

Wacław SZCZEŚNIAK, Magdalena ATAMAN

PLASKIE STRUKTURY PRZEGUBOWE OBCIĄŻONE IMPULSEM SIŁY

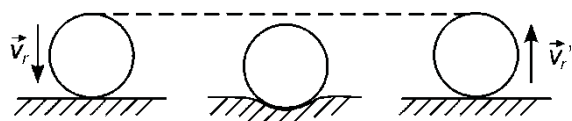
Streszczenie

W artykule omówione zostały dwa zadania dotyczące obciążenia zadaniem impulsem siły płaskich, połączonych przegubowo, sztywnych prętów. Stosując klasyczną teorię uderzenia wyznaczono prędkości, prędkości kątowe, impulsy wewnętrzne w węzłach oraz energię kinetyczną analizowanych układów prętowych tuż po zadziałaniu impulsów. Przeanalizowano również strukturę o węzłach sztywnych. W obszernym wstępie podano podstawowy klasycznej teorii zderzenia i rachunku impulsów sił.

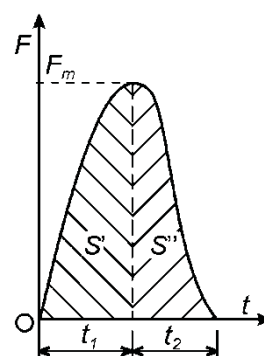
WSTĘP

Uderzeniem (zderzeniem) nazywamy taką interakcję dwóch ciał, w której czas przebiegu zjawiska jest bardzo mały, co prowadzi do raptownej zmiany ich prędkości, a wyniku, do powstania bardzo dużych sił udarowych działających na oba ciała. Czas zderzenia jest proporcjonalny do rozmiarów zderzających się ciał, zależy również od własności mechanicznych materiału i prędkości rozchodzenia się fal podłużnych w tych ciałach. Zwykle, przy uderzeniach małych ciał czas zderzenia jest mały, są to setne lub tysięczne sekundy. Przy dużych rozmiarach, na przykład w przypadku zderzenia się dwóch planet, czas ten wzrasta. Przy rozwiązywaniu zadań z teorii uderzenia wykorzystuje się współcześnie trzy teorie: teorię klasyczną, teorię deformacyjną (kontaktową) oraz teorię falową. Każda z nich ma swoje wady i zalety. Uniwersalnej teorii zderzenia, która uwzględniałaby wszystkie osobliwości i niuanse tego procesu fizycznego nie ma i należy ją stworzyć. W konkretnych zadaniach technicznych niejednokrotnie należy skorzystać z dwóch lub trzech teorii jednocześnie. Najstarsza, klasyczna teoria uderzenia została opracowana ponad 300 lat temu i wiąże się z nazwiskami Galileusza, Huygensa, Newtona i innymi [1-3]. Bazuje ona na podstawowych prawach i zasadach mechaniki klasycznej jak prawo zachowania pędu, momentu pędu, energii kinetycznej oraz na definicji współczynnika restytucji Newtona. Współczynnik restytucji uwzględnia w prosty sposób stratę energii mechanicznej (kinetycznej) w procesie zderzenia. Prowadzi wprost do trzech przypadków zderzenia idealnie sprężystego, plastycznego i sprężysto-plastycznego. W przypadku klasycznej teorii uderzenia możemy ściśle wyznaczyć prędkości i prędkości kątowe ciał tuż po zderzeniu, następnie impulsy pomiędzy zderzającymi się ciałami oraz impulsy sił udarowych w więzłach (impulsy reakcji). Obliczenia takie, oczywiście są wykonane z dokładnością do współczynnika restytucji. W klasycznej teorii uderzenia za miarę interakcji ciał przyjmuje się nie siły udarowe, ale ich impulsy. Inne siły, takie jak siła ciężkości, siły bezwładności d'Alemberta są w tej teorii wielkościami drugiego rzędu i ich istnienie, w odróżnieniu od impulsów sił, pomijamy. Klasyczna teoria nie pozwala jednak określić maksymalnej siły uderzenia i maksymalnych odkształceń w strefie kontaktu zderzających się dwóch ciał. Wszyst-

