c)[\alpha]$  (lub odpowiednio prawego krańca  $PV_U(c)[\alpha]$ ) przy określonej wartości  $\alpha$ , należy rozważać jedynie lewe (lub odpowiednio prawe) krańce  $\alpha$ -cięć parametrów (15). Podobną procedurę należy zastosować do obliczenia  $\tilde{c}_{rpl}$ .

Wykorzystując symulacje Monte Carlo, znaleźć możemy wartości obecne kosztów eksploatacyjnych również dla bardziej klasycznych modeli stopy procentowej, czyli nominalne koszty (patrz rysunek 4, kwadraty) oraz koszty dla stałej stopy procentowej (patrz rysunek 4, romby). Uzyskane przybliżenia liczb rozmytych mają bardzo podobne kształty, mają jednak zdecydowanie odmienne wartości.



**Rysunek 4.** Rozmyte zdyskontowane i nominalne koszty eksploatacyjne w przykładzie III.



**Rysunek 5.** Rozmyte średnie nominalne koszty wymiany w przykładzie III.

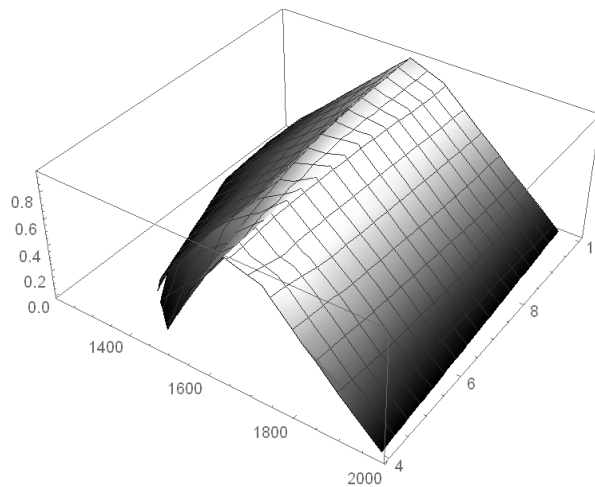
#### 4.2.2. Przykład IV

Oczywiście, nie tylko koszty eksploatacyjne mogą być wartościami niepewnymi w naszych rozważaniach. Dlatego dokonamy również analizy w przypadku, gdy bezwarunkowy czas planowanej wymiany jest także określony trójkątną liczbą rozmytą, oznaczaną dalej przez  $\tilde{R}^{(1)}$ . Pozostałe liczby rozmyte (tzn.  $\tilde{c}_{const,rpl}^{(1)}$ ,  $\tilde{c}_{const,rpr}^{(1)}$ ,  $\tilde{c}_{var,rpl}^{(1)}$ ,  $\tilde{c}_{var,rpr}^{(1)}$ ) są określone przez (15), zaś wartości „crisp” są takie same jak w rozdziale 3.2.1.

Jak poprzednio, w celu znalezienia przybliżenia rozmytego wyniku, musimy sprawdzić monotoniczność funkcji dla rozważanych parametrów rozmytych. Jak wskazano w rozdziale

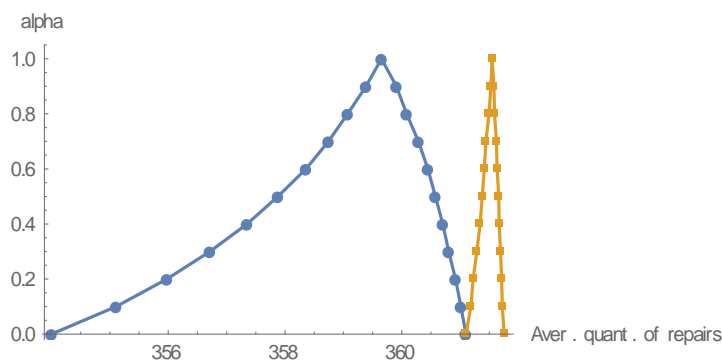
4.2.1,  $PV(c)$  jest rosnącą funkcją kosztów, jednak zależność tej funkcji od  $R^{(1)}$  nie jest już tak bezpośrednia. Zdarzyć się może, że dla większych wartości  $R^{(1)}$  wzrosną również ogólne koszty eksploatacyjne. Niemniej jednak, jak wskazano to za pomocą rysunku 1, dla rozważanych przez nas przedziałów wartości parametrów jest to funkcja malejąca. Dlatego też, aby obliczyć  $V_L(c)[\alpha]$ , należy uwzględnić lewe krańce  $\alpha$ -cięć rozmytych kosztów i prawy koniec  $\alpha$ -cięcia  $\tilde{R}^{(1)}$  (oznaczany dalej przez  $R_U^{(1)}[\alpha]$ ).

