

# Niepewności pomiarów w metodzie regresji liniowej

## Część 2. Niepewności prostej dla zmiennej $Y$ o skorelowanych danych

Zygmunt Lech Warszawa

Sieć Badawcza Łukasiewicz – Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP, Al. Jerozolimskie 202, 02-486 Warszawa

Jacek Puchalski

Główny Urząd Miar, ul. Elektoralna 2, 00-001 Warszawa

**Streszczenie:** Część druga pracy autorów dotyczy oceny dokładności parametrów linii prostej wyznaczanej metodą regresji dla różnych przypadków skorelowania współrzędnych punktów pomiarowych. W pierwszej części pracy rozpatrzono istotę, kryteria i zależności metody regresji oraz wyznaczono równania prostej i jej pasma niepewności dla symulowanych przykładów punktów o nieskorelowanych rzędnych. Nawiązano do zasad oceny dokładności według Przewodnika GUM i uwzględniono niepewność typu B nierozpatrywaną w literaturze o zastosowaniu metod regresji w pomiarach. W tej pracy omawia się wyznaczanie równania prostej regresji i jej pasm niepewności dopasowanych do pomiarów punktów o rzędnych skorelowanych. Ilustrują to przykłady o różnym skorelowaniu oraz niepewnościach bezwzględnych i względnych typów A i B mierzonych wartości zmiennej zależnej  $Y$  przy precyzyjnie znanych wartościach zmiennej niezależnej  $X$ . Omówiono też wpływ autokorelacji przy stosowaniu sposobu zwiększania dokładności przez wielokrotne powtarzanie pomiarów rzędnej każdego punktu, w tym dla wielokrotnych pomiarów tylko dwu punktów.

**Słowa kluczowe:** regresja liniowa, pasmo niepewności pomiarów typu A i typu B, skorelowanie danych

## 1. Wprowadzenie

Metoda regresji liniowej jest podstawowym narzędziem matematycznym stosowanym do wyznaczania linii prostej, lub innej zlinearyzowanej funkcji, dopasowanej do danych pomiarowych według określonego kryterium [1–4]. Ocena dokładności wyników pomiarów w służbach metrologicznych, nauce, przemyśle i wielu innych dziedzinach dokonuje się obecnie według zaleceń Przewodnika Wyznaczania Niepewności GUM [5], opisanych też w literaturze [6–9]. W literaturze o metodzie regresji liniowej dokładność wyznaczania parametrów linii prostej ocenia się statystycznie tylko z niepewności eksperymentu pomiarowego. Wpływu niepewności typu B nie rozpatrywano. Poprawna heurystyczna ocena tej niepewności jako spodziewanego skutku różnych oddziaływań, nieznanymi co do wartości

w trakcie eksperymentu, wymaga zwykle dosyć szczegółowej wiedzy i praktyki metrologicznej z wielu dziedzin pomiarowych. Nawet w najnowszych pracach o metodzie regresji opartej na podejściu Bayesa [10, 12], proponowanym do stosowania w nowej wersji Przewodnika GUM 2 [13] wpływu niepewności typu B na ocenę dokładności prostej regresji nie rozpatrywano. Autorzy, w pracy o zastosowaniu regresji liniowej [19], analizowali wyznaczanie równania prostej i jej pasma niepewności dla nieskorelowanych wartości mierzonej zmiennej zależnej  $Y$ . W oszacowaniach dokładności uwzględnili też niepewność typu B. Poniżej analizuje się zastosowanie metody regresji i jej niepewność dla skorelowanej zmiennej  $Y$ . Skorelowanie obu zmiennych rozpatrzono w pracy [11].

Wpływu znanych błędów systematycznych analizuje się za pomocą wzorów wynikających z różniczki zupełnej i eliminuje się przez poprawki. Dokładność pomiarów opisuje się niepewnością rozszerzoną jako przedziałem, w którym z zadaniem prawdopodobieństwem znajduje się wartość mierzona. Przedział ten wyznacza się na podstawie niepewności złożonej jako standardowego odchylenia rozkładu wyników pomiaru od estymatora wartości mierzonej. Jej składowymi geometrycznymi są niepewności typów A i B. Niepewność typu A opisuje rozrzut wyników pomiarów powtarzanych w przeprowadzonym eksperymencie. Zaś za pomocą niepewności typu B szacuje się heurystycznie nieznanego pochodzenia błędy systematyczne,

### Autor korespondujący:

Zygmunt Lech Warszawa, zlw1936@gmail.com

### Artykuł recenzowany

nadesłany 16.06.2020 r., przyjęty do druku 20.09.2020 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0

stałe lub wolno zmienne, mogące występować w danym eksperymencie, które randomizuje się. Zwykle niepewność typu B szacuje się na podstawie wartości maksymalnego dopuszczalnego błędu przyrządów pomiarowych MPE o symbolu  $E$ . Na przykład dla mierników cyfrowych, jako niepewność  $u_B$  przyjmuje się standardowe odchylenie  $E/\sqrt{3}$  rozkładu równomiernego o rozpięciu równym  $2E$ . Niepewność  $u_B$  tych przyrządów wzrasta liniowo z wartością średnią wielkości mierzonej. Informacje o szacowaniu niepewności pomiarów wieloparametrowych podaje Suplement 2 GUM i prace autorów [16–18].

