

Adam STECKIEWICZ*

PORÓWNANIE METOD OBWODOWYCH I NUMERYCZNYCH DO OBLICZEŃ STACJONARNEGO POLA ELEKTRYCZNEGO W MATERIAŁACH WARSTWOWYCH

W artykule porównano cechy oraz przydatność zastosowania wybranych metod, służących obliczaniu wielkości elektrycznych w periodycznych strukturach przewodzących materiałów warstwowych. Rozpatrzono wykorzystanie metod sieciowych do obliczeń układu złożonego z kilkudziesięciu komórek, jako alternatywy dla metody elementów skończonych (MES). Na przykładzie powtarzalnego, porowatego układu złożonego z obrotowo-symetrycznych komórek, określono dokładność obliczeń dwóch metod sieciowych – metody potencjałów węzłowych oraz metody prądów oczkowych – a także wyznaczono zastępcze rezystancje proponowanej struktury, w zależności od jej geometrii wewnętrznej. Przedstawiono i przeanalizowano rozkład potencjału oraz gęstości prądu dla analizowanej struktury.

SŁOWA KLUCZOWE: materiał warstwowy, struktury periodyczne, rozkład potencjału

1. WSTĘP

Rozwój inżynierii materiałowej doprowadził do stworzenia nowoczesnych materiałów elektronicznych o coraz szerszym zastosowaniu [3, 7]. Niektóre z nich zaliczają się do grupy kryształów wykorzystywanych, np. w technice światłowodowej [1]. Inne, tzw. kompozyty składające się z połączonych warstw różnych materiałów, charakteryzują się zwiększoną odpornością na uszkodzenia i działanie czynników zewnętrznych [3, 5]. Za materiał pośredni między kryształami – o periodycznym rozkładzie cząstek, nadających im szczególne właściwości – a materiałami warstwowymi – których własności wynikają z parametrów składników – uznać można materiały hybrydowe. Ich reprezentantem są, np. metamateriały, bądź wykorzystywane do budowy anten planarnych struktury periodyczne, fraktalne [8]. Do tej grupy zaliczyć można także materiały laminarne z warstwą periodyczną. Właściwy układ struktury materiałowej po połączeniu warstw, może być kształtowany metodami ubytkowymi (m.in. trawienie) lub przyrostowymi (np. napylenie) i składa się z powtarzalnie rozłożo-

* Politechnika Białostocka.

nych komórek o zadanej geometrii. Wielkość i struktura elementu determinuje wypadkowe cechy elektryczne materiału. Zbudowane w ten sposób materiały mogą znaleźć zastosowanie jako, np. elastyczne promienniki ciepła [2], czy struktury lokalnie kształtujące pole EM. Jeśli co najmniej jedna warstwa materiału jest niejednorodna (porowata), wówczas może być traktowana jako rozległa sieć, której wzajemne połączenia i parametry wynikają bezpośrednio z budowy komórek [8]. Gdy warstwa jest przewodząca, stosowne staje się opracowanie metod polowych, obwodowych lub mieszanych, dedykowanych analizie takich struktur w zależności od ich konstrukcji. Ze względu na złożoność i periodyczny charakter, w celu analizy właściwości i projektowania takich materiałów, zasadne staje się użycie technik komputerowych ze zautomatyzowaną realizacją algorytmów obliczeniowych.

W artykule podjęto dyskusję nad trzema powszechnie dostępnymi metodami obliczeń zjawisk elektrycznych w omawianych warstwach periodycznych o budowie sieciowej. Zaproponowano modyfikację metody potencjałów węzłowych i grafu reprezentującego sieć. Na przykładzie struktury zbudowanej z komórek o obrotowo-symetrycznej geometrii, scharakteryzowano dokładność przybliżonych metod obwodowych, względem rozwiązania polowego otrzymanego metodą elementów skończonych.

2. METODYKA BADAŃ

2.1. Sformułowanie celu badań i opis układu

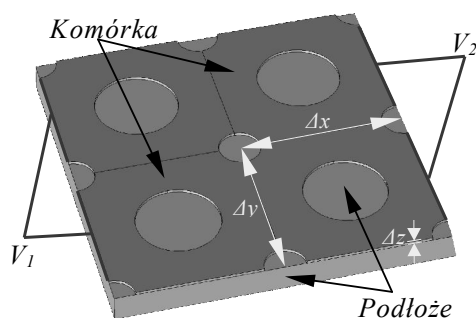
Celem prowadzonych badań jest opracowanie oraz modyfikacja wybranych metod modelowania i rozwiązywania zagadnień elektrycznych w strukturach periodycznych. Określona zostanie dokładność metod sieciowych – wykorzystanych do obliczenia modelu obwodowego – względem metody numerycznej.