kie te wielkości można wyznaczyć przy zastosowaniu teorii deformacyjnej i falowej. Teorię deformacyjną opracował w 1881 roku Herz [4-5]. Kształty zderzających się ciał powinny jednak mieć powierzchnię obrotową drugiego rzędu: kule, elipsoidy, paraboloidy, hiperboloidy. Dalsze badania i uogólnienia teorii podał Dinnik w rozprawie [6]. Podstawą w teorii deformacyjnej jest przyjęcie zależności pomiędzy siłą uderzenia $F(\alpha)$ i wywołaną przez nią deformacją α . Zależność ta jest zwykle określana doświadczalnie dla różnych materiałów i jest nieliniowa. Zakres teorii Herza w przypadku dynamiki jest ograniczony, bowiem w strefie kontaktu przy zderzeniu pojawiają się obszary uplastycznienia oraz lepkość, która odgrywa tu pierwszorzędą rolę. Teoria falowa, której korzenie sięgają prac Bernoullie'go i Sait-Venanta [7-11] bazuje na ruchu fal podłużnych w ciałach wywołujących ściskanie lub rozciąganie materiału. Model falowy rozpatrywany w ramach dynamicznej teorii sprężystości wymaga skomplikowanych metod matematycznych przy analitycznym rozwiązywaniu zadań. W ramach tej teorii rozwiązano szereg zadań dotyczących belek (uderzenie sztywnego ciała w koniec belki wspornikowej), płyt i powłok. Obie ostatnie teorie wykorzystano w pracach [1-3], i [13]. Zgodnie z oznaczeniami na rysunku 1 proces uderzenia możemy podzielić na trzy fazy. Ruch przed zderzeniem, właściwy proces uderzenia i ruch ciał po zderzeniu.



Rys. 1. Trzy fazy procesu zderzenia



Rys. 2. Strefa wzrostu S' i strefa spadku S'' impulsu, gdzie $\zeta = \frac{S''}{S'}$

Podstawą teoretyczną klasycznej teorii uderzenia jest drugie prawo Newtona, scałkowane w następujący sposób:

$$\vec{M} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt} \leftrightarrow \vec{r} \times \vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \int_{t_1}^{t_2} J d\vec{\omega} = J(\vec{\omega}' - \vec{\omega}). \quad (1)$$

Równania (1), stanowiąc całkową postać prawa zachowania pędu i krętu, stanowią podstawę teoretyczną klasycznej teorii zderzenia. Istotną sprawą w klasycznej teorii jest definicja współczynnika restytucji $\zeta \in \langle 0, 1 \rangle$. W literaturze przedmiotu istnieją dwa sposoby interpretacji tego współczynnika. W pierwszym współczynnik restytucji, zapisany zgodnie z oznaczeniami na rysunku 1 następująco: $\zeta = -\frac{v'_{wz}}{v_{wz}}$, można interpretować jako wektorowy stosunek względnej prędkości po zderzeniu do prędkości względnej przed zderzeniem. Inna interpretacja jest pokazana na rysunku 2. Tutaj całkowity impuls siły jest rozdzielony na dwie części, strefę wzrostu S' oraz strefę spadku S'' . Współczynnik ζ jest stosunkiem S'' do S' ,

$$S' = \int_0^{t_1} F dt, \quad S'' = \int_{t_1}^{t_2} F dt, \quad S = S' + S'', \quad \zeta = \frac{S''}{S'}. \quad (2)$$