Istotne znaczenie w metodzie regresji mają odchylenia powstałe przy nieadekwatności modelu matematycznego i zakłócenia w badanej wielkości. Traktuje się je jednolicie jak niepewności.

## 2. Podstawowe zależności regresji liniowej dla skorelowanych danych zmiennej Y

### 2.1. Kryterium w metodzie regresji przy autokorelacji zmiennej Y

W metodzie regresji liniowej dla losowej zmiennej  $Y$  wyznacza się równanie linii prostej  $y = ax + b$  i jej pasma niepewności  $U$  z pomiarów  $n$  wartości  $y_i$  (gdzie  $i = 1, \dots, n$ ), dokonywanych z niepewnościami  $u(y_i)$ , dla dokładnie określonych wartości  $x_i$  (dla  $i = 1, \dots, n$ ) zmiennej niezależnej  $X$ . Do opisu niepewności dla skorelowanych wartości  $y$  stosuje się macierz kowariancji

$$U_Y = \begin{bmatrix} u^2(y_1) & \dots & \rho_{y_1n}u(y_1)u(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{y_1n}u(y_1)u(y_n) & \dots & u^2(y_n) \end{bmatrix} \quad (1)$$

gdzie:  $\rho_{y_{ij}}$  – współczynniki korelacji par  $y_i, y_j$  zmiennej  $Y$ ,  $u(y_i)$ ,  $u(y_j)$  – ich niepewności,  $i, j = 1, \dots, n$ .

W tworzeniu prostej regresji dla danych rzeczywistych, skorelowanie wartości rzędnych  $y$  dla punktów sąsiednich jest zwykle znacznie silniejsze niż dla punktów oddalonych. Elementy z największymi wartościami współczynników korelacji występują wokół głównej przekątnej macierzy kowariancji  $U_Y$ , a pozostałe jej elementy można traktować jako równe zero.

Przy tworzeniu kryterium metody najmniejszych kwadratów dla wielowymiarowej zmiennej  $Y$  wykorzystuje się wielowymiarowy rozkład Gaussa o gęstości prawdopodobieństwa:

$$f(\mathbf{Y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \cdot \sqrt{\det(U_Y)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}[\mathbf{Y}_P - \mathbf{Y}]^T U_Y^{-1} [\mathbf{Y}_P - \mathbf{Y}]\right) \quad (2)$$

gdzie:  $\mathbf{Y} = [y_1, \dots, y_p, \dots, y_n]^T$  –  $n$ -wymiarowy wektor rzędnych  $y_i$  mierzonych punktów,  $\mathbf{Y}_P$  – wektor  $y_{pi}$  ich rzutów równoległych na prostą regresji w kierunku  $0Y$ ,  $U_Y^{-1}$  – odwrotność macierzy kowariancji.

Poszukuje się rozwiązania równania liniowego:

$$\mathbf{Y}_p = a\mathbf{X}_p + b\mathbf{1} = a\mathbf{X}_p + \mathbf{b} \quad (3)$$

gdzie:  $\mathbf{X}_p$  – wektor odciętych mierzonych punktów,  $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T$  – wektor jednostkowy  $n$ -wymiarowy.

Funkcja celu  $P$  określa gęstość prawdopodobieństwa wielowymiarowej zmiennej o rozkładzie gaussowskim. Jeśli mierzy się tylko zmienną  $Y$ , to żąda się, aby funkcja  $P = f(\mathbf{Y}) \rightarrow \max$ . Wystąpi to dla minimum funkcji kryterialnej  $SK(a, b)$

$$SK(a, b) = -\ln(f(\mathbf{Y})) \rightarrow \min \quad (4)$$

Przyjmuje się, że suma znormalizowanych kwadratów odległości mierzonych punktów o współrzędnych  $(x_i, y_i)$  dla  $i = 1, \dots, n$ , od określonych punktów  $(x_{pi}, y_{pi})$  na prostej regresji osiągnie minimum dla równej zeru sumy kwadratów pochodnych cząstkowych po parametrach  $a$  i  $b$  tej prostej.