Uzyskane przybliżenia  $\tilde{P}\tilde{V}(c)$  są przedstawione na rysunku 6, przy czym oś  $x$  odpowiada wartości obecnej kosztów eksploatacyjnych, oś  $y$  jest związana z trójkątnymi liczbami rozmytymi dla  $\tilde{R}^{(1)}$  postaci  $[y - 2, y, y + 2]$ , zaś oś  $z$  odpowiada  $\alpha$ -cięciom. Jak łatwo zauważyć, estymowane wartości są liczbami rozmytymi L-R, których nośniki są tym większe, im wartość  $y$  jest większa w  $\tilde{R}^{(1)} = [y - 2, y, y + 2]$ .

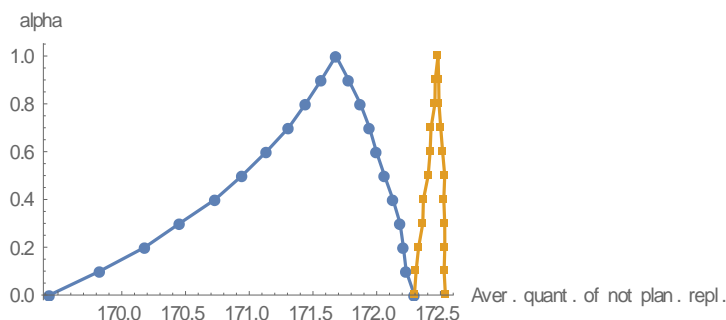


**Rysunek 6.** Rozmyte zdyskontowane koszty eksploatacyjne w przykładzie IV.

Podobnie jak w przykładzie II, ważne dla praktyków wartości rozmyte również zostały obliczone, tzn. średnia liczba napraw  $\tilde{x}_{rpr}$  (patrz rysunek 7) i średnia liczba nieplanowanych wymian  $\tilde{x}_{rpl, NR}$  (patrz rysunek 8). Otrzymane wyniki można porównać dla  $\tilde{R}^{(1)} = [2, 4, 6]$  (rysunek 7 i 8, koła) i  $\tilde{R}^{(1)} = [6, 8, 10]$  (rysunek 7 i 8, kwadraty). Jak łatwo zauważyć, dla większych wartości  $\tilde{R}^{(1)}$  uzyskana liczba rozmyta L-R jest przesunięta bardziej w prawo i ma mniejszy nośnik.



**Rysunek 7.** Rozmyte przybliżenia średniej ilości napraw w przykładzie IV.



**Rysunek 8.** Rozmyte przybliżenia średniej ilości nieplanowanych wymian w przykładzie IV.

### 4.2.3. Przykład V

Wszystkie parametry rozważanego typu połączenia w WDS (tzn. pierwsza grupa wymieniona w rozdziale 2.4) może zostać przedstawiona za pomocą liczb rozmytych. Podejście takie odpowiada sytuacji bazowania na wiedzy ekspertów związanej z różnymi źródłami niepewności. Dlatego też w tym przykładzie, poza użyciem liczb rozmytych

$$\tilde{R}^{(1)} = [8,10,12], \tilde{c}_{const,rpl}^{(1)} = [4,5,6], \tilde{c}_{const,rpr}^{(1)} = [3,4,5], \tilde{c}_{var,rpl}^{(1)} = [2,3,4], \tilde{c}_{var,rpr}^{(1)} = [1,2,3], \quad (16)$$

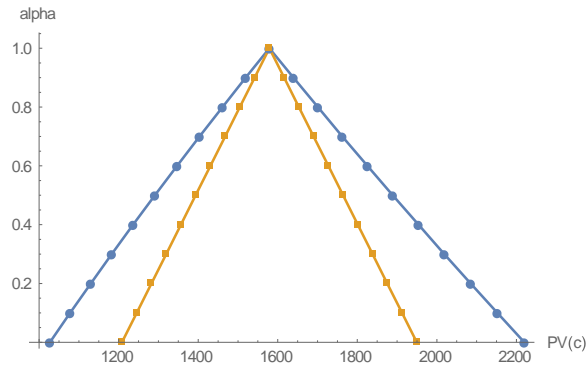
wykorzystamy również macierz intensywności przejść  $\tilde{\Lambda}^{(k)}$  daną trójkątnymi liczbami rozmytymi