Jak pokazują badania doświadczalne współczynnik restytucji może być określony w sposób bardziej dokładny w zależności od prędkości zderzenia. Na przykład przy prędkościach do 6 m/s liczne badania prowadzą do wzoru:

$$\zeta = a_0 + a_1 v_n + a_2 v_n^2. \quad (3)$$

Tablica 1. Niektóre wartości współczynników $a_0 \div a_2$, oraz współczynnika restytucji ζ według badań doświadczalnych [1]

| L.p. | Materiał zderzających się ciał | Współczynniki | | | Średnia wartość ζ | Wartość ζ przy $v = 6 \text{ m/s}$ |
|------|--------------------------------|---------------|----------|----------|-------------------------|--|
| | | a_0 | a_1 | a_2 | | |
| 1. | stal o stal (hartowana) | 0,984 | -0,08900 | 0,00470 | 0,814 | 0,719 |
| 2. | stal o stal (miękka) | 0,962 | -0,12270 | 0,01070 | 0,694 | 0,615 |
| 3. | stal o żeliwo | 0,735 | -0,01905 | 0,00095 | 0,667 | 0,656 |
| 4. | stal o brąz | 0,892 | -0,09930 | 0,00733 | 0,456 | 0,360 |
| 5. | Stal o mosiądz | 0,520 | -0,05500 | 0,00500 | 0,407 | 0,370 |
| 6. | stal o ołów | 0,302 | -0,05770 | 0,00567 | 0,186 | 0,160 |
| 7. | brąz o brąz | 0,914 | -0,10200 | 0,00800 | 0,678 | 0,590 |
| 8. | brąz o mosiądz | 0,734 | -0,07870 | 0,00467 | 0,529 | 0,430 |
| 9. | żeliwo o żeliwo | 0,814 | -0,05870 | 0,00467 | 0,679 | 0,630 |
| 10. | mosiądz o mosiądz | 0,518 | -0,05230 | 0,00433 | 0,400 | 0,360 |
| 11. | szkło o szkło | 0,994 | -0,04700 | 0,00300 | 0,875 | 0,820 |
| 12. | ołów o ołów | 0,224 | -0,00367 | -0,00030 | 0,206 | 0,190 |
| 13. | kość słoniowa o kość słoniową | 0,974 | -0,08030 | 0,00633 | 0,769 | 0,720 |
| 14. | drewno o drewno (wiąz) | 0,780 | -0,07670 | 0,00667 | 0,613 | 0,560 |

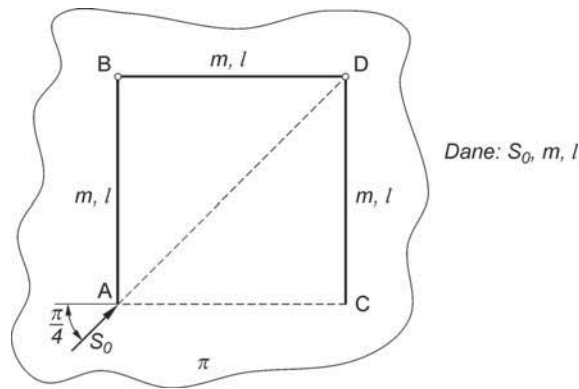
W tablicy 1 podano kilkanaście wartości współczynników ζ oraz wartości współczynników a_0 , a_1 i a_2 . W przypadku stali hartowanej i miękkiej dokładniej wartości współczynnika restytucji ζ opisują, wyznaczane doświadczalnie, wzory wielomianów trzeciego stopnia [1]:

- stal hartowana: $\zeta = 0,9970 - 0,0961v_n + 0,001136 v_n^2 - 0,000548v_n^3$,
- stal miękka: $\zeta = 0,9864 - 0,1569 v_n$.

