

Krzysztof BARTECKI

POLITECHNIKA OPOLSKA, INSTYTUT AUTOMATYKI I INFORMATYKI
ul. Sosnkowskiego 31, 45-272 Opole

Transmitancje operatorowe pewnej klasy układów typu hiperbolicznego z wejściami brzegowymi

Dr inż. Krzysztof BARTECKI



Stopień naukowy doktora nauk technicznych uzyskał w 2004 roku w Politechnice Opolskiej. Pracuje w Instytucie Automatyki i Informatyki Politechniki Opolskiej na stanowisku adiunkta. Główne kierunki badań naukowych obejmują: modelowanie i aproksymację układów o parametrach rozłożonych oraz zastosowanie sztucznych sieci neuronowych w zagadnieniach modelowania, identyfikacji oraz sterowania obiektami dynamicznymi.

e-mail: k.bartekci@po.opole.pl

Streszczenie

W artykule przedstawiono ogólną postać transmitancji operatorowych pewnej klasy układów o parametrach rozłożonych, opisanych dwoma równaniami różniczkowymi cząstkowymi typu hiperbolicznego. Zakładając istnienie w układzie dwóch wejść o charakterze wymuszeń brzegowych typu Dirichleta oraz dwóch wyjść rozłożonych wzdłuż osi zmiennej przestrzennej, przedstawiono wyrażenia opisujące transmitancje operatorowe układu dla dwóch różnych konfiguracji sygnałów wejściowych. Rozważania zilustrowano praktycznym przykładem wymiennika ciepła pracującego w układach: współ- oraz przeciwprądowym.

Słowa kluczowe: układ o parametrach rozłożonych, równanie różniczkowe cząstkowe, układ hiperboliczny, transmitancja operatorowa, wymiennik ciepła.

Transfer function models for a class of hyperbolic systems with boundary inputs

Abstract

Transfer function models for a class of distributed parameter systems described by the two hyperbolic partial differential equations defined on a one-dimensional finite spatial domain are considered. Assuming two boundary inputs of Dirichlet type, the closed-form expressions for the individual elements of the 2×2 transfer function matrix are proposed based on the decoupled canonical representation of the system. The influence of the location of the boundary inputs on the transfer function representation is demonstrated for two different input configurations. The first one is the so-called *congruent* arrangement, for which both inputs act on the system at the same spatial position, $l=0$ (Fig. 1). The second one is the *incongruent* arrangement, where both inputs act on the system at its opposite ends, $l=0$ and $l=L$, respectively (Fig. 2). The considerations are illustrated with a practical example of a shell and tube heat exchanger operating in parallel- and countercurrent-flow modes (Fig. 3), which correspond to the two abovementioned boundary input configurations. Based on the transfer function model, both frequency and time responses of the system can be determined, which can be useful e.g. in the case of the model-based fault detection scheme.

Keywords: distributed parameter system, partial differential equation, hyperbolic system, transfer function, heat exchanger.

1. Wprowadzenie

Układy o parametrach rozłożonych stanowią obszerną grupę systemów dynamicznych, w których zmienne procesowe zależą nie tylko od czasu, ale również od zmiennych reprezentujących geometrię układu. W oparciu o modele fenomenologiczne, sporządzane na podstawie odpowiednich zależności bilansowych, uzyskuje się zwykle opis matematyczny tych układów w postaci równań różniczkowych cząstkowych [8, 10, 13, 15]. Przydatne z punktu widzenia teorii sterowania oraz diagnostyki modele w przestrzeni stanu wymagają tu zastosowania nieskończonej wymiarowej przestrzeni Hilberta, zaś transmitancje operatorowe

mają postać funkcji niewymiernych, w odróżnieniu od wymiernych transmitancji operatorowych uzyskiwanych dla układów o parametrach skupionych [5, 10, 14, 17].