$$\tilde{\Lambda}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & [10,12,14] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [22,24,26] & [24,26,28] & 0 \\ [0.4,0.5,0.6] & [0.9,1,1.1] & 0 & [0.9,1,1.1] & 0 \\ [0.3,0.4,0.5] & [0.8,0.9,1] & 0 & 0 & [0.2,0.3,0.4] \\ [0.5,0.6,0.7] & [1,1.1,1.2] & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Liczby rozmyte w (17) opisują jedynie rozmyte intensywności wykładniczych rozkładów przejść pomiędzy stanami ze zbioru  $S$ , jak zostało to wyjaśnione w rozdziale 4.1. Jak łatwo zauważyć, wartości (17) są bardzo „bliskie” liczbom „crisp” (13) wykorzystanym w przykładzie 1. Dzięki temu uzyskane obecnie rozmyte wyniki mogą zostać bezpośrednio porównane z wynikami z wcześniejszych przykładów.

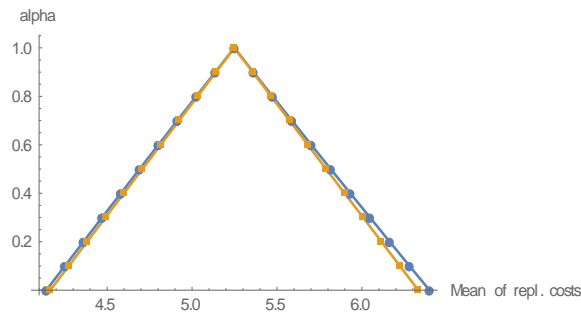
Jak zostało to wcześniej wspomniane, w celu obliczenia rozmytego wyniku, niezbędne jest sprawdzenie monotoniczności rozważanej funkcji dla danego argumentu. Funkcja  $PV(c)$  jest malejąca dla  $\lambda_{02}^{(1)}$ ,  $\lambda_{12}^{(1)}$ ,  $\lambda_{13}^{(1)}$ , ponieważ dla wyższych wartości tych intensywności, oczekiwany czas naprawy lub wymiany jest krótszy, co przekłada się na mniejszy końcowy koszt. Wszystkie pozostałe parametry mogą zostać sprawdzone w podobny sposób.

Przybliżone rozmyte zdyskontowane koszty eksploatacyjne, uzyskane za pomocą metody Monte Carlo, zostały porównane z podobnymi wynikami z przykładu III (patrz rysunek 9). W tym przypadku  $\tilde{P}\bar{V}(c)$  jest liczbą rozmytą L-R, bliską liczbie trójkątnej, o szerszym nośniku niż podobna wartość uzyskana w przykładzie III.



**Rysunek 9.** Rozmyte zdyskontowane koszty eksploatacyjne z przykładu V (okręgi) i przykładu III (kwadraty).

W podobny sposób przybliżono rozmyte średnie nominalne koszty wymian. Na rysunku 10 porównano uzyskany wynik z podobnymi danymi z przykładu III. Wybrane przedziały dla różnych wartości  $\alpha$  znaleźć można w tabeli 3.

