

Szczepan Opach

Sieć Badawcza Łukasiewicz – Instytut Napędów i Maszyn Elektrycznych KOMEL, Katowice

ANALITYCZNE I NUMERYCZNE OBLICZENIA MAKSYMALNEGO MOMENTU PRZENOSZONEGO PRZEZ POŁĄCZENIE WCISKOWE

ANALYTICAL AND NUMERICAL CALCULATIONS OF THE MAXIMUM TORQUE TRANSMITTED BY THE INTERFERENCE FIT JOINT

Streszczenie: Artykuł przedstawia możliwości wyznaczenia maksymalnego momentu przenoszonego przez połączenie wciskowe dwóch koncentrycznych tulei o jednakowej długości, wykonanych z różnych materiałów. Analityczne rozwiązanie zagadnienia zostało zaimplementowane w arkuszu kalkulacyjnym celem weryfikacji wyników, wykonanych następnie obliczeń numerycznych z wykorzystaniem Metody Elementów Skończonych w systemie ANSYS 2021 R2. Obliczenia numeryczne wykonane na prostym modelu, miały na celu rozpoznanie możliwości systemowych w tym zakresie i wdrożenie metodologii w trudniejszych zagadnieniach kontaktowych.

Abstract: The article presents the possibilities of determining the maximum torque transmitted by a interference fit connection of two concentric sleeves of the same length, made of different materials. The analytical solution of the problem has been implemented in a spreadsheet in order to verify the results of the numerical calculations carried out using the Finite Element Method in the ANSYS 2021 R2 system. Numerical calculations made on a simple model were aimed at recognizing system capabilities in this area and implementing the methodology in more difficult contact issues.

Słowa kluczowe: ANSYS 2021 R2, połączenie wciskowe, moment maksymalny, MES

Keywords: ANSYS 2021 R2, interference fit, maximum torque, FEM

1. Wstęp

Problem wyznaczania maksymalnych obciążeń, przenoszonych przez połączenie wciskowe dwóch koncentrycznych tulei, jest klasycznym zagadnieniem akademickim w zakresie Teorii Sprężystości czy Podstaw Konstrukcji Maszyn, ale również praktyczną i stosowaną wiedzą inżynierską. Niewątpliwie zalety połączeń wciskowych (na tle innych typów połączeń) sprawiają, że są one często wybieranym sposobem montażu dwóch części, biorących udział w transmisji momentu obrotowego lub siły osiowej. Przenoszony przez połączenie wciskowe moment obrotowy M_0 lub siła osiowa F , jest równoważona odpowiednio: wypadkowym momentem powierzchniowych sił tarcia lub wypadkową, powierzchniową siłą tarcia. Siły tarcia występujące na powierzchni kontaktu dwóch części, są wynikiem działającego ciśnienia kontaktowego S , wywołanego niezerowym wciskiem Δ , oraz niezerowym współczynnikiem tarcia μ .

W literaturze można znaleźć wiele teoretycznych i eksperymentalnych analiz tego zagadnienia. Analizy najczęściej są wyprowadzane ze znanego w teorii sprężystości zadania Lamé, polegającego na wyznaczeniu wartości naprężeń

promieniowych $\sigma_r(r)$ oraz naprężeń obwodowych $\sigma_t(r)$ w przekroju poprzecznym tulei, podanej działaniu ciśnienia wewnętrznego p_a oraz zewnętrznego p_b [1,2].

W ostatnich latach coraz popularniejsze stają się również analizy numeryczne z wykorzystaniem Metody Elementów Skończonych. Najczęściej spotyka się analizy numeryczne, wykonywane na dyskretnych modelach trójwymiarowych [1,3]. W jednej z analizowanych prac, autor prowadzi badanie obciążalności momentowej połączenia wciskowego, stopniowo zwiększając obciążenie momentem w kolejnych podkrokach, aż do zerwania połączenia [3]. Należy zwrócić uwagę, że zadawanie obciążenia momentowego, zwiększającego się w kolejnych podkrokach, może prowadzić do niekontrolowanej utraty spójności modelu, na skutek dynamicznego przyspieszenia tulei, obciążonej wypadkowym, niezerowym momentem obrotowym.

W ostatnim czasie, prace badawcze skupiają się coraz częściej na określeniu wpływu jakości wykonania pasowanych części oraz sposobu ich montażu na wartość obciążalności połączenia wciskowego. W jednej z analizowanych prac au-

torzy skupili się na badaniach eksperymentalnych, wykonując próbki wału i tulei o różnych wartościach chropowatości powierzchni, chcąc określić wpływ tego parametru na wartość obciążalności połączenia [4].