W artykule zaprezentowano wyniki analizy transmitancyjnej, przeprowadzonej dla pewnej klasy układów o parametrach rozłożonych, w przypadku których dominujący udział mają zjawiska transportu masy, energii cieplnej lub elektrycznej. Układy te, wśród których można wymienić m.in. wymienniki ciepła, rurociągi transportowe, kanały irygacyjne oraz elektryczne linie transmisyjne, opisywane są zwykle równaniami różniczkowymi cząstkowymi typu hiperbolicznego [1, 2, 3, 6, 11, 12]. Po przyjęciu odpowiednich założeń upraszczających, uwzględniających np. istnienie gradientów zmiennych procesowych jedynie wzdłuż osi przepływu transportowanego medium, opis matematyczny tej klasy systemów można sprowadzić do układu dwóch równań różniczkowych cząstkowych z dwiema zmiennymi procesowymi (stanu), z których każda reprezentuje funkcję dwóch zmiennych niezależnych: czasu oraz pojedynczej zmiennej geometrycznej. Jak pokazano w artykule, pomimo przyjęcia wspomnianych założeń upraszczających, transmitancje operatorowe tej klasy układów opisane są stosunkowo złożonymi funkcjami niewymiernymi, przy czym postać transmitancji zależy m.in. od usytuowania wymuszeń brzegowych. Uzyskane transmitancje mogą znaleźć zastosowanie np. w przypadku schematów diagnostycznych wykorzystujących modele procesu w celu detekcji uszkodzeń.

2. Układy typu hiperbolicznego

2.1. Przypadek ogólny

Właściwości dynamiczne niektórych spośród wymienionych w punkcie 1. układów o parametrach rozłożonych można opisać, po przyjęciu pewnych założeń, za pomocą następującego układu liniowych równań różniczkowych cząstkowych [3, 4, 6]:

$$\frac{\partial x(l,t)}{\partial t} + A \frac{\partial x(l,t)}{\partial l} = Kx(l,t), \quad (1)$$

gdzie $x(l,t): Q \rightarrow R^n$ jest funkcją wektorową, reprezentującą rozkład w jednowymiarowej przestrzeni i czasie wartości n zmiennych stanu układu:

$$x(l,t) = [x_1(l,t) \quad x_2(l,t) \quad \dots \quad x_n(l,t)]^T \quad (2)$$

określoną na zbiorze $Q = \Omega \times \Theta$, gdzie $\Omega = [0, L] \subset R$ jest dziedziną zmiennej przestrzennej l , $\Theta = [0, +\infty) \subset R$ jest dziedziną zmiennej t reprezentującej czas, $K \in R^{n \times n}$ jest macierzą stałych współczynników, zaś A jest diagonalną macierzą następującej postaci:

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n), \quad (3)$$

gdzie $\lambda_i \in R \setminus 0$ oraz

$$\lambda_1 > \dots > \lambda_p > 0 > \lambda_{p+1} > \dots > \lambda_n, \quad (4)$$

przy czym $p \geq n$ reprezentuje liczbę dodatnich elementów λ_i .

Ze względu na diagonalną postać macierzy A , każde z równań układu (1) zawiera pochodną czasową i przestrzenną tej samej zmiennej stanu $x_i(l,t)$, dla $i=1,2,\dots,n$. Taki układ równań cząstkowych nazywa się układem *rozprzężonym* lub *słabo sprzężonym*, tzn. sprzężonym tylko przez czony nie zawierające pochodnych.

Definicja 1. Układ równań (1) nazywany jest układem *hiperbolicznym* wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie elementy macierzy A danej w postaci (3) są rzeczywiste oraz różne od zera. Ponadto, jeśli wszystkie jej elementy są od siebie różne, wówczas układ (1) nazywany jest układem *ściśle hiperbolicznym*.

W przypadku równań hiperbolicznych opisujących zjawiska fizyczne, elementy macierzy A reprezentują zwykle prędkości transportu masy lub energii. W celu uzyskania jednoznacznego rozwiązania układu (1), należy dodatkowo określić odpowiednie *warunki początkowe* oraz *warunki brzegowe*. Te pierwsze określają początkowy rozkład wartości zmiennych procesowych $x(l,0)$ w całym obszarze Ω . Z kolei warunki brzegowe reprezentują wymagania, jakie rozwiązanie $x(l,t)$ układu (1) powinno spełniać w punktach brzegowych obszaru Ω .

