

Mieszanie układu ziarnistego jako proces markowa

Streszczenie

W pracy przedstawiono wyniki badań doświadczalnych i modelowych procesu mieszania niejednorodnego układu ziarnistego w mieszalniku bębnowym. Jako modelu użyto jednorodny proces Markowa, w którym intensywności przejścia wyznaczono doświadczalnie. Stwierdzono, że w omawianym przypadku zaproponowany model matematyczny stanowi dobre przybliżenie danych eksperymentalnych.

Słowa kluczowe: jednorodny proces Markowa, mieszalnik bębnowy, intensywności przejścia

Wprowadzenie

W przypadku mieszania materiałów ziarnistych w mieszalniku statycznym lub podczas wysypu ze zbiornika sama konstrukcja mieszalnika lub technologia procesu sugeruje podział czasu mieszania na określone etapy. Wynikiem takiego podziału jest zastosowanie jako modelu matematycznego procesu Markowa z dyskretnym czasem oraz dyskretną przestrzenią stanów, czyli tak zwanego łańcucha Markowa. Taki model był intensywnie badany w pracach: [Chen S. J. i poz. 1972, Boss J. i Łapin Z. 1995]. W przypadku mieszania materiałów ziarnistych w mieszalniku bębnowym bardziej naturalne wydaje się przyjęcie w modelu ciągłego czasu lub ciągłej przestrzeni stanów albo obu tych parametrów jednocześnie.

Opis modelu

Ciągły proces Markowa jest opisany za pomocą układu równań

$$P_j'(t) = q_j P_j(t) + \sum_{i \neq j} q_{ij} P_i(t), \quad (1)$$
$$i, j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

w którym

$$q_j = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (p_{jj}(t, t + \Delta t) - 1) \quad (2)$$

oraz

$$q_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} p_{ij}(t, t + \Delta t). \quad (3)$$

Wielkości q_j i q_{ij} noszą nazwę intensywności przejścia i stanowią parametry w modelu stochastycznym z czasem ciągłym.

Intensywności przejścia q_{ij} tworzą macierz kwadratową o wymiarze r postaci:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1j} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2j} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{i1} & q_{i2} & \dots & q_{ij} & \dots & q_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nj} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Występujące w równaniach (wzór nr 2) i (wzór nr 3) wielkości $p_{ij}(t, t+\Delta t)$ są tak zwanymi prawdopodobieństwami przejścia ze stanu i -tego do stanu j -tego w czasie od t do $t+\Delta t$. W celu wyznaczenia intensywności przejścia prawdopodobieństwa przejścia wyznacza się doświadczalnie.

W postaci macierzowej układ (wzór nr 1) ma postać:

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \mathbf{Q} \mathbf{P}(t) \quad (5)$$

Jego rozwiązanie po rozwinięciu w szereg ma formę:

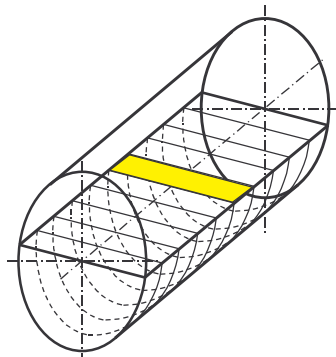
$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{Q}t}{1!} + \frac{\mathbf{Q}^2 t^2}{2!} + \dots = \mathbf{I} + \sum_{i>0} \frac{\mathbf{Q}^i t^i}{i!} \quad (6)$$

gdzie \mathbf{I} jest macierzą jednostkową o takim samym wymiarze jak \mathbf{Q} .

Opis badań

Wyznaczanie prawdopodobieństwa przejścia przeprowadzono w modelowym mieszalniku bębnowym o przekroju kołowym, przedstawionym schematycznie na rysunku (rys. 1).