Celem niniejszej pracy było przeprowadzenie analiz nośności połączeń wciskowych na numerycznych modelach dwuwymiarowych, celem ich maksymalnego uproszczenia i skrócenia czasu opracowania. Dodatkowo wolą autora była eliminacja konieczności przebudowy modelu 3D przy każdej zmianie wartości wcisku montażowego, poprzez wprowadzenie parametru offsetowego. Wreszcie zdecydowano o rezygnacji ze stosowania obciążenia momentowego, przypisanego do jednej z tulei, poprzez zastąpienie go obciążeniem przemieszczenia kąowego. Eliminuje to ryzyko nagłej utraty spójności modelu, na skutek przekroczenia wartości maksymalnego momentu wypadkowej siły tarcia spoczynkowego.

Rozwiązanie analityczne zaprezentowane w artykule, zostało opracowane w oparciu o zadanie Lamé, ale jest nieco bardziej rozbudowane w odniesieniu do prostych podręcznikowych wzorów, które bardzo często nie uwzględniają możliwości wykonania obu pasowanych części z różnych materiałów. Zostało ono zaimplementowane w arkuszu kalkulacyjnym w celu wygodnej i szybkiej weryfikacji poprawności prowadzonych analiz numerycznych.

2. Analiza teoretyczna zagadnienia w oparciu o zadanie Lamé

Rozwiązanie zostało wyprowadzone z wzorów Lamé, opisujących wartości naprężeń promieniowych $\sigma_r(r)$ oraz naprężeń obwodowych $\sigma_t(r)$ w przekroju poprzecznym tulei obciążonej ciśnieniem wewnętrznym p_a oraz zewnętrznym p_b . W obu przypadkach naprężenia te są funkcją promienia r tulei.

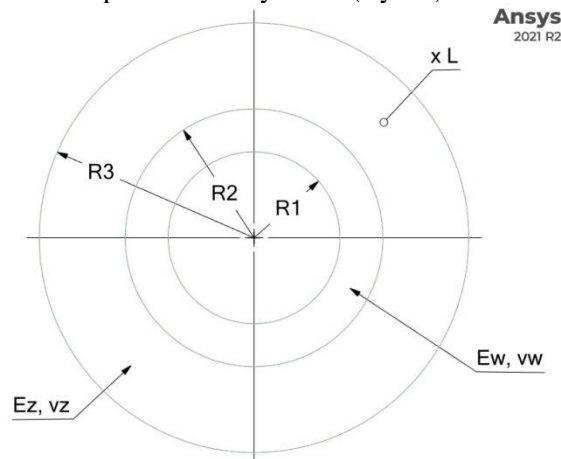
$$\sigma_t(r) = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) - \frac{p_b b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_r(r) = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) - \frac{p_b b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

gdzie: a , b – promień wewnętrzny i zewnętrzny pojedynczej tulei; p_a , p_b – ciśnienie wewnętrzne

i zewnętrzne, wywierane na powierzchnie walcowe tulei; r – analizowany promień tulei

Wymiary i stałe materiałowe analizowanego modelu przedstawia rysunek (Rys. 1).



Rys. 1. Stałe wymiarowe i materiałowe analizowanego modelu

Przyjmując, że powierzchnia wewnętrzna tulei wewnętrznej oraz powierzchnia zewnętrzna tulei zewnętrznej nie są dodatkowo obciążane żadnym ciśnieniem, można rozpisać wzory Lamé dla każdej tulei oddzielnie.

$$\sigma_{tw} = -\frac{SR_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_1^2}{R_2^2} \right)$$

$$\sigma_{rw} = -\frac{SR_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right)$$

$$\sigma_{tz} = \frac{SR_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \left(1 + \frac{R_3^2}{R_2^2} \right)$$

$$\sigma_{rz} = \frac{SR_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \left(1 - \frac{R_3^2}{R_2^2} \right)$$

Na skutek odkształcenia sprężystego tulei, wywołanego działaniem naprężeń, zdefiniowanych powyższymi wzorami, wcisk powierzchni Δ zostaje zredukowany a promienie powierzchni kontaktu są sobie równe. Opisuje to poniższe równanie.

$$\frac{R_2}{E_z} (\sigma_{tz} - \nu_z \sigma_{rz}) - \frac{R_2}{E_w} (\sigma_{tw} - \nu_w \sigma_{rw}) = \Delta$$

gdzie: E_z , E_w – Moduł Younga materiału tulei zewnętrznej i wewnętrznej; ν_z , ν_w – Liczba Poissona materiału tulei zewnętrznej i wewnętrznej; Δ – wcisk promieniowy