2.2. Układy hiperboliczne dla $n=2$

Wśród rozpatrywanej klasy układów ważną grupę stanowią systemy, których modele matematyczne przyjmują, przy pewnych założeniach, postać układu dwóch równań różniczkowych typu hiperbolicznego, w których występują dwie zmienne stanu. Można tu wymienić np.: napięcie oraz prąd w elektrycznej linii transmisyjnej [12], ciśnienie oraz przepływ medium transportowanego rurciągiem [2], temperaturę czynnika ogrzewającego oraz ogrzewanego w wymienniku ciepła z rurami koncentrycznymi [1, 9, 11].

W przypadku wymienionych układów wymuszenia zewnętrzne mają zwykle charakter skupiony i ograniczają się zwykle do punktów brzegowych obszaru Ω . Oznacza to, że wymuszenia te można uwzględnić np. w formie warunków brzegowych Dirichleta, określających wartości przyjmowane przez rozwiązanie $x_1(l,t)$ oraz $x_2(l,t)$ w odpowiednich punktach brzegowych. W artykule rozpatruje się dwa często spotykane w praktyce przypadki: w pierwszym z nich obydwa warunki brzegowe reprezentujące sygnały wejściowe określone są dla tego samego punktu $l=0$, zaś w drugim – dla dwóch różnych punktów, odpowiednio $l=0$ oraz $l=L$.

Dodatkowo zakłada się tu brak brzegowych odbić oraz sprzężeń zwrotnych, a także przyjmuje się, że równania dane są bezpośrednio w postaci słabo sprzężonej (1), przy czym ostatni warunek jest spełniony np. w przypadku wymienników ciepła. W celu rozróżnienia dwóch wspomnianych wyżej konfiguracji oddziaływań wejściowych, przyjęto dwie nowe definicje.

Definicja 2. Układ równań (1) dla $n=2$ będzie nazywany układem ze *zgodnymi* brzegowymi sygnałami wejściowymi dla następującej postaci warunków brzegowych:

$$x_1(0,t) = u_1(t), \quad x_2(0,t) = u_2(t), \quad (5)$$

przy czym $u(t)=[u_1(t) \ u_2(t)]^T \in L^2([0,+\infty); \mathbb{R}^2)$ jest wektorem sygnałów wejściowych układu, stanowiącym niejednorodność warunków brzegowych.

Definicja 3. Układ równań (1) dla $n=2$ będzie nazywany układem z *przeciwnymi* brzegowymi sygnałami wejściowymi dla następującej postaci warunków brzegowych:

$$x_1(0,t) = u_1(t), \quad x_2(L,t) = u_2(t). \quad (6)$$

Biorąc pod uwagę nierówność (4) można zauważyć, że z przypadkiem zgodnych sygnałów wejściowych będziemy mieć do czynienia dla $\lambda_1 > 0$ i $\lambda_2 > 0$ ($p=2$), zaś przeciwne sygnały wejściowe będą obowiązywać w przypadku $\lambda_1 > 0$ i $\lambda_2 < 0$ ($p=1$).

3. Transmitancje operatorowe

W niniejszym punkcie przedstawiono wyniki dotyczące opisu transmitancyjnego rozpatrywanej klasy układów typu hiperbolicznego z dwiema zmiennymi stanu, bazujące na powszechnie przyjętej definicji transmitancji operatorowej jako stosunku transformat Laplace'a sygnału wyjściowego i sygnału wejściowego przy założeniu zerowych warunków początkowych.