1. PŁASKIE STRUKURY TYPU „C” POD OBCIĄŻENIEM IMPULSEM SIŁY

1.1. Przykład 1 – struktura przegubowa

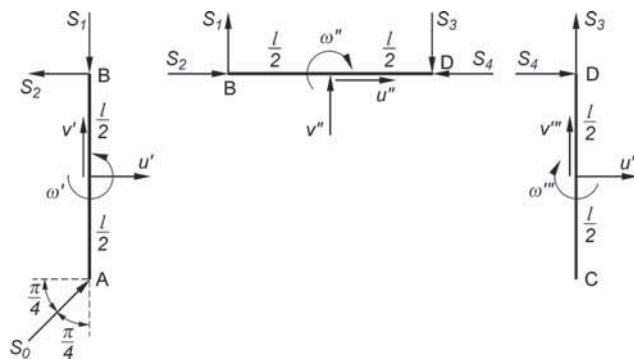
Trzy jednakowe pręty AB, BC i DC o masie m i długości l każdy, tworzą niepełny kwadrat jak na rysunku 3. Pręty połączone są przegubowo w węzłach B i D. W węzle A przyłożono zadany impuls siły S_0 w kierunku AD. Pręty spoczywają na idealnie gładkim, sztywnym podłożu. Należy wyznaczyć prędkości, prędkości kątowe, wewnętrzne impulsy w węzłach oraz energię kinetyczną układu w chwili tuż po przyłożeniu danego impulsu siły S_0 . Zgodnie z oznaczeniami na rysunku 4 po rozcięciu układu w przegubach, mamy do czynienia w układzie z 13 niewiadomymi: u' , v' , u'' , v'' , u''' , v''' , ω' , ω'' , ω''' , S_1 , S_2 , S_3 i S_4 .



Rys. 3. Schemat dynamiczny w przykładzie 1

Do dyspozycji mamy 9 klasycznych równań teorii uderzenia i 4 równania zgodności prędkości przemieszczeń u i v w węzłach B i D. Trzydzieści równań zapisujemy w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
 S_0 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_2 &= m u', & S_0 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_1 &= m v', & \frac{1}{12} m l^2 \omega' &= \left(S_0 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_2 \right) \frac{l}{2}, \\
 S_2 - S_4 &= m u'', & S_1 - S_3 &= m v'', & \frac{1}{12} m l^2 \omega'' &= \left(S_0 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_2 \right) \frac{l}{2}, \\
 S_4 &= m u''', & S_3 &= m v''', & S_4 \frac{l}{2} &= \frac{1}{12} m l^2 \omega''', & u' - \omega' \frac{l}{2} &= u'', \\
 v' &= v'' + \omega' \frac{l}{2}, & u'' &= u''' + \omega'' \frac{l}{2}, & v'' - \omega'' \frac{l}{2} &= v'''.
 \end{aligned} \tag{4}$$



Rys. 4. Układ impulsów, prędkości i prędkości kątowych w chwili tuż po przyłożeniu impulsu S_0 w węzle A

Rozwiązując układ trzynastu liniowych równań otrzymujemy odpowiedzi:

$$\begin{aligned}
 u' &= \frac{17 S_0}{12 m \sqrt{2}}, & v' &= \frac{8 S_0 \sqrt{2}}{21 m}, & u'' &= \frac{S_0}{3 m \sqrt{2}}, & v'' &= \frac{S_0}{3 m \sqrt{2}}, \\
 u''' &= -\frac{S_0}{12 m \sqrt{2}}, & v''' &= -\frac{S_0 \sqrt{2}}{21 m}, & \omega' &= \frac{7 S_0}{2 l m \sqrt{2}}, & \omega'' &= \frac{3 S_0 \sqrt{2}}{7 l m},
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\omega''' = -\frac{S_0}{2 l m \sqrt{2}}, \quad S_1 = \frac{S_0}{21\sqrt{2}}, \quad S_2 = -\frac{5 S_0}{12\sqrt{2}}, \quad S_3 = -\frac{S_0 \sqrt{2}}{21}, \quad S_4 = -\frac{S_0 \sqrt{2}}{12\sqrt{2}}.$$