Podstawiając do powyższego równania, zdefiniowane wcześniej wartości naprężeń promieniowych σ_r oraz obwodowych σ_t , otrzymuje się równanie jednej zmiennej S , będącej wartością ciśnienia kontaktowego pomiędzy tuleją wewnętrzną a zewnętrzną. Dysponując wartością ciśnienia kontaktowego S , wyznacza się maksymalny moment przenoszony przez połączenie wciskowe z poniższego równania.

$$M_o = 2\pi R_2^2 LS\mu$$

gdzie: L – długość tulei, μ – współczynnik tarcia.

3. Budowa modelu poddanego analizie

Model poddany analizie składał się z dwóch koncentrycznych tulei, wykonanych z dwóch różnych materiałów, połączonych z zadaniem wciskiem promieniowym. Wymiary promieniowe R_1 , R_2 , R_3 i długość tulei L nie ulegała zmianie, natomiast wartość wcisku promieniowego Δ stanowiła jeden z parametrów, podlegających zmianie w kolejnych symulacjach. Kolejnym parametrem, który podlegał modyfikacjom, była chropowatość powierzchni kontaktu μ . Zagadnienie rozwiązano analitycznie i numerycznie dla 4 przykładowych konfiguracji wartości parametrów. Tuleja wewnętrzna została wykonana ze stali, natomiast tuleja zewnętrzna z aluminium. Wartości stałych geometrycznych oraz stałych materiałowych zaprezentowano w poniższych tabelach.

Tab. 1. Stałe geometryczne modelu badawczego

R_1	20	mm
R_2	30	mm
R_3	50	mm
L	40	mm

Tab. 2. Stałe materiałowe materiału tulei zewnętrznej – Aluminium

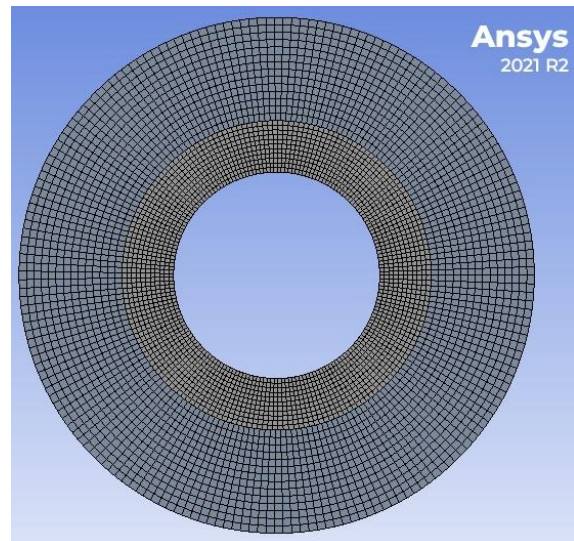
Moduł Younga	E_z	71	GPa
Liczba Poissona	ν_z	0.33	-
Gęstość	ρ_z	2770	kg/m ³

Tab. 3. Stałe materiałowe materiału tulei wewnętrznej – Stal konstrukcyjna

Moduł Younga	E_w	200	GPa
Liczba Poissona	ν_w	0.3	-
Gęstość	ρ_w	7850	kg/m ³

Model numeryczny MES został opracowany w systemie ANSYS 2021 R2 pod analizę dwuwymiarową 2D. Długość tulei L jest w tego typu

analizie zadawana jako parametr wirtualny. Jest on jednak uwzględniany przy obliczaniu sił tarcia występujących w połączeniu, gdzie siły nacisku powierzchniowego, wyprowadzane są od wartości ciśnienia kontaktowego S i właśnie pola powierzchni kontaktu. Dyskretyzacja modelu została przeprowadzona w oparciu o elementy płaskie, 4 – węzłowe, ułożone warstwowo względem promieni tulei (Rys. 2).