Geometria analizowanych komórek jest złożona, a ich przekrój poprzeczny w każdym miejscu charakteryzuje się różną konfiguracją struktur dielektryk-przewodnik. Wiąże się to z brakiem dokładnego, analitycznego rozwiązania tego typu zagadnień. Toteż za model odniesienia przyjęto model na bazie równań różniczkowych cząstkowych opisujących zjawiska elektryczne. Do rozwiązania tak sformułowanego modelu odniesienia zastosowano MES.

Analizowany materiał składa się z dwóch warstw: jedna stanowi dielektryczne podłoże, którego modelowanie pominięto ze względu na jego właściwości izolacyjne; druga jest dobrym przewodnikiem prądu elektrycznego. W pracy założono, że rozmiary zewnętrzne komórki budującej warstwę są stałe

$$\Delta x = \Delta y = \text{const}, \Delta z = \text{const} . \quad (1)$$

Analizę przeprowadzono przyjmując, iż do wybranych krawędzi układu podłączone jest napięcie stałe lub niskiej częstotliwości (rys. 1).



Rys. 1. Fragment materiału z warstwą periodyczną

2.2. Model polowy układu

Rozkład potencjału w warstwie przewodzącej wyznaczano z równania Laplace'a dla jednorodnego pola elektrycznego

$$-\nabla^2 V(x, y, z) = 0. \quad (2)$$

Z kolei gęstość prądu przepływającego przez układ obliczono z prawa Ohma, na podstawie znanej przewodności σ oraz potencjału V

$$J(x, y, z) = -\sigma(x, y, z) \nabla V(x, y, z). \quad (3)$$

Znajomość gęstości prądu J umożliwia obliczenie całkowitego natężenia prądu I przepływającego przez wybrane powierzchnie struktury. Ponieważ założono, że wysokość warstwy w każdym miejscu jest stała ($\Delta z = \text{const}$), to dla dowolnego x natężenie prądu obliczano z zależności

$$I = \Delta z \int J(y) dy. \quad (4)$$

W odrębnym zestawie testów, na podstawie zadanych warunków brzegowych wyznaczano zastępczą rezystancję pojedynczego elementu

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I}, \quad (5)$$

gdzie: V_1, V_2 – założone warunki brzegowe, I – prąd obliczony z zależności (4).

Wartość R była wykorzystana później w obliczeniach przeprowadzanych metodami sieciowymi. Do oszacowania R zbudowano odrębny, trójwymiarowy model materiału (rys. 1), zakładając dołączenie zasilania na przeciwległych krawędziach (potencjały V_1, V_2) oraz symetrię i powtarzalność struktury.

Do obliczeń numerycznych wykorzystano metodę elementów skończonych. Rozpatrywany, trójwymiarowy model układu poddano dyskretyzacji z zastosowaniem siatki adaptowanej. Rozwiązanie równań polowych [9] tak sformułowanego zagadnienia brzegowego, uzyskano przez zdefiniowanie warunku brzegowego pierwszego rodzaju (Dirichleta)

$$V(0, y, z) = V_1 = 1V \quad \wedge \quad V(x_{\max}, y, z) = V_2 = 0V. \quad (6)$$

2.3. Model materiału w postaci grafu sieci periodycznej

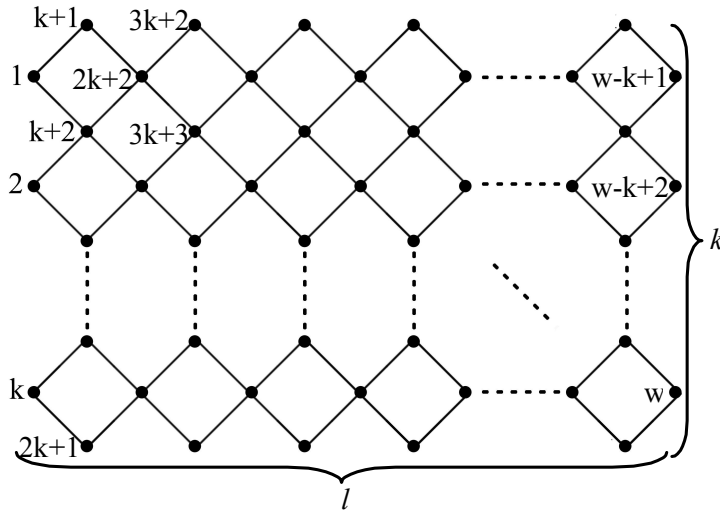
Obliczenia trójwymiarowej warstwy przewodzącej materiału złożonego, uwzględniając założenie (1), redukują się do przypadku analizy dwuwymiarowej struktury planarnej, przedstawionej jako:

- graf o znanej topologii i parametrach jego gałęzi,
- obwód elektryczny, będący w istocie wielowrotnikiem o znanych skupionych parametrach i znanym układzie połączeń.