Energię kinetyczną układu, w chwili tuż po zadziałaniu impulsu, po wykorzystaniu odpowiedzi (5), zapisujemy w następujący sposób:

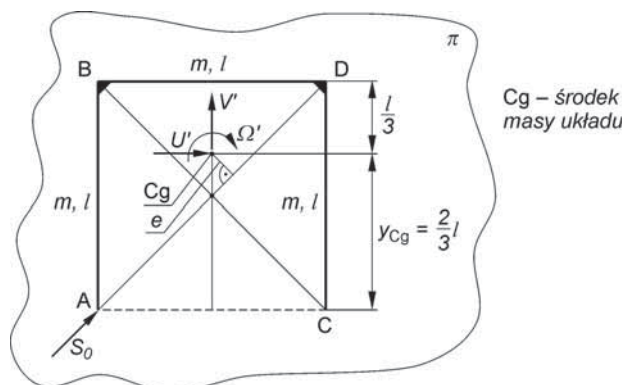
$$E_k = \frac{1}{2} m[(u')^2 + (v')^2 + (u'')^2 + (v'')^2 + (u''')^2 + (v''')^2] + \frac{1}{2} m \frac{l^2}{12} [(\omega')^2 + (\omega'')^2 + (\omega''')^2] = \frac{55}{56} \frac{S_0^2}{m}. \quad (6)$$

1.2. Przykład 2 – struktura sztywna

Jeśli układ prętów z przykładu 1 byłby sztywno połączony w węzłach B i D, tworząc poziomą ramę leżącą na poziomym podłożu, to zgodnie z oznaczeniami na rysunku 5 zadanie rozwiążemy wykorzystując własności środka masy układu trzech prętów. Mamy zatem:

$$y_{Cg} = \frac{2 \frac{l}{2} + m l}{3 m} = \frac{2}{3} l, \quad S_0 \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 m U' \quad \leftrightarrow \quad U' = V' = \frac{S_0 \sqrt{2}}{6 m}, \quad J_{Cg} = \frac{11}{12} m l^2, \\ e = \frac{l}{6\sqrt{2}}, \quad S_0 e = J_{Cg} \Omega' \quad \leftrightarrow \quad \Omega' = \frac{2 S_0}{11 m l \sqrt{2}}, \quad (7)$$

$$E_k = \frac{1}{2} 3m[(U')^2 + (V')^2] + \frac{1}{2} J_{Cg} (\Omega')^2, \quad E_k = \frac{23}{132} \frac{S_0^2}{m}.$$



Rys. 5. Układ prędkości i prędkości kątowej w układzie sztywnym tuż po przyłożeniu impulsu siły S_0

Z odpowiedzi (6) i (7) wynika, że energia kinetyczna od obciążenia impulsowego jest mniejsza od energii kinetycznej w przypadku struktury o sztywnych węzłach.

2. PŁASKIA STRUKTURA PRZEGUBOWA TYPU „Z” POD OBCIĄŻENIEM IMPULSEM SIŁY

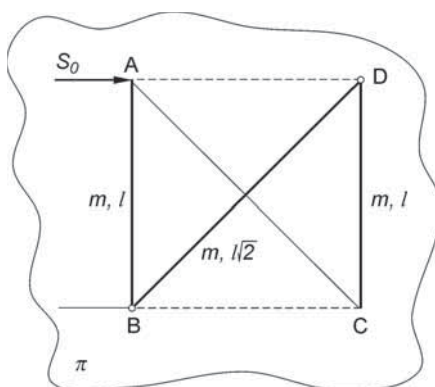
2.1. Przykład 3

Jeśli układ trzech prętów ABDC o jednakowych masach i różnych długościach byłby taki jak na rysunku 6, i spoczywał na gładkiej poziomej podłodze, a impuls S_0 byłby przyłożony poziomo w punkcie A, to energia kinetyczna wynosiłaby $\frac{185}{114} \frac{S_0^2}{m}$. Wykorzystując metodę