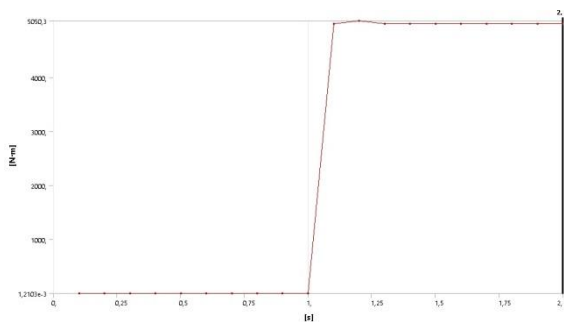


Rys. 2. Zdyskretyzowany model obliczeniowy

Do wewnętrznej krawędzi tulei, (R_1 - R_2) została przypisana podpora typu Cylindrical Support z parametrami Radial Free, Tangential Fixed w celu ograniczenia przeszywnienia modelu. Do zewnętrznej krawędzi tulei (R_2 - R_3) została przypisana podpora typu Remote Displacement z przesunięciem kątowym 2° , podzielonym na podkroki (substep). Cała analiza została podzielona na 2 główne kroki czasowe (step). W pierwszym kroku czasowym, obciążenie nie jest zadawane a modelowane zostaje jedynie odkształcenie sprężyste tulei, wywołane obecnością wcisku promieniowego Δ . Właściwe przemieszczenie kątowe zostaje zadane dopiero w drugim kroku czasowym.

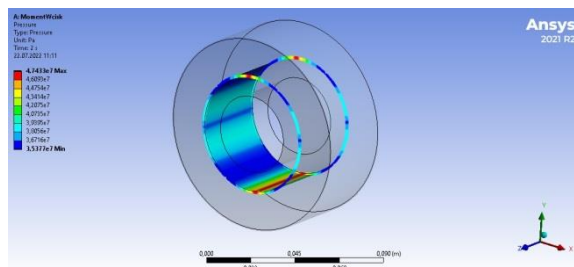
Wynikiem symulacji jest krzywa narastania wypadkowego momentu sił tarcia na powierzchni kontaktu tulei, wywołanego stopniowym przemieszczeniem kątowym krawędzi zewnętrznej tulei (R_2 - R_3) (Rys. 3). Do momentu osiągnięcia pewnej wartości momentu krytycznego, obie tuleje odkształcają się sprężysto w kierunku wymuszonego przemieszczenia. Po przekroczeniu wartości momentu krytycznego, tuleje zaczynają przemieszczać się kątowo względem siebie a połączenie wciskowe zostaje umownie zerwane.

Moment utraty nośności połączenia wciskowego, jest obserwowany na krzywej narastania momentu pewnym impulsowym zwiększeniem i obniżeniem się jego wartości, a następnie spłaszczeniem krzywej. Do chwili osiągnięcia wartości momentu krytycznego, krzywa narasta w przybliżeniu liniowo (Rys. 3).



Rys. 3. Krzywa narastania momentu przenoszono-ego przez połączenie wciskowe

Wynikiem symulacji jest również pole wartości ciśnienia kontaktowego S pomiędzy tuleją wewnętrzną a zewnętrzną, ustalone w pierwszym kroku czasowym.



Rys. 4. Ciśnienie kontaktowe S na powierzchni kontaktu tulei

4. Rozwiązanie modelu, analiza wyników badań i wnioski

Rozwiązanie analityczne i symulację numeryczną przeprowadzono dla 4 konfiguracji wartości współczynnika tarcia μ oraz wcisku promieniowego Δ . Wyprowadzone wcześniej formuły zaimplementowano w arkuszu kalkulacyjnym, co przyspieszyło obliczenia analityczne, względem zmieniających się parametrów modelu (Rys. 5, Rys. 6).

Podczas rozwiązania odczytywano wartości uzyskiwanego maksymalnego momentu M_0 , przenieszonego przez połączenie wciskowe oraz wartości ciśnienia kontaktowego S . Wyniki obliczeń zebrano w tabeli i porównano (Tab. 4).

Wymiary tulei					
R1	Promień wewnętrzny tulei wewnętrznej	20	mm	0,02	m
R2	Promień kontaktu	30	mm	0,03	m
R3	Promień zewnętrzny tulei zewnętrznej	50	mm	0,05	m
L	Długość tulei	40	mm	0,04	m
Dane materiałowe					
Ew	Moduł Younga materiału tulei wewnętrznej	200	GPa	2E+11	Pa
vw	Liczba Poissona materiału tulei wewnętrznej	0,3	n.m.		
Ez	Moduł Younga materiału tulei zewnętrznej	71	GPa	7.10E+10	Pa
vz	Liczba Poissona materiału tulei zewnętrznej	0,33	n.m.		
Δ	Wcisk promieniowy	0,05	mm	0,00005	m
μ	Współczynnik tarcia	0,61	n.m		