Pierwsza z analizowanych metod wiąże się z wyznaczeniem napięć węzłowych, wychodząc od równań napięciowych grafu. Jej idea polega na określeniu macierzy węzłowej λ , która jest algebraicznym zapisem incydencji dla węzłów grafu skierowanego, w celu wyznaczenia wektora potencjałów węzłowych \mathbf{V}_w przy znanej macierzy admitancji \mathbf{Y} i wektorze prądowych wydajności \mathbf{J}_w [4]

$$\mathbf{V}_w = (\lambda \mathbf{Y} \lambda^T)^{-1} \mathbf{J}_w. \quad (7)$$

Ponieważ jeden z węzłów ma definiowany, przypisany potencjał odniesienia, wymagane jest rozwiązanie $w-1$ równań niezależnych (w – liczba węzłów).



Rys. 2. Topologia periodycznego grafu romboidalnego z przykładową numeracją węzłów:
 k – liczba wierszy układu, l – liczba kolumn

Dla omawianych struktur periodycznych, charakterystyczne jest wzajemne i uporządkowane połączenie galwaniczne komórek tworzących warstwę. Rozpatrując dwuwymiarową strukturę oczek, opisano sieć połączeń w takiej warstwie za pomocą grafu romboidalnego (rys. 2). Przy znanej geometrii oczek za węzły grafu uznaje się powierzchnie styku sąsiednich komórek, zaś gałęzie, to ścieżki przewodzące utworzone przez ćwiartkę komórki. Zadanie polega na

obliczeniu potencjałów węzłowych \mathbf{V}_w na podstawie znajomości incydencji pomiędzy poszczególnymi węzłami oraz wymuszenia napięciowego \mathbf{U}_w .

Wyprowadzając równania dla grafu z rys. 2, rozważenia przeprowadzane będą dla węzła $2k+2$. Zgodnie z metodą potencjałów węzłowych zapisujemy

$$\begin{aligned} & (Y_{2k+2,k+1} + Y_{2k+2,k+2} + Y_{2k+2,3k+2} + Y_{2k+2,3k+3})V_{2k+2} = \\ & = Y_{2k+2,k+1}V_{k+1} + Y_{2k+2,k+2}V_{k+2} + Y_{2k+2,3k+2}V_{3k+2} + Y_{2k+2,3k+3}V_{3k+3} \end{aligned} \quad (8)$$

Przy założonej symetrycznej konstrukcji komórki spełniona jest relacja [6]

$$Y_{2k+2,k+1} = Y_{2k+2,k+2} = Y_{2k+2,3k+2} = Y_{2k+2,3k+3} = Y, \quad (9)$$

stąd zapisać można, że

$$4YV_{2k+2} = YV_{k+1} + YV_{k+2} + YV_{3k+2} + YV_{3k+3}. \quad (10)$$

Dla idealnego układu symetrycznych komórek równanie (10) przyjmuje postać:

$$V_{2k+2} = \frac{1}{4}(V_{k+1} + V_{k+2} + V_{3k+2} + V_{3k+3}). \quad (11)$$

Równanie to określa relację potencjału dowolnego węzła grafu z węzłami dołączonymi do niego, przez gałęzie o znanej admitancji.

Wyprowadzając równanie (11) dla pozostałych węzłów grafu można pokazać, że potencjał i -tego węzła jest średnią arytmetyczną wartości potencjałów węzłów przyłączonych do niego, gdy spełniony jest warunek (9). Ponadto możemy zapisać równanie macierzowe

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{U} \quad (12)$$

z którego znalezione zostaną wszystkie potencjały węzłowe V . Rozpisując równanie (12) otrzymuje się

$$\begin{bmatrix} n_1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,w-u} \\ a_{2,1} & n_2 & a_{2,3} & \cdots & a_{2,w-u} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & n_3 & \cdots & a_{3,w-u} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{w-u,1} & a_{w-u,2} & a_{w-u,3} & \cdots & n_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{w-u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{w-u} \end{bmatrix} \quad (13)$$

gdzie: $\dim(\mathbf{A}) = (w-u) \times (w-u)$, $\dim(\mathbf{U}) = 1 \times (w-u)$. Współczynniki $a_{i,j}$ macierzy \mathbf{A} wynoszą odpowiednio:

- $a_{i,j} = 0$ gdy i -ty węzeł grafu nie ma połączenia z j -tym węzłem,
- $a_{i,j} = -1$ gdy i -ty węzeł grafu ma połączenia z j -tym węzłem.