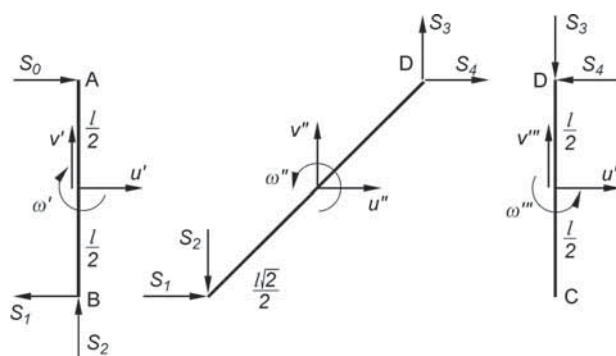
rozwiązania w poprzednim zadaniu udowodnić, że wynik ten jest prawidłowy. Wyznaczyć również prędkości, prędkości kąto- we prętów tuż po zadzia- łaniu impulsu.

Wykorzystując oznaczenia na rysunku 7, prowadzi do 13 równań teorii zderzenia i równania zgodności prędkości przemieszczeń w węzłach zapisujemy w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
 S_0 - S_1 &= m u', & S_2 &= m v', & \frac{1}{12} m l^2 \omega' &= (S_0 + S_1) \frac{l}{2}, \\
 S_1 + S_4 &= m u'', & S_3 - S_2 &= m v'', & \frac{1}{12} m (\sqrt{2} l)^2 \omega'' &= (S_1 - S_2) \frac{l}{2} + (S_3 - S_4) \frac{l}{2}, \\
 -S_4 &= m u''', & -S_3 &= m v''', & S_4 \frac{l}{2} &= \frac{1}{12} m l^2 \omega''', & u' - \omega' \frac{l}{2} &= u'' + \omega'' \frac{l}{2}, \\
 v' &= v'' - \omega'' \frac{l}{2}, & u'' - \omega'' \frac{l}{2} &= u''' - \omega''' \frac{l}{2}, & v'' + \omega'' \frac{l}{2} &= v'''.
 \end{aligned} \tag{8}$$



Rys. 6. Schemat dynamiczny w przykładzie obliczeniowym 2



Rys. 7. Trzynaście niewiadomych impulsów sił w węzłach i prędkości w środkach masy prętów

W wyniku rozwiązania układu trzynastu równań, otrzymujemy następujące odpowiedzi:

$$\begin{aligned}
 u' &= \frac{157 S_0}{114 m}, & v' &= \frac{3 S_0}{19 m}, & u'' &= -\frac{S_0}{3 m}, & v'' &= 0, \\
 u''' &= -\frac{5 S_0}{114 m}, & v''' &= -\frac{3 S_0}{19 m}, & \omega' &= \frac{71 S_0}{19 m l}, & \omega'' &= -\frac{6 S_0}{19 m l},
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\omega''' = -\frac{5S_0}{19ml}, \quad S_1 = -\frac{43S_0}{114}, \quad S_2 = -\frac{3S_0}{19}, \quad S_3 = -\frac{3S_0}{19}, \quad S_4 = \frac{5S_0}{114}.$$

Energię kinetyczną układu, w chwili tuż po zadziałaniu impulsu, po wykorzystaniu odpowiedzi (9), zapisujemy w następujący sposób:

$$E_k = \frac{1}{2} m[(u')^2 + (v')^2 + (u'')^2 + (v'')^2 + (u''')^2 + (v''')^2] + \frac{1}{2} m \frac{l^2}{12} [(\omega')^2 + (\omega''')^2] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{12} m(\sqrt{2}l)^2 (\omega'')^2 \right] = \frac{185}{114} \frac{S_0^2}{m}. \quad (10)$$