Ze względu na szczupłość dostępnego miejsca, pominięto tu pewne istotne szczegóły związane z opisem omawianej klasy układów w przestrzeni stanów. Wspomnieć tylko należy, że w odróżnieniu od opisu układów o parametrach skupionych, przestrzeń stanów jest tu przestrzenią funkcyjną (nieskończenie-wymiarową). Zamiast macierzy stanu A występuje tu pewien nieograniczony operator różniczkowy, związany z postacią równania cząstkowego (1), zaś odpowiednikami macierzy: wejściowej B oraz wyjściowej C , znanych z analizy skończenie-wymiarowej, są tu pewne operatory, które w rozpatrywanym przypadku są także nieograniczone ze względu na fakt, że zarówno sterowanie, jak i obserwacje mają charakter brzegowy (punktowy) [3, 5, 7]. Jednak, jak wykazano m.in. w pracach [16, 17], dla rozpatrywanej klasy układów z wejściami brzegowymi możliwe jest otrzymanie analitycznej postaci transmitancji operatorowych w wyniku zastosowania przekształcenia Laplace'a oryginalnych równań różniczkowych cząstkowych.

3.1. Macierze transmitancyjne układu

W przypadku omawianych w punkcie 2.2 układów hiperbolicznych z dwiema zmiennymi stanu można wyróżnić dwa sygnały wejściowe o charakterze skupionym, reprezentowane przez warunki brzegowe (5) lub (6), oraz dwa sygnały wyjściowe reprezentujące wartości zmiennych stanu x_1 i x_2 dla określonej pozycji przestrzennej l . Dla układu ze zgodnymi wejściami brzegowymi (Definicja 2) macierz transmitancji operatorowych przyjmuje następującą postać:

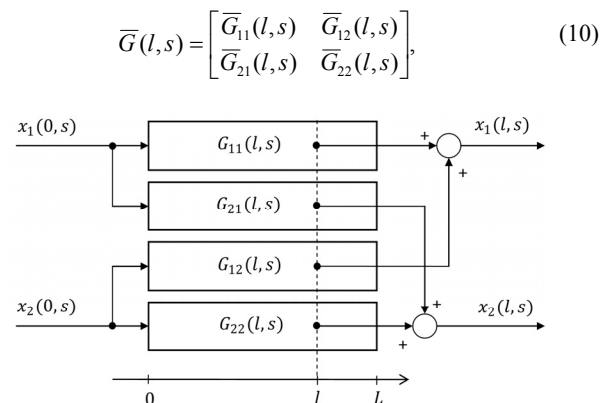
$$G(l,s) = \begin{bmatrix} \bar{G}_{11}(l,s) & \bar{G}_{12}(l,s) \\ \bar{G}_{21}(l,s) & \bar{G}_{22}(l,s) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

przy czym jej poszczególne elementy reprezentują transmitancje operatorowe odpowiednich torów wejściowo-wyjściowych:

$$\bar{G}_{11}(l,s) = \frac{x_1(l,s)}{x_1(0,s)}, \quad \bar{G}_{21}(l,s) = \frac{x_2(l,s)}{x_1(0,s)} \quad \text{dla } x_2(0,s) = 0, \quad (8)$$

$$\bar{G}_{12}(l,s) = \frac{x_1(l,s)}{x_2(0,s)}, \quad \bar{G}_{22}(l,s) = \frac{x_2(l,s)}{x_2(0,s)} \quad \text{dla } x_1(0,s) = 0, \quad (9)$$

przy założeniu zerowych warunków początkowych, $x_1(l,0)=0$, $x_2(l,0)=0$. Schemat blokowy modelu transmitancyjnego dla omawianego przypadku przedstawiony został na rys. 1.



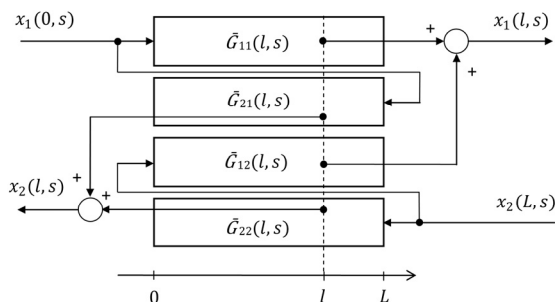
Rys. 1. Schemat modelu transmitancyjnego dla zgodnych warunków brzegowych (5)
Fig. 1. Block diagram of the transfer function model for the congruent boundary inputs (5)