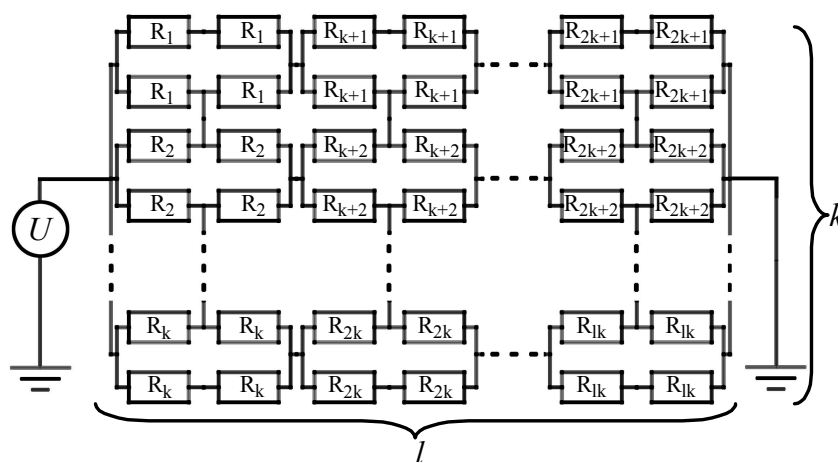
Niezerowy współczynnik n_i , wypełniający przekątną macierzy \mathbf{A} , to współczynnik stojący przy rozpatrywanym węźle V_i , równy liczbie węzłów przyłączonych do niego. Przykładem może być omawiany węzeł V_{2k+2} dla którego $n_{2k+2} = 4$. Wymiar macierzy \mathbf{A} , wektora niewiadomych \mathbf{V} i wektora wymuszeń \mathbf{U} wynosi $w-u$, gdzie w jest liczbą wszystkich węzłów grafu, a u to liczba węzłów, w których zadano wymuszenia. Zadając wymuszenie napięciowe w węźle sieci, zmniejsza się jej wymiar. Z macierzy \mathbf{A} należy wówczas wykreślić wiersz

i kolumnę odpowiadającą temu węzłowi i przepisać zadaną wartość potencjału do wektora U .

W przedstawionym modelu uproszczonym, poszukuje się w pierwszym kroku potencjałów w określonych punktach i nie jest przy tym wymagana znajomość rozptyłu prądów. Co więcej, w sieci utworzonej z okresowo rozłożonych komórek o dowolnej budowie wewnętrznej (spełniających jednak warunek (9)), którą przedstawić można w postaci grafu, rozkład potencjału jest identyczny i jego obliczenie nie wymaga znajomości admitancji, zaś zależy wyłącznie od topologii tej sieci. W dalszej części artykułu metoda ta nazywana będzie metodą uproszczoną (MU).

2.4. Schemat elektryczny materiału

Przedstawiony graf sieci okresowej może posłużyć do stworzenia schematu elektrycznego warstwy przewodzącej. Rozwiązanie schematu uzyskuje się również metodami obwodowymi. Na potrzeby niniejszego artykułu, przedstawiony schemat obliczony zostanie metodą prądów gałęziowych [4], nazywaną dalej po prostu metodą obwodową (MO).



Rys. 3. Schemat blokowy warstwy przewodzącej: R – rezystancja ćwiartki komórki;
 k – liczba wierszy układu, l – liczba kolumn

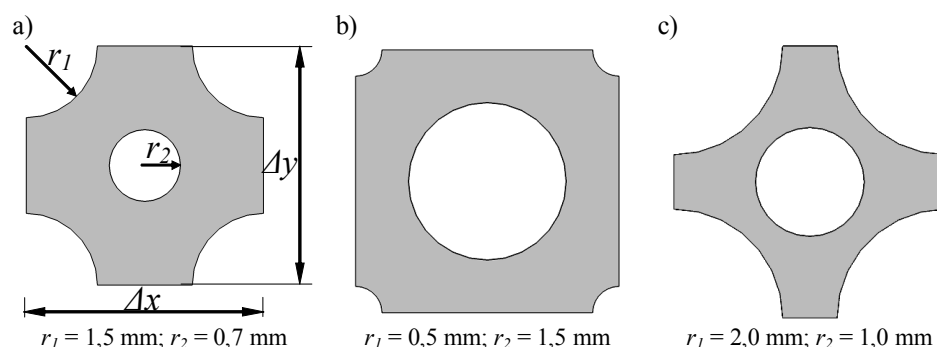
Zgodnie z wcześniejszymi wyjaśnieniami, pojedynczą komórkę o geometrii symetrycznej przedstawić można jako szeregowo-równoległe połączenie czterech identycznych rezystancji [6]. Warstwę przewodzącą materiału laminarnego modeluje się jako połączenie $k \times l$ komórek. Wymuszeniem są, np. źródła napięcia włączone do węzłów obwodu. Załóżmy, że struktura zasilana jest rów-

nomiennie, czyli do węzłów lewej krawędzi struktury włączono pojedyncze źródło, zaś przeciwległa krawędź jest uziemiona (rys. 3).