Badania zostały przeprowadzone z użyciem niejednorodnego układu ziaren. Rolę fazy rozpraszającej stanowiły ziarna łubinu o przeciętnej średnicy $d_1 = 5,9 \text{ mm}$ i gęstości $\rho_1 = 780 \text{ kg/m}^3$, a trasera kulki agalitu o średnicy $d_2 = 2,9 \text{ mm}$ i gęstości $\rho_2 = 1680 \text{ kg/m}^3$.



Rys. 1. Schemat bębna mieszalnika z kasetą
Fig. 1. Diagram of a mixer drum with a cassette

Przyjęto prędkość obrotową bębna mieszalnika $n = 30 \text{ min}^{-1}$, a stopień wypełnienia bębna $f = 0,3$.

Badania przeprowadzano następująco: do pustego bębna mieszalnika wstawiano kasetę dzielącą bęben na segmenty. Do jednego segmentu bębna wsypywano ziarna traseru, do pozostałych ziarna fazy rozpraszającej. Po napełnieniu kasety obracano bęben o 180 stopni, po czym usuwano z niego kasetę. Następnie wyzerowywano licznik obrotów i uruchamiano mieszalnik. Po upływie założonego czasu mieszania mieszalnik zatrzymywano, do bębna wkładano kasetę a następnie obracano bęben o 180 stopni w celu zasypania do niej wymieszanego materiału. Ziarna z kolejnych segmentów były wydobywane a ich skład analizowany. Procedurę tę powtarzano wsypując ziarna traseru do kolejno do wszystkich segmentów kasety.

Jeżeli przed mieszaniem traser znajdował się w i -tym segmencie bębna mieszalnika wtedy koncentrację ziaren traseru w j -tym segmencie po upływie czasu mieszania t traktowano jako prawdopodobieństwo przejścia ziaren z segmentu i do segmentu j w czasie Δt i oznaczano $p_{ij}(t, t+\Delta t)$. Te prawdopodobieństwa są elementami macierzy prawdopodobieństwa $P(t)$.

Dla każdego układu ziaren wyznaczono cztery macierze prawdopodobieństwa przejścia $P(t)$ dla czasu $t = 5, 10, 15, 30$, i 45 s. Przykład macierzy dla czasu $t = 5$ s przedstawiono w tabeli (tab. 1).

Ponieważ nie jest możliwe doświadczalne wyznaczenie współczynników q_{ij} dla czasu $\Delta t = 0$, posłużono się metodą przybliżoną. Metoda ta polegała na tym, że z elementów p_{ij} o takich samych indeksach, pochodzących z powyższych macierzy zbudowano wykresy $p_{ij} / \Delta t = f(t)$ i ekstrapolowano wielkości q_{ij} w punkcie $\Delta t = 0$.

Tab. 1 Macierz prawdopodobieństwa przejścia dla badanego układu wyznaczona w czasie 5 s

Tab. 1 Matrix of transition probability for the system being tested determined within 5 s

0,297	0,400	0,244	0,059	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,179	0,366	0,314	0,131	0,010	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,051	0,246	0,338	0,246	0,109	0,010	0,000	0,000	0,000	0,000
0,008	0,113	0,265	0,305	0,211	0,093	0,005	0,000	0,000	0,000
0,000	0,011	0,127	0,246	0,290	0,232	0,091	0,003	0,000	0,000
0,000	0,000	0,014	0,111	0,239	0,311	0,230	0,090	0,005	0,000
0,000	0,000	0,000	0,011	0,111	0,269	0,327	0,218	0,062	0,002
0,000	0,000	0,000	0,000	0,028	0,152	0,288	0,306	0,190	0,036
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,030	0,183	0,323	0,330	0,134
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,059	0,239	0,364	0,338

Wyniki obliczeń intensywności przejścia przedstawiono w postaci macierzowej w tabeli (tab. 2).