PODSUMOWANIE

W artykule rozwiązano dwa zadania płaskich struktur przegubowych obciążonych impulsem siły oraz jedną strukturę o węzłach sztywnych. Struktury spoczywają poziomo na idealnie gładkim, sztywnym podłożu. Zastosowanie klasycznej teorii uderzenia, rachunku impulsów i równań zgodności prędkości przemieszczeń z więzami doprowadza do układu 13-stu równań z niewiadomymi kinematycznymi prędkości środków prętów, prędkości kątowych prętów oraz wewnętrznych impulsów sił. Wyznaczono za każdym razem również energię kinetyczną układu tuż po zderzeniu. Podano obszerny wstęp, w którym omówiono trzy istniejące teorie uderzenia.

BIBLIOGRAFIA

1. Szcześniak W., Ataman M.: *Selected problems of the classic theory of impact*. Logistyka 6/2010, pp. 3305-3310.
2. Morozow S.J.: *Soudarenije tiel. Kłasiczeskaja teoria udara. Cz. 1*. Archangielsk 2001.
3. Aleksandrow E.W., Sokoliński W.B.: *Prikladnaja teoria i rasczety udarnych sistem*. Moskwa, Nauka 1969.
4. Batujew G.S. i inni.: *Inżynieryjne metody issledowanija udara*. Moskwa, Maszynostrojenije 1969.
5. Hertz H.: *Über die Berührung fester elastischer Körper*. Crell'es Jour. Bd. 92 1881.
6. Hertz H.: *Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Harte*. Gesammelte Werke. Bd. 1 Leipzig 1895.
7. Dinnik A.N.: *Udar i zżatije uprugich tiel*. Izobrannyje trudy. T. 1. AN SSSR, Kijew 1952.
8. Goldsmith W.: *Impact*, Edward Arnold, London 1960.
9. Szcześniak W., Ataman M., Kozyra Z.: *O uderzeniu plastycznym układu czterech prętów przegubowych w sztywne podłoże*. Theoretical Foundations of Civil Engineering. Vol. 12, t. 1, 2004, pp. 399-408.
10. Szcześniak W., Ataman M.: *O zderzeniach układów kul pomiędzy sobą i podłożem*. Theoretical Foundations of Civil Engineering vol. 13, 2005, pp. 601-610.
11. Szcześniak W.: *Dynamika analityczna i <<MATHEMATICA>>*. OWPW, Warszawa 2005.
12. Szcześniak W.: *Dynamika teoretyczna dla zaawansowanych*. OWPW, Warszawa 2007.
13. Gryboś R.: *Teoria uderzenia w dyskretnych układach mechanicznych*. PWN, Warszawa 1969.
14. Szcześniak W., Ataman M.: *Particular cases of problems of the classic theory of impact*. Logistyka Nr 6/2010, pp. 3311-3318.
15. Panowko Ja. G.: *Wwiedienije w teorju miechaniczeskogo udara*. Nauka, Moskwa 1977.
16. Johnson W.: *Impact Strength of Materials*. Edward Arnold, London 1972.

PLANE ARTICULATED STRUCTURES UNDER IMPULSIVE LOAD

Abstract

Two problems concerning plane structures of articulated, rigid rods under impulse loading are discussed in the paper. The classical theory of impact was used for determination of speed, angular velocity, internal impulses in articulated joints and for determination of kinetic energy of the analysed rod systems, immediately after application of impulses. The problem concerning plane structure of rods with rigid nodes was discussed also. Classical theory of impact and bases of calculus of impulses in the comprehensive introduction were presented.

Autorzy:

prof. zw. dr hab. inż. **Wacław Szczesniak** – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, 00-637 Warszawa, Al. Armii Ludowej 16, e-mail: w.szczeniak@il.pw.edu.pl

dr inż. **Magdalena Ataman** – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, 00-637 Warszawa, Al. Armii Ludowej 16, e-mail: m.ataman@il.pw.edu.pl