Rozwiązanie obwodu skutkuje znalezieniem prądów przepływających po szczególnych gałęziach, a następnie napięć, które odniesione do masy dają automatycznie wartości potencjałów w węzłach sieci. W tym wypadku algorytm wymaga zdefiniowania wartości rezystancji R_x , by móc dokonać obliczeń układu. Możliwe jest przekształcenie równań tej metody w podobny sposób jak w podrozdziale 2.2, w celu eliminacji z nich rezystancji komórek, ale byłoby to możliwe tylko wówczas, gdyby w układzie zadawano wymuszenie prądowe.

3. OPIS ANALIZOWANEJ STRUKTURY

Omówione metody stosowane są do obliczania sieci złożonej z wielu komórek Ψ_k o jednakowym kształcie. Przykładem jest geometria, której wybrane warianty (rys. 4) różnią się wartością promienia wycięcia zewnętrznego r_1 i wewnętrznego r_2 . Wymiar zewnętrzny elementów jest stały ($\Delta x = \Delta y = 5$ mm), tak jak wysokość na całej powierzchni warstwy ($\Delta z = 0,05$ mm). Przewodność materiału elementu, równa była przewodności elektrycznej grafitu o rozproszonym układzie cząstek ($\sigma = 3000$ S/m).



Rys. 4. Przykłady komórek Ψ_k o różnych parametrach kształtujących ich geometrię wewnętrzną

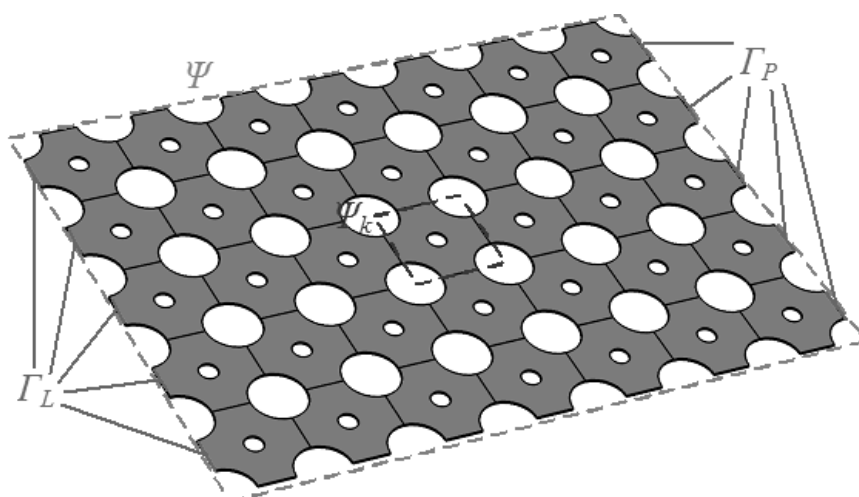
Komórki charakteryzują się pewną zastępczą rezystancją elektryczną $R = f(\sigma, r_1, r_2)$, zależną od jej geometrii i użytego do budowy materiału. Mimo symetrii, złożoność budowy elementu wymaga określenia jego rezystancji R na drodze pomiarowej lub z użyciem dokładnych metod numerycznych. Wyniki obliczeń z użyciem metody elementów skończonych wykorzystano do wyznaczenia R ze wzoru (5) dla 15 wybranych geometrii elementu (tab. 1).

Analizowany układ modelujący warstwę periodyczną składa się z $k = 5$ wierszy i $l = 7$ kolumn, tworząc prostokątną strukturę (rys. 5). Jej zasilanie stanowi

źródło napięcia przyłączone do lewej krawędzi Γ_L układu Ψ (rys. 5), zaś prawa krawędź Γ_P jest uziemiona, zgodnie z warunkami brzegowymi (6).

Tabela 1. Rezystancje zastępcze komórek o różnych geometriach

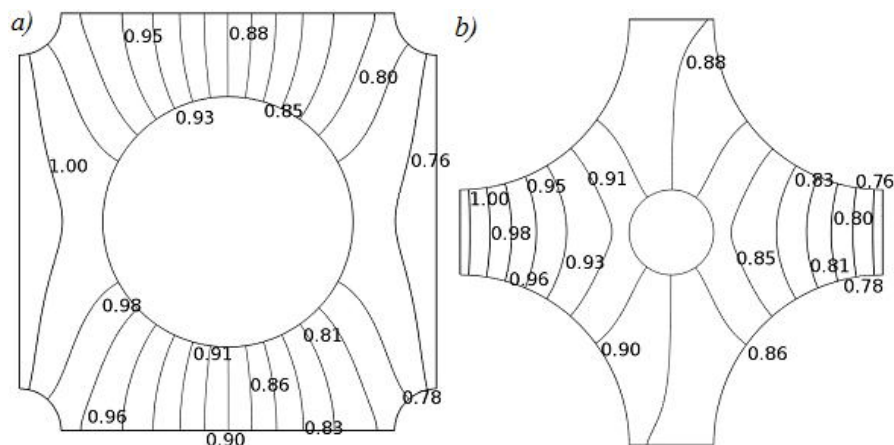
| | | | | | | | | | | | | | | | |
|------------------|------|------|-----|-------|------|------|------|-------|-----|------|------|------|-------|-------|------|
| r_1 [mm] | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 1,0 | 1,0 | 1,0 | 1,0 | 1,5 | 1,5 | 1,5 | 1,5 | 2,0 | 2,0 | 2,0 |
| r_2 [mm] | 0,5 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 0,5 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 0,5 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 0,5 | 1,0 | 1,5 |
| R [Ω] | 3,78 | 4,58 | 6,4 | 11,13 | 4,58 | 5,58 | 7,97 | 14,84 | 6,4 | 7,97 | 12,7 | 67,8 | 11,14 | 14,85 | 67,8 |