Rys. 5. Arkusz rozwiązania analitycznego – okno danych

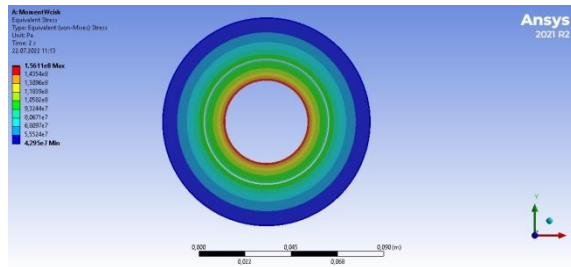
Obliczeniowe ciśnienie powierzchniowe			
36170972	Pa	36.17097	MPa
Maksymalny przenoszony moment [Nm]			
4990.83			

Rys. 6. Arkusz rozwiązania analitycznego – okno wyników

Tab. 4. Wyniki obliczeń analitycznych i numerycznych

Parametry		Analityczne		Numeryczne	
Δ	μ	Mo	S	Mo	S
mm	-	Nm	MPa	Nm	MPa
0,05	0,1	818,2	36,2	818,2	35,4
0,1	0,1	1636,3	72,3	1636,3	70,7
0,05	0,47	3845,4	36,2	3856,0	35,7
0,05	0,61	4990,8	36,2	4992,8	35,4

Jak wynika z tabeli (Tab. 4), wyniki obliczeń analitycznych oraz symulacji numerycznych wykazują niemal pełną zgodność dla wszystkich konfiguracji wartości danych wejściowych zadania. Można więc stwierdzić, że zarówno zaproponowane rozwiązanie analityczne jak i opracowany model numeryczny są merytorycznie poprawne i mogą być stosowane zamiennie. Wykorzystanie modelu numerycznego daje jednak nieco szersze możliwości w zakresie możliwych do pozyskania wyników symulacji. Przykładowo można odczytać rozkład naprężeń zredukowanych Hubera w przekroju poprzecznym tulei (Rys. 7).



Rys. 7. Wyniki symulacji numerycznej. Rozkład naprężeń zredukowanych Hubera w przekroju tulei

Stosowanie metod numerycznych daje również możliwość prowadzenia symulacji na modelach o nieco bardziej skomplikowanym kształcie, co czyni je bardziej uniwersalnymi. Możliwości takiej nie dają inżynierowi proste modele analityczne, choć z drugiej strony nie wymagają one inwestycji w drogie oprogramowanie a czas pozyskiwania zadowalającego wyniku jest zdecydowanie krótszy.

Należy ponadto zwrócić uwagę na fakt, że zarówno metody analityczne jak i dwuwymiarowe modele numeryczne 2D symulują tzw. płaski stan naprężenia PSN. Oznacza to, że z założenia nie występuje naprężenie σ_z normalne do powierzchni przekroju poprzecznego tulei, co pozwala na swobodne odkształcanie się materiału w kierunku osi obrotu $\varepsilon_z \neq 0$. Podejście takie jest uzasadnione dla cienkościennych krążków wirujących ale już niekoniecznie dla długich rur, dla których bardziej właściwym modelem jest tzw. płaski stan odkształcenia PSO ($\sigma_z \neq 0, \varepsilon_z = 0$). W systemie ANSYS 2021 R2 istnieje możliwość ustawienia rozwiązania modelu dwuwymiarowego 2D na PSO, lecz wówczas wyniki obliczeń numerycznych wykazują większą rozbieżność w odniesieniu do wyników obliczeń analitycznych.

5. Literatura

- [1]. J. Madej; Analiza nośności połączenia wciskowego (A strength analysis of the interference-fit joints); Mechanik nr 11/2018.
- [2]. Sz. Opach; Analityczne i numeryczne obliczanie wartości naprężeń w szybkoobrotowych wirnikach z magnesami trwałymi typu SPM; Maszyny Elektryczne – Zeszyty Problemowe Nr 1/2021 (125).
- [3]. A. Białas; Badanie połączenia wciskowego pomiędzy wałem a tuleją silnika typu SPM zastosowanego w napędzie samochodów elektrycznych; Zeszyty Problemowe – Maszyny Elektryczne Nr 86/2010.

[4]. A. Białas, J. Madej; Badanie nośności połączenia wciskowego; Zeszyty Problemowe – Maszyny Elektryczne Nr 2/2014 (102).

Autorzy

mgr inż. Szczepan Opach

szczepan.opach@komel.lukasiewicz.gov.pl

Sieć Badawcza Łukasiewicz – Instytut Napędów i Maszyn Elektrycznych KOMEL

40-203 Katowice, al. Roździeńskiego 188