Z kolei w przypadku układu z przeciwными wejściami brzegowymi (Definicja 3), elementy macierzy transmitancyjnej zdefiniowane są, przy założeniu zerowych warunków początkowych, w następujący sposób:

$$\bar{G}_{11}(l, s) = \frac{x_1(l, s)}{x_1(0, s)}, \quad \bar{G}_{21}(l, s) = \frac{x_2(l, s)}{x_1(0, s)} \quad \text{dla } x_2(L, s) = 0, \quad (11)$$

$$\bar{G}_{12}(l, s) = \frac{x_1(l, s)}{x_2(L, s)}, \quad \bar{G}_{22}(l, s) = \frac{x_2(l, s)}{x_2(L, s)} \quad \text{dla } x_1(0, s) = 0. \quad (12)$$

Schemat blokowy modelu transmitancyjnego dla omawianego przypadku przedstawiony został na rys. 2.



Rys. 2. Schemat modelu transmitancyjnego dla przeciwnych war. brzegowych (6)
Fig. 2. Block diagram of the transfer function model for the incongruent boundary inputs (6)

3.2. Analityczna postać transmitancji operatorowych

Jak wspomniano wyżej, analityczną postać omawianych transmitancji operatorowych można otrzymać np. metodą przekształcenia Laplace'a układu równań (1) z uwzględnieniem odpowiednich warunków brzegowych. Poniżej ograniczono się do podania gotowych rozwiązań, zaś kompletne wyprowadzenia wraz z analizą właściwości poszczególnych transmitancji można znaleźć w artykule [3].

Rozwiązanie 1. Wchodzące w skład macierzy (7) transmitancje operatorowe układu (1) dla $n=2$ oraz zgodnych brzegowych sygnałów wejściowych (5) przyjmują następującą postać:

$$G_{11}(l, s) = \frac{\phi_1(s) - p_{22}(s)}{\phi_1(s) - \phi_2(s)} e^{\phi_1(s)l} - \frac{\phi_2(s) - p_{22}(s)}{\phi_1(s) - \phi_2(s)} e^{\phi_2(s)l}, \quad (13)$$

$$G_{12}(l, s) = \frac{p_{12}(s)}{\phi_1(s) - \phi_2(s)} (e^{\phi_1(s)l} - e^{\phi_2(s)l}), \quad (14)$$

$$G_{21}(l, s) = \frac{p_{21}(s)}{\phi_1(s) - \phi_2(s)} (e^{\phi_1(s)l} - e^{\phi_2(s)l}), \quad (15)$$

$$G_{22}(l, s) = \frac{\phi_1(s) - p_{11}(s)}{\phi_1(s) - \phi_2(s)} e^{\phi_1(s)l} - \frac{\phi_2(s) - p_{11}(s)}{\phi_1(s) - \phi_2(s)} e^{\phi_2(s)l}, \quad (16)$$

gdzie $p_{11}(s)$, p_{12} , p_{21} i $p_{22}(s)$ są elementami macierzy $P(s)$ następującej postaci:

$$P(s) = \begin{bmatrix} p_{11}(s) & p_{12} \\ p_{21} & p_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_{11} - s}{\lambda_1} & \frac{k_{12}}{\lambda_1} \\ \frac{k_{21}}{\lambda_2} & \frac{k_{22} - s}{\lambda_2} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

zaś $\phi_1(s)$, $\phi_2(s)$ – jej wartościami własnymi, wynoszącymi:

$$\phi_{1,2}(s) = \frac{1}{2} (p_{11}(s) + p_{22}(s)) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(p_{11}(s) - p_{22}(s))^2 + 4p_{12}p_{21}}. \quad (18)$$