Tab. 2 Macierz intensywności przejścia q_{ij}

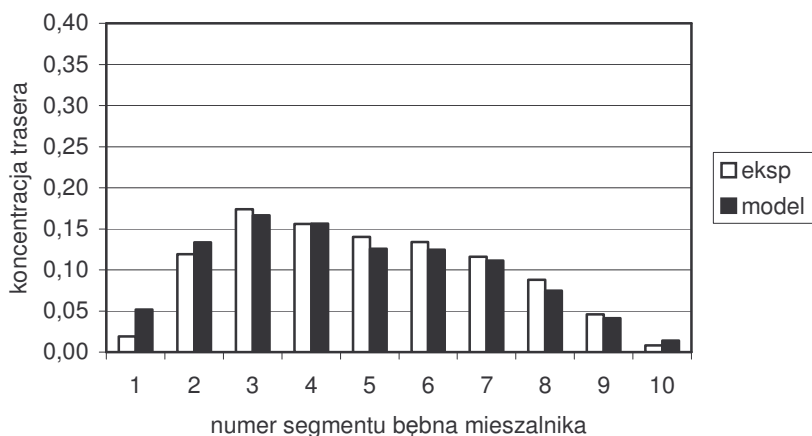
Tab. 2 Matrix of transition rate q_{ij}

-0,235	0,145	0,080	0,010	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,070	-0,210	0,105	0,035	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,017	0,093	-0,233	0,093	0,030	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,032	0,100	-0,229	0,069	0,028	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,040	0,090	-0,238	0,080	0,028	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,031	0,080	-0,227	0,088	0,028	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,032	0,091	-0,219	0,076	0,020	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,008	0,048	0,098	-0,234	0,068	0,012
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,003	0,058	0,110	-0,221	0,050
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,012	0,070	0,128	-0,210

Zawarte w tabeli (tab. 2) wartości intensywności przejścia wykorzystano w dalszym ciągu pracy rozwiązując układ (wzór nr 1) w celu wyznaczenia koncentracji składnika kluczowego w poszczególnych segmentach mieszalnika po pewnym czasie mieszania.

W celu sprawdzenia adekwatności modelu Markowa wykonano badania rozkładu ziaren składnika kluczowego w poszczególnych segmentach mieszalnika dla różnych wartości czasu mieszania, przy czym przed mieszaniem traser umieszczano w piątym segmencie kasety mieszalnika. Otrzymane wyniki porównywano z wartościami obliczonymi na podstawie ciągłego procesu Markowa.

Wyniki badań przedstawiono graficznie w postaci wykresów na rysunku (rys. 2).



Rys. 2. Koncentracja traseru w poszczególnych segmentach po 90 sekundach mieszania wyznaczona na drodze doświadczalnej oraz na podstawie modelu Markowa. Przed mieszaniem traser znajdował się w piątym segmencie bębna mieszalnika

Fig. 2. Tracer concentration in individual segments after 90-sec mixing determined experimentally and on the basis of Markov's model. The tracer before mixing was situated in the fifth segment of the mixer drum

Wnioski

Analizując wykresy koncentracji traseru w poszczególnych segmentach bębna mieszalnika można zauważyć daleko idącą zgodność danych uzyskanych z modelu Markowa z danymi otrzymanymi na drodze doświadczalnej. Zgodność modelu i danych doświadczalnych rośnie wraz z czasem

Bibliografia

Chen S. J., Fan L. T., Watson C. A.: The mixing of solid particles in a motionless mixer - a stochastic approach. Am. Inst. Chem. Eng. J. Vol. 18, No 5, 984-989, 1972.

Boss J., Łapin Z.: Modelowanie procesu mieszania materiału ziarnistego metodą wysypu ze zbiornika. Cement Wapno Gips nr 10/1895, s. 268-272

Mixing of granular system as markov's process

Summary:

The work presents experimental and model results of investigations on the process of mixing the heterogeneous granular system in a drum mixer. Markov's homogenous process was used as a model, where the transition rate was determined experimentally. It was found that the assumed

mathematical model in the case being discussed was in good agreement with experimental data.

Keywords: Markov's homogenous process, drum mixer, transition rate