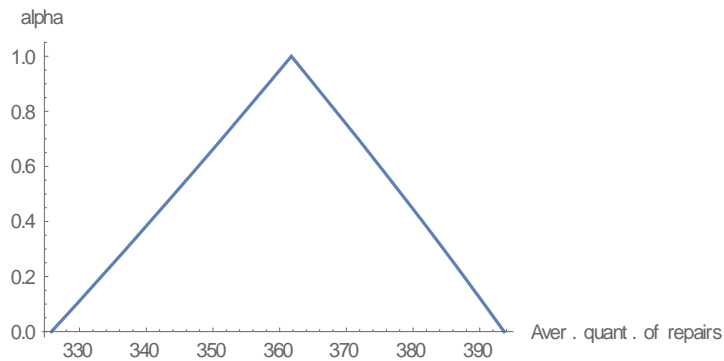


**Rysunek 10.** Rozmyte średnie nominalne koszty wymian z przykładu V (okręgi) i przykładu III (kwadraty).

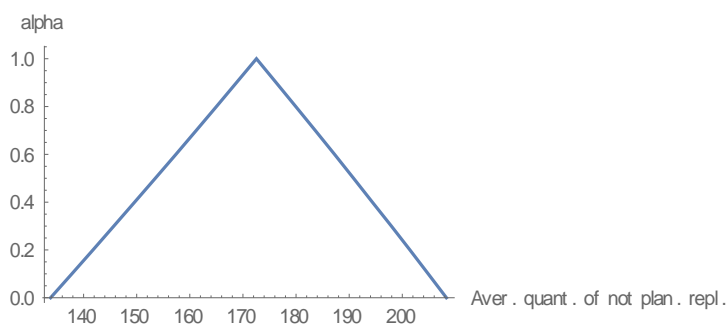
$\alpha$	$\widetilde{PV}(c)$	$\tilde{c}_{rpl}$
0	[1026.98, 2220.02]	[4.14232, 6.39796]
0.1	[1077.91, 2152.23]	[4.25161, 6.28049]
0.5	[1291.05, 1889.06]	[4.6915, 5.81668]
0.9	[1519.32, 1639.42]	[5.13678, 5.36153]

**Tabela 3.** Wybrane  $\alpha$ -cięcia rozmytych zdyskontowanych kosztów eksploatacyjnych  $\widetilde{PV}(c)$  i rozmytych średnich nominalnych kosztów wymian  $\tilde{c}_{rpl}$  z przykładu V.

Podobnie jak wcześniej, obliczono również rozmyte przybliżenia średniej ilości napraw  $\tilde{x}_{rpr}$  (patrz rysunek 11) i średniej ilości nieplanowanych wymian  $\tilde{x}_{rpl,NR}$  (patrz rysunek 12). Uzyskane liczby L-R są bliskie trójkątnym, ale ich nośniki są znacznie szersze niż dla wyników dla których intensywności były liczbami „crisp”.



**Rysunek 11.** Rozmyte średnie ilości wymian w przykładzie V.



**Rysunek 12.** Rozmyte przybliżenie średniej ilości nieplanowanych wymian w przykładzie V

## 5. Podsumowanie

W artykule zaproponowano model przejść pomiędzy stanami pojedynczego połączenia w WDS. Model ten związany jest z procesem semi-Markowa oraz deterministycznymi skokami wynikającymi z bezwarunkowych czasów wymian dla każdej z rur. Wykorzystując symulacje Monte Carlo, generowane jest zachowanie się całego WDS oraz estymowane są koszty eksploatacyjne (czyli wymian i napraw). Następnie, bazując na procesie stochastycznym (jednowymiarowym modelu Vasicka stopy procentowej), obliczona jest wartość obecna odpowiedniego strumienia płatności oraz inne ważne miary statystyczne kosztów. Podkreślono różnice występujące pomiędzy wprowadzonym podejściem a klasyczną metodologią (czyli użyciem stałej stopy procentowej). Oprócz podejścia „crisp”, rozważane jest także rozmycie wybranych parametrów połączenia. Wprowadzenie liczb rozmytych prowadzi do lepszego wykorzystania wiedzy eksperckiej oraz bardziej bliskiemu praktyce sposobowi modelowania niepewnych parametrów. Przedstawione zostały niezbędne numeryczne algorytmy i odpowiednie przykłady wyników symulacyjnych, zarówno dla podejścia „crisp”, jak i rozmytego.

Istnieje wiele różnych możliwości rozwinięcia metod omówionych w niniejszym artykule. Po pierwsze, zamiast rozkładów wykładniczych, możemy założyć wykorzystanie innych rozkładów – np. czas naprawy może zostać opisany rozkładem lognormalnym. Po drugie, jeśli wprowadzone zostaną inne rodzaje rozkładów, odpowiedni przypadek może zostać skalibrowany z użyciem rzeczywistych danych. Umożliwia to zaproponowanie testów statystycznych, które sprawdzą poprawność wprowadzonego rozkładu. Daje to również

możliwość porównania występujących wtedy różnic pomiędzy estymowanymi kosztami, co może być istotne w zastosowaniach praktycznych.

**Podziękowania** Chciałbym podziękować prof. Olgierdowi Hryniewiczowi i anonimowemu recenzentowi za ich pomocne uwagi i komentarze, które pozwoliły w istotny sposób podnieść jakość tego artykułu.

## **Dodatek**

**Algorytm 1:** Estymacja kosztów eksploatacyjnych – przypadek „crisp”.

**Wejście:** Ilość symulacji  $n$ , parametry każdego typu  $k$  połączenia, parametry modelu stopy procentowej (patrz rozdział 2.4).