Rozwiązanie 2. Wchodzące w skład macierzy (10) transmitancje operatorowe układu (1) dla $n=2$ oraz przeciwnych brzegowych sygnałów wejściowych (6) przyjmują następującą postać:

$$\bar{G}_{11}(l, s) = \frac{e^{\phi_2(s)L} e^{\phi_1(s)l} (\phi_1(s) - p_{22}(s))}{e^{\phi_2(s)L} (\phi_1(s) - p_{22}(s)) - e^{\phi_1(s)L} (\phi_2(s) - p_{22}(s))} - \frac{e^{\phi_1(s)L} e^{\phi_2(s)l} (\phi_2(s) - p_{22}(s))}{e^{\phi_2(s)L} (\phi_1(s) - p_{22}(s)) - e^{\phi_1(s)L} (\phi_2(s) - p_{22}(s))}, \quad (19)$$

$$\bar{G}_{12}(l, s) = \frac{p_{12} (e^{\phi_2(s)l} - e^{\phi_1(s)l})}{e^{\phi_2(s)L} (\phi_2(s) - p_{11}(s)) - e^{\phi_1(s)L} (\phi_1(s) - p_{11}(s))}, \quad (20)$$

$$\bar{G}_{21}(l, s) = \frac{p_{21} (e^{\phi_2(s)L} e^{\phi_1(s)l} - e^{\phi_1(s)L} e^{\phi_2(s)l})}{e^{\phi_2(s)L} (\phi_1(s) - p_{22}(s)) - e^{\phi_1(s)L} (\phi_2(s) - p_{22}(s))}, \quad (21)$$

$$\bar{G}_{22}(l, s) = \frac{e^{\phi_2(s)l} (\phi_2(s) - p_{11}(s)) - e^{\phi_1(s)l} (\phi_1(s) - p_{11}(s))}{e^{\phi_2(s)L} (\phi_2(s) - p_{11}(s)) - e^{\phi_1(s)L} (\phi_1(s) - p_{11}(s))}. \quad (22)$$

Porównując wyrażenia (13)-(16) oraz (19)-(22) można zauważyć, że konfiguracja brzegowych sygnałów wejściowych w znaczący sposób wpływa na postać transmitancji operatorowych układu.

3.3. Macierze transmitancyjne dla $K=0$

Zakładając, że wszystkie elementy macierzy K w układzie równań (1) są równe zero, układ ten staje się układem całkowicie rozprzężonym, tzn. rozprzężonym również w odniesieniu do członów nie zawierających pochodnych. Otrzymuje się wówczas następującą postać macierzy $P(s)$ w (17) i jej wartości własnych (18):

$$P(s) = \begin{bmatrix} \phi_1(s) & 0 \\ 0 & \phi_2(s) \end{bmatrix}, \quad (23)$$

gdzie:

$$\phi_1(s) = -\frac{s}{\lambda_1}, \quad \phi_2(s) = -\frac{s}{\lambda_2}, \quad (24)$$

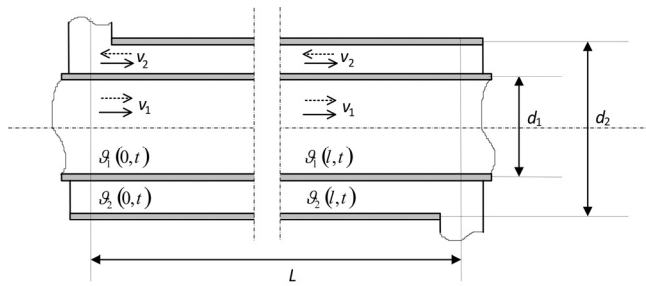
a w rezultacie następującą, skrajnie uproszczoną postać macierzy transmitancyjnych (7) oraz (10):

$$G(l, s) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{s}{\lambda_1}l} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{\lambda_2}l} \end{bmatrix}, \quad \bar{G}(l, s) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{s}{\lambda_1}l} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{\lambda_2}(L-l)} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

kąta może być rozpatrywana jako dwa niezależne układy opóźniające, reprezentujące fale poruszające się wzdłuż osi geometrycznej układu z prędkościami równymi odpowiednio: λ_1 oraz λ_2 .