Rys. 5. Widok poglądowy 3D układu Ψ z periodycznym rozkładem komórek Ψ_k

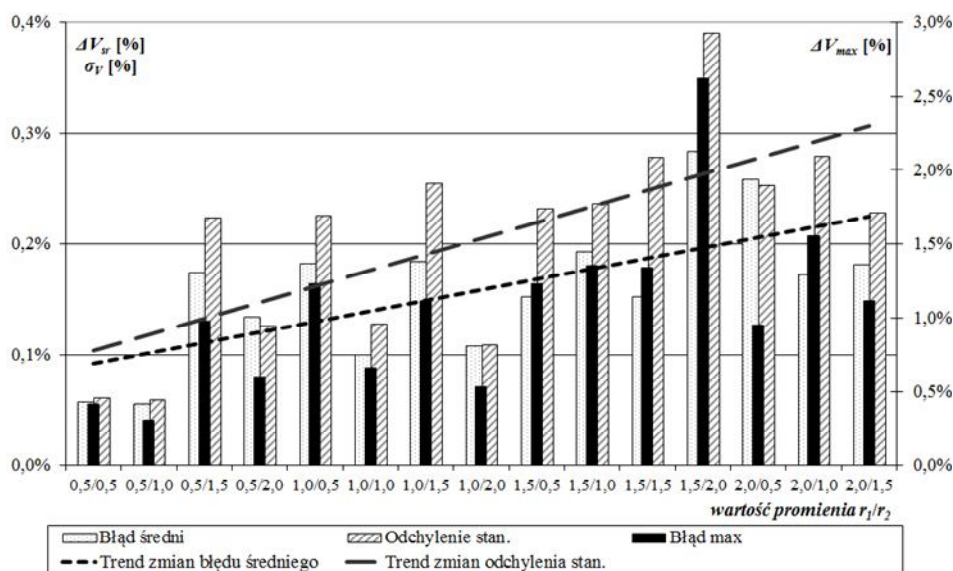
4. WPŁYW GEOMETRII NA BŁĄD OBLICZEŃ POTENCJAŁU

Struktura składająca się z 35 elementów (rys. 5) została poddana obliczeniom numerycznym i sieciowym. Na podstawie rozważań opisanych w rozdziale 2, metoda uproszczona, bez względu na parametry r_1 i r_2 komórki Ψ_k , powinna zwrócić te same wartości potencjałów w węzłach sieci. Nie uwzględnia ona jednak złożoności geometrii, a tym samym jej wpływu na rozptyw prądów w komórce i nieliniowy rozkład potencjału na powierzchni. Przykładem mogą być komórki z rys. 6, gdzie pokazano rozkład względnego potencjału na powierzchni elementów, przy zasilaniu ich napięciem przyłączonym do przeciwległych krawędzi. Obserwuje się wyraźny efekt wpływu parametrów kształtujących komórki, objawiający się nierównoległym rozkładem izolinii potencjału wzdłuż ich długości.



Rys. 6. Izolinie rozkładu potencjału względnego na powierzchni przykładowych komórek Ψ_k umieszczonych w centrum układu Ψ : a) przy $r_1 = 0,5$ i $r_2 = 1,5$ mm; b) przy $r_1 = 2$ i $r_2 = 0,5$ mm

Geometria komórki rzutować będzie nie tylko na rozkład potencjału w obrębie jej obszaru, ale wpłynie też na cały utworzony z nich układ. Analiza wyników obliczeń potencjału (rys. 7) dla 15 wariantów Ψ_k wskazuje, że błędy estymacji potencjału w miejscach styku komórek, liczone względem rozwiązania MES, są identyczne w przypadku MU i MO.