**Wyjście:** Wartość obecna kosztów eksploatacyjnych  $PV(c)$ .

**for**  $i=1$  **to**  $n$  **do**

**for**  $k=1$  **to**  $K$  **do**

**for**  $j=1$  **to**  $n_k$  **do**

*Generuj niezależną trajektorię  $S^{(j)}$  procesu stanów (patrz rozdział 2.1);*

*Zapisz momenty  $t_l$  przejścia do stanów 0 lub 1 i odpowiednie okresy napraw i wymian (patrz rozdział 2.2);*

*Oblicz i zapisz wszystkie koszty  $c^j(t_l)$  dla każdego  $t_l$  (patrz rozdział 2.2);*

**end**

**end**

*Uporządkuj rosnąco wszystkie momenty  $t_1, t_2, \dots$ , otrzymując  $t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \dots \leq t_{(m)} \leq T$ ;*

$PV_i = 0$ ;

**for**  $j=1$  **to**  $m$  **do**

*Generuj  $r_{t_{(j)}}$  i oblicz zdyskontowane koszty  $PV(c_{t_{(j)}})$  (patrz rozdział 2.3);*

$PV_i = PV_i + PV(c_{t_{(j)}})$ ;

**end**

**end**

$$PV(c) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n PV_i;$$

**Algorytm 2:** Estymacja kosztów eksploatacyjnych – przypadek rozmyty.

**Wejście:** Ilość symulacji  $n$ , parametry rozmyte dla każdego typu  $k$  połączenia (patrz rozdział 4.2), parametry „crisp” dla stopy procentowej (patrz rozdział 2.4), wartość początkowa  $\alpha_0$ , górne ograniczenie  $\alpha_1$ , przyrost  $\Delta\alpha > 0$ , zmienna typu boolean *left*.

**Wyjście:** Lewe lub prawe krańce aproksymacji rozmytej wartości obecnej kosztów eksploatacyjnych  $\tilde{P}V(c)$ .

$\alpha = \alpha_0$ ;

**while**  $\alpha < \alpha_1$  **do**

**for**  $k=1$  **to**  $K$  **do**

        Dla typu  $k$  połączenia, znajdź  $\alpha$ -cięcia dla parametrów rozmytych:  $\tilde{R}^{(k)}[\alpha] = [\tilde{R}_L^{(k)}[\alpha], \tilde{R}_U^{(k)}[\alpha]]$ ,  $\tilde{\Lambda}^{(k)}[\alpha] = [\tilde{\Lambda}_L^{(k)}[\alpha], \tilde{\Lambda}_U^{(k)}[\alpha]]$  itd.;

**for** każdego rozmytego parametru  $p$  **do**

            Sprawdź monotoniczność  $PV(c)$  jako funkcji argumentu  $p$ ;

            Ustal  $p_L[\alpha]$  lub  $p_U[\alpha]$  w zależności od monotoniczności  $PV(c)$  dla ustalonej wartości zmiennej *left*;

**end**

**end**

    Użyj algorytmu 1 w celu znalezienia wartości „crisp”  $PV(c)$ ;

**if** *left* **then**

$PV_L[\alpha] = PV(c)$ ;

**else**

$PV_U[\alpha] = PV(c)$ ;

**end**

$\alpha = \alpha + \Delta\alpha$ ;