4. Przykład: wymiennik ciepła w układach współ- oraz przeciwnopływowym

W celu praktycznej ilustracji omawianych zagadnień, w niniejszym punkcie rozpatruje się dwa przypadki pracy typowego wymiennika ciepła z rurami koncentrycznymi, którego uproszczony schemat przedstawiono na rys. 3. Pierwszy z nich to układ *współprądowy*, w którym obydwie płyny wymieniające ciepło płyną w tę samą stronę, zaś drugi – to układ *przeciwnopływowym*, w którym wektory prędkości przepływu płynów mają przeciwny zwrot. Właściwości dynamiczne takiego wymiennika dla obydwu wspomnianych konfiguracji można opisać, po przyjęciu pewnych założeń upraszczających, następującym układem dwóch równań różniczkowych typu hiperbolicznego [2, 9, 11]:



Rys. 3. Schemat poglądowy wymiennika ciepła z rurami koncentrycznymi w układach: współ- (strzałki ciągłe) oraz przeciwpływowym (strzałki kropkowane)

Fig. 3. Schematic of a shell and tube heat exchanger working in the parallel- (solid arrows) and countercurrent-flow mode (dotted arrows)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta_1(l,t)}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \vartheta_1(l,t)}{\partial l} &= \alpha_1 (\vartheta_2(l,t) - \vartheta_1(l,t)), \\ \frac{\partial \vartheta_2(l,t)}{\partial t} + v_2 \frac{\partial \vartheta_2(l,t)}{\partial l} &= \alpha_2 (\vartheta_1(l,t) - \vartheta_2(l,t)), \end{aligned} \quad (26)$$

gdzie $\vartheta_1(l,t)$ i $\vartheta_2(l,t)$ reprezentują temperatury płynów: ogrzewającego i ogrzewanego, v_1 i v_2 – odpowiednie prędkości przepływu tych płynów, α_1 i α_2 – współczynniki przejmowania ciepła.

Przyjmując następujące wartości parametrów układu równań (26): $v_1=1$ m/s, $v_2=0.2$ m/s, $\alpha_1=\alpha_2=0.05$ 1/s, otrzymuje się następującą postać macierzy występujących w równaniu (1):

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$K = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.05 \\ 0.05 & -0.05 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

przy czym wektor zmiennych stanu (2) ma następującą postać:

$$x(l,t) = [\vartheta_1(l,t) \quad \vartheta_2(l,t)]^T. \quad (29)$$

Zakładając, że rolę sygnałów wejściowych $u_1(t)$ i $u_2(t)$ układu pełnią odpowiednio temperatury wlotowe płynów: ogrzewającego $\vartheta_{1i}(t)$ oraz ogrzewanego $\vartheta_{2i}(t)$, w przypadku pracy wymiennika w układzie współprądowym warunki brzegowe można zapisać w następującej formie:

$$\vartheta_1(0,t) = \vartheta_{1i}(t), \quad \vartheta_2(0,t) = \vartheta_{2i}(t), \quad (30)$$

odpowiadającej zgodnej konfiguracji brzegowych sygnałów wejściowych (Definicja 2).

Elementy macierzy transmitancyjnej $G(l,s)$ wymiennika, wiążące temperatury płynów: ogrzewającego $\vartheta_1(l,t)$ i ogrzewanego $\vartheta_2(l,t)$ z ich wartościami wlotowymi $\vartheta_{1i}(t)$ oraz $\vartheta_{2i}(t)$, dane są tu bezpośrednio w postaci zależności (13)-(16).

Z kolei w przypadku wymiennika pracującego w układzie przeciwpływowym, prędkości przepływu czynników grzewczych różnią się znakiem ($v_1>0$, $v_2<0$), zaś warunki brzegowe przyjmują następującą postać:

$$\vartheta_1(0,t) = \vartheta_{1i}(t), \quad \vartheta_2(0,t) = \vartheta_{2i}(t). \quad (31)$$

Przyjmując ustalone wartości prędkości przepływu płynów, np. $v_1=1$ m/s, $v_2=-0.2$ m/s oraz wartości współczynników przejmowania ciepła jak w poprzednim przypadku, elementy macierzy transmitancyjnej $\tilde{G}(l,s)$ wymiennika otrzymuje się w postaci opisanej zależnościami (19)-(22).