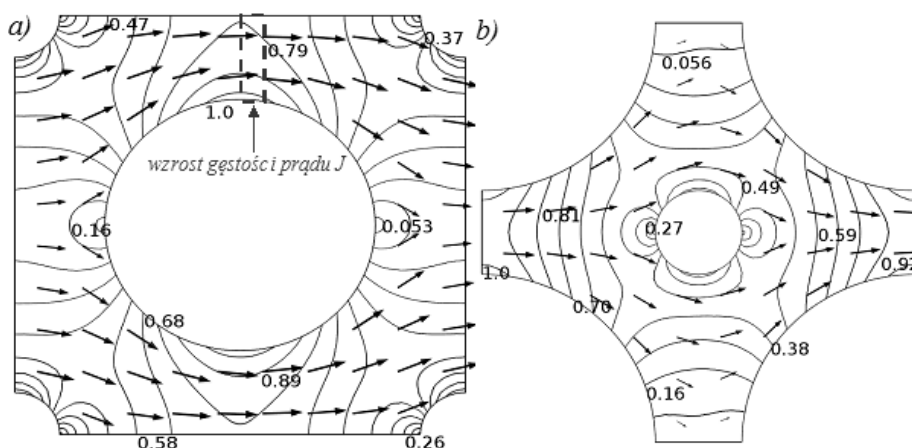


Rys. 7. Zależność średniego błędu względnego, odchylenia standardowego i błędu maksymalnego obliczeń potencjałów MU i MO względem rozwiązania numerycznego

Wzrost promieni r_1 i r_2 interpretuje się jako coraz silniejszą deformację komórek. Wobec tego linia trendu dla odchylenia standardowego ρ_V i względnego błędu średniego ΔV_{sr} wskazuje na wzrost tych wskaźników, wraz z coraz bardziej postępującą deformacją ψ_k . Wartości ΔV_{sr} nie przekraczają 0,3%, co świadczy o wysokiej precyzji obliczeń, zapewnianej przez obie metody obwodowe. Jest to szczególnie ważne w odniesieniu algorytmu MU. Nie wymaga on znajomości geometrii komórek ani jej właściwości elektrycznych, zapewniając nieznacznie mniejszą precyzję, niż bardziej złożona MES. Teorię o wpływie parametrów r_1/r_2 na lokalne kształtowanie się pola elektrycznego w strukturze periodycznej – czego MU i MO nie uwzględniają – potwierdzają względne błędy maksymalne, w niektórych miejscach układu przekraczające 2,5%. Skoro wartość ρ_V jest zawsze większa lub równa ΔV_{sr} , to rozrzut błędów względnych dla poszczególnych węzłów jest znaczny. W większości przypadków ΔV_{max} przekracza 0,5%, toteż wartość tę można uznać za minimalny, spodziewany błąd względny przy obliczeniach potencjałów (napięć) w warstwach zbudowanych z elementów o proponowanej geometrii.

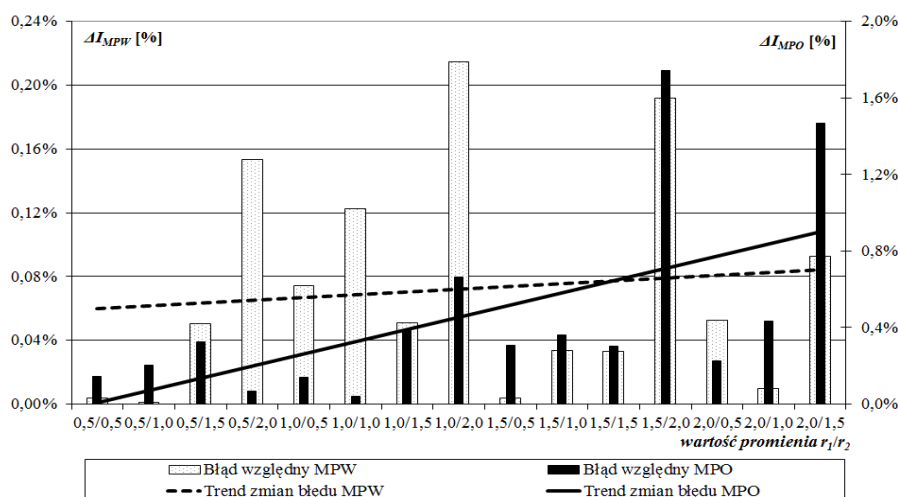
5. WPŁYW GEOMETRII NA BŁĄD OBLICZEŃ PRĄDU

Identyczną analizę jak w poprzednim rozdziale przeprowadzono dla prądu zasilającego układ ψ . Rozpływ prądu w elemencie (rys. 8) silnie zależy od jego kształtu. Gęstość prądu zmniejsza się przy tych krawędziach, które poddawano regulacji, a rośnie na przewężeniach ścieżek (rys. 8a), wydatnie wpływających na rezystancję komórki. Wartość prądu przepływającego przez cały układ, to wypadkowa właściwości i budowy wewnętrznej elementów ψ_k .