**end**



## Bibliografia

1. Amani N, Ali N M, Mohammed A H, Samat R A. Maintenance and management of wastewater system components using the condition index system, prediction process and costs estimation. *Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability*. 2013; 15(2): 161–168.
2. Buckley J J. *Simulating Fuzzy Systems*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.
3. Clark R M, Thurnau R C. Evaluating the risk of water distribution system failure: A shared frailty model. *Front. Earth Sci.* 2011; 5(4): 400–405.
4. Fadaee M J, Tabatabaei R. Estimation of failure probability in water pipes network using statistical model. *Engineering Failure Analysis*. 2011; 18: 1184–1192.
5. Glasserman P. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. New York: Springer, 2004.
6. Gonzalez A, Pons O, Vila M A. Dealing with uncertainty and imprecision by means of fuzzy numbers. *International Journal of Approximate Reasoning*. 1999; 21: 233–256.
7. Goulter I C, Davidson J, Jacobs P. Predicting watermain breakage rates. *J. Water Resour. Plann. Manage. ASCE*. 1993; 119(4): 419–436.
8. Hryniewicz O. Comparison of Fuzzy and Crisp Random Variables by Monte Carlo simulations. In: Grzegorzewski P, Gałolewski M, Hryniewicz O, Gil M A. (eds.). *Strengthening Links Between Data Analysis and Soft Computing*. Springer, 2015.
9. Hryniewicz O, Kaczmarek K, Nowak P. Bayes statistical decisions with random fuzzy data – An application for the Weibull distribution. *Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability*. 2015; 17(4): 610–616.
10. Islam M S, Sadiq R, Rodriguez M J, Najjaran H, Francisque A, Hoofar M. Water distribution system failure: a framework for forensic analysis. *Environ. Syst. Decis.* 2014; 34: 168–179.
11. Kanakoudis V K, Tolikas D K. Assessing the performance level of a water system. *Water, Air, and Soil Pollution*. 2004; 4: 307–318.
12. Kleiner Y, Adams B J, Rogers J S. Long-term planning methodology for water distribution system rehabilitation. *Water Resources Research*. August 1998; 34(8): 2039–2051.
13. Kumar G, Jain V, Gandhi O P. Steady-state availability analysis of repairable mechanical systems with opportunistic maintenance by using semi-Markov process. *Int J Syst Assur Eng Manag.* 2014; 5(4): 664–678.
14. Lee K H. *First Course on Fuzzy Theory and Applications*. Berlin Heidelberg: Springer, 2005.
15. Lindhe A, Rosén L, Norberg T, Bergstedt O. Fault tree analysis for integrated and probabilistic risk analysis of drinking water systems. *Water Research*. 2009; 43: 1642–1653.
16. Liu Z, Kleiner Y, Rajani B, Wang L, Condit W. *Condition Assessment Technologies for Water Transmission and Distribution Systems*. Washington DC: U.S. Environmental Protection Agency, 2012; EPA/600/R-12/017.
17. Mailhot A, Poulin A, Villeneuve J P. Optimal replacement of water pipes. *Water Resour. Res.* 2003; 39(5): HWC 2-1 to HWC 2-14.
18. Malinowski J. Finding reliability measures for a water supply network by means of component state factorization and series-parallel aggregation. <http://www.ibspan.waw.pl/woda-dla-slaska/publikacje.htm>

19. Malinowski J. Reliability oriented simulation of a water supply system, with the use of a components database. In: Wittmann J, Wieland R. (eds.) *Simulation in Umwelt- und Geowissenschaften. Workshop Müncheberg 2015*. Aachen: Shaker Verlag, 2015.
20. Marchionni V, Cabrala M, Amadoa C, Covasa D. Water supply infrastructure cost modelling. *Procedia Engineering*. 2015; 119: 168–173.
21. Neelakantan T R, Suribabu C R, Lingireddy S. Optimisation procedure for pipe-sizing with break-repair and replacement economics. *Water SA*. April 2008; 34(2): 217–224.
22. Norris J R. *Continuous-time Markov chains*. Cambridge University Press, 1997.
23. Nowak P, Romaniuk M. A fuzzy approach to option pricing in a Levy process setting. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*. 2013; 23(3): 613–622.
24. Nowak P, Romaniuk M. Application of Levy processes and Esscher transformed martingale measures for option pricing in fuzzy framework. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2014; 263: 129–151.
25. Rokstad M M, Ugarelli R M. Minimising the total cost of renewal and risk of water infrastructure assets by grouping renewal interventions. *Reliability Engineering and System Safety*. 2015; 142: 148–160.
26. Romaniuk M. Application of Markov chain and interest rate process for forecasting of costs of maintenance of pipelines. In: Wittmann J, Wieland R. (eds.) *Simulation in Umwelt- und Geowissenschaften. Workshop Müncheberg 2015*. Aachen: Shaker Verlag, 2015.
27. Romaniuk M, Nowak P. *Monte Carlo methods: theory, algorithms and applications to selected financial problems*. Warszawa: ICS PAS, 2015.
28. Scheidegger A, Leitão J P, Scholten L. Statistical failure models for water distribution pipes – A review from a unified perspective. *Water Research*. 2015; 83: 237–247.
29. Shamir U, Howard C D D. Analytical approach to scheduling pipe replacement. *J. Am. Water Works Assoc.* 1979; 74(3): 140–147.
30. Williams J, Steele N, Robinson H. Reasoning with Non-Numeric Linguistic Variables. *Journal of Computing and Information Technology*. 2002; 10(4): 261–281.
31. Zadeh L A. Fuzzy sets. *Information and Control*. June 1965; 8(3): 338–353.
32. Zimoch I, Szymik-Gralewska J. Risk assessment methods of a water supply systems in terms of reliability and operation costs. In: Membretti S, Brebbia C A. (eds.) *Urban Water II*. Southampton: WIT Press, 2014.