Zakładając brak wymiany ciepła między obydwojema płynami, tzn. zerowe wartości współczynników wymiany ciepła ($\alpha_1=\alpha_2=0$) w równaniach (26), otrzymujemy zerowe wartości elementów

macierzy K i transmitancje operatorowe rozpatrywanego układu upraszczają się wówczas do postaci przedstawionej w punkcie 3.3.

5. Podsumowanie

W artykule zaprezentowano wyniki badań dotyczących ogólnej postaci transmitancyjnej pewnej klasy układów o parametrach rozłożonych, opisywanych układem dwóch równań różniczkowych cząstkowych typu hiperbolicznego, z uwzględnieniem dwóch różnych konfiguracji zewnętrznych oddziaływań brzegowych. Inaczej niż w przypadku układów o parametrach skupionych, uzyskane tu transmitancje operatorowe są funkcjami niewymiernymi, ze względu na występujące w nich funkcje wykładnicze oraz pierwiastkowe zmiennej zespolonej s .

Znajomość transmitancji operatorowych omawianej klasy układów umożliwia zarówno analizę rozkładu zmiennych procesowych w stanach ustalonych, jak również badanie ich właściwości dynamicznych, w tym charakterystyk częstotliwościowych oraz odpowiedzi czasowych. Zagadnienia te, znajdujące zastosowanie m. in. w diagnostyce procesów, są obecnie tematem badań realizowanych przez autora.

6. Literatura

- [1] Bartecki K.: Comparison of frequency responses of parallel- and counter-flow type of heat exchanger. Proceedings of the 13th IEEE MMAR Conference, Szczecin, 411-416 (2007).
- [2] Bartecki K.: Frequency- and time-domain analysis of a simple pipeline system. Proceedings of the 14th IEEE MMAR Conference, Międzyzdroje, 366-371 (2009).
- [3] Bartecki K.: A general transfer function representation for a class of hyperbolic distributed parameter systems. International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, vol. 23, no. 2, 291-307 (2013).
- [4] Christofides P.D., Daoutidis P.: Robust control of hyperbolic PDE systems. Chemical Engineering Science, vol. 53, 85-105 (1998).
- [5] Curtain R.F., Zwart H.: An introduction to infinite-dimensional linear systems theory. Springer-Verlag, New York, USA (1995).
- [6] Diagne A., Bastin G., Coron J.M.: Lyapunov exponential stability of 1-d linear hyperbolic systems of balance laws. Automatica, vol. 48, no. 1, 109-114 (2012).
- [7] Emirsajlow Z., Townley S.: From PDEs with Boundary Control to the Abstract State Equation with an Unbounded Input Operator: A Tutorial. European Journal of Control, vol. 6, pp. 27-49 (2000).
- [8] Evans L.C.: Partial Differential Equations. American Mathematical Society, Providence (1998).
- [9] Friedly J.C.: Dynamic Behaviour of Processes. Prentice Hall, New York (1972).
- [10] Klamka J.: Sterowalność liniowych układów dynamicznych z opóźnieniem. Pomiar Automatyka Kontrola, vol. 56, nr 5, 377-380 (2010).
- [11] Maidi A., Diaf M., Corriou J.P.: Boundary control of a parallel-flow heat exchanger by input-output linearization. Journal of Process Control, vol. 20, no. 10, 1161-1174 (2010).
- [12] Miano G., Maffucci A.: Transmission Lines and Lumped Circuits. Academic Press, San Diego (2001).
- [13] Mitkowski W.: Stabilizacja systemów dynamicznych. WNT, Warszawa (1991).
- [14] Osowski J.: Zarys rachunku operatorowego. Teoria i zastosowania w elektrotechnice. WNT, Warszawa (1981).
- [15] Szewczyk D.: Planowanie eksperymentu dla wyznaczania warunku początkowego układu o parametrach rozłożonych. Pomiar Automatyka Kontrola, vol. 53, nr 10, 7-11 (2007).
- [16] Weiss G.: Transfer functions of regular linear systems. Part I: Characterizations of regularity. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 342, no. 2, 827-854 (1994).
- [17] Zwart H.: Transfer functions for infinite-dimensional systems. Systems and Control Letters vol. 52, no. 3-4, 247-255 (2004).