Rys. 8. Izolinie i wektory gęstości prądu względnego przykładowych komórek

Prąd zasilający obliczany metodami sieciowymi, nie pokrywa się dla MU i MO, stąd dla tych metod uzyskano różne błędy względne (rys. 9). Pierwsza z nich umożliwia wyznaczenie natężenia prądu z błędem poniżej 0,22%, zaś linia trendu wskazuje na utrzymywanie się podobnej dokładności obliczeń, bez względu na parametry geometryczne komórek tworzących układ. Rozwiązanie schematu blokowego MO charakteryzuje się dokładnością o rząd mniejszą (błędy sięgają prawie 1,8%). Biorąc pod uwagę, iż obie metody są jedynie przybliżeniem rzeczywistej sieci, wyniki można uznać za zadowalające tym bardziej, że dla pewnych wariantów (np. $r_1 = 0,5$; $r_2 = 1$ mm) błąd był bliski 0%.



Rys. 9. Błąd względny obliczeń prądu zasilającego dla MU i MO względem rozwiązania numerycznego

6. PODSUMOWANIE

W artykule omówiono i porównano trzy metody służące obliczaniu stacjonarnego pola elektrycznego, w periodycznych warstwach przewodzących materiałów złożonych. Omówiono modyfikację metody napięć węzłowych do obliczeń potencjałów elektrycznych na bazie grafu romboidalnego. Przedstawiono także zastępczy, elektryczny schemat blokowy warstwy periodycznej. Rozważania przeprowadzono dla warstwy zbudowanej z przykładowych, obrotowo-symetrycznych komórek o modyfikowanej geometrii.

Wykorzystując MES obliczono rezystancje zastępcze komórek, których wartość wahała się od 3,78 do 67,8 Ω . Wpływ na rezystancję miała struktura wewnętrzna komórki, czyli promień wycięcia zewnętrznego r_1 i wewnętrznego r_2 . Parametry te wpływają bezpośrednio na rozkład potencjału i gęstości prądu w obszarze komórki, a następnie całego utworzonego z nich układu periodycznego.

Dokładność obliczeń układu zależy od metody obliczeniowej i geometrii komórek. Modele obwodowe pozwalają oszacować wartość potencjału i zasila-
jącego prądu elektrycznego z błędem poniżej 3%. Z analizowanych metod do-
kładniejszą i prostszą okazała się metoda uproszczona dla grafu sieciowego.

LITERATURA

- [1] Buczynski R., Photonic Crystal Fibers, Proc. of the XXXIII International School of Semiconducting Compounds, vol. 106, no. 2, Jaszowiec, 2004.
- [2] Butryło B., Steckiewicz A., Ocena właściwości materiału warstwowego o struk-
turze periodycznej ze względu na dynamikę zjawisk termicznych, XXXIX Mię-
dzynarodowa Konferencja IC-SPETO 2016, Gliwice-Ustroń, 2016.
- [3] Moore R., Electromagnetic Composites Handbook, Second Edition, McGraw-
Hill Education, 2016.
- [4] Osowski J., Szabatin J., Podstawy teorii obwodów t.3, WNT, Warszawa, 2016.
- [5] Pal R., Electromagnetic, mechanical and transport properties of composite
materials, CRC Press, 2014.
- [6] Steckiewicz A., Butryło B., Modelowanie i aproksymacja właściwości elektrycz-
nych materiałów laminarnych ze strukturą periodyczną, Warsztaty Doktoranckie:
WD 2016: Lubelskie Dni Nauki i Biznesu, Lublin, 2016.
- [7] Taya M., Electronic composites, Cambridge University Press, 2005.
- [8] Trzaska Z., Analiza i projektowanie obwodów elektrycznych, Oficyna Wydawni-
cza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2008.
- [9] Turowski J., Elektrodynamika techniczna, Wydawnictwo Naukowe PWN, War-
szawa, 2014.
- [10] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z., The Finite Element Method: Its Basis
and Fundamentals, Seventh Edition, Butterworth-Heinemann, 2013.

THE COMPARISON OF NETWORK AND NUMERICAL METHODS FOR A STATIONARY ELECTRIC FIELD COMPUTATIONS IN THE LAMINAR MATERIALS

The paper presents a comparison of the features and applications of the selected
methods for calculating electric quantities in the laminar materials periodic conductive
structures. Circuit analysis methods were investigated as an alternative to the finite
element method (FEM) for the calculation of a system consisting of many elements. An
exemplary, repetitive porous system consisting of rotationally-symmetric cells served
to determine the computation accuracy of two methods – nodal and mesh analysis.
There was also specified the equivalent resistance of the cells, depending on its internal
geometry. The potential and current density distribution for the analyzed structures were
presented and discussed.

(Received: 27. 01. 2017, revised: 15. 02. 2017)