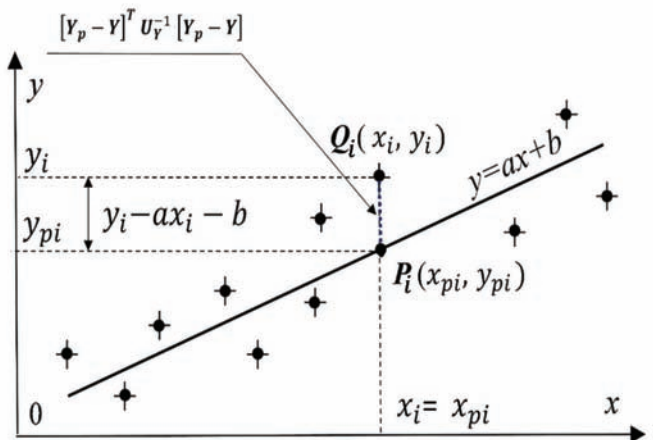
W ogólnym przypadku, gdy mierzy się wartości obu współrzędnych, może wystąpić autokorelacja zarówno między wartościami  $y_p$  jak i dla  $x_i$  punktów pomiarowych, Wyznaczenie prostej metodą regresji wymaga znajomości dwu macierzy kowariancji,  $U_Y$  i  $U_X$  dla obu zmiennych  $Y$  i  $X$ .

### 2.2. Parametry prostej regresji i ich niepewności dla auto-skorelowanej zmiennej Y

Równanie wynikające z kryterium (4) upraszcza się, gdy wartości odciętych  $x_i$  punktów mierzonych nie mają rozrzutu, czyli są określone precyzyjnie, tzn. ich niepewność  $u(x_i) = 0$ . Wówczas  $\mathbf{X}_p = \mathbf{X}$  i równanie (4) jako suma kwadratów niepewności znormalizowanych przez odwrotność macierzy kowariancji przyjmie postać:

$$SK = \Delta \mathbf{Y}^T U_Y^{-1} \Delta \mathbf{Y} = [\mathbf{Y}_P - \mathbf{Y}]^T U_Y^{-1} [\mathbf{Y}_P - \mathbf{Y}] \quad (5)$$

Zależności współrzędnych punktów  $P_i$  (rys. 1) prostej regresji  $y = ax + b$  o rzędnych  $x_{pi} = x_i$  i odciętych  $y_{pi}$ , opisuje równanie wektorowe  $\mathbf{Y}_p = a\mathbf{X}_p + \mathbf{b}$ . Odległość mierzonego punktu  $Q_i$  od punktu  $P_i$  na prostej zależy od różnic współrzędnych obu tych punktów (rys. 1).



Rys. 1. Prosta regresji dla mierzonej wartości y zmiennej Y przy znanych stałych wartościach  $x_i$

Fig. 1. Regression straight-line for measured y-value of variable Y with known constant values  $x_i$

Rozpatrzymy metodę regresji dla równoległych rzutów punktów  $Q_i$  w kierunku  $0Y$  na wyznaczaną prostą. Punkt mierzony  $Q_i$  znajduje się w odległości  $y_p - y_i = ax_i + b - y_i$  od punktu  $P_i$ . Zależności prostej regresji będą miały prostszą postać po wprowadzeniu parametrów pomocniczych:

$$S = \mathbf{1}^T U_Y^{-1} \mathbf{1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [u_y^{-1}]_{ij} \quad (6a)$$

$$S_x = \mathbf{X}^T U_Y^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}^T U_Y^{-1} \mathbf{X} \quad (6b)$$

$$S_x = \mathbf{X}^T U_Y^{-1} \mathbf{X} \quad (6c)$$

$$S_{xy} = \mathbf{X}^T U_Y^{-1} \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T U_Y^{-1} \mathbf{X} \quad (6d)$$

$$S_y = \mathbf{Y}^T U_Y^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}^T U_Y^{-1} \mathbf{Y} \quad (6e)$$

$$S_{yy} = \mathbf{Y}^T U_Y^{-1} \mathbf{Y} \quad (6f)$$

Dla  $\mathbf{X}_p = \mathbf{X}$  i  $\mathbf{Y}_p = \mathbf{a}\mathbf{X}_p + \mathbf{b}$  równanie (5) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} SK &= [\mathbf{a}\mathbf{X} + \mathbf{b} - \mathbf{Y}]^T \mathbf{U}_Y^{-1} [\mathbf{a}\mathbf{X} + \mathbf{b} - \mathbf{Y}] = \\ &= a^2 S_{xx} + 2ab S_{xy} - 2a S_{xy} + b^2 S - 2b S_y + S_{yy} \end{aligned} \quad (7)$$

Warunek minimalizacji wyrażenia (7) jako sumy kwadratów odległości  $n$  punktów  $Q_i$  od prostej regresji w kierunku osi  $0Y$  (rys. 1), wynika z rozwiązania układu dwóch równań dla jego pochodnych cząstkowych względem parametrów  $a$  i  $b$  prostej regresji, tj.  $\frac{\partial SK}{\partial a} = 0$ ,  $\frac{\partial SK}{\partial b} = 0$

$$\begin{cases} a S_{xy} + b S_x = S_{xy} \\ a S_x + b S = S_y \end{cases} \quad (8a, b)$$

Rozwiązując układ równań (8a, b) metodą wyznaczników uzyskuje się:

$$a = \frac{SS_{xy} - S_x S_y}{SS_{xx} - (S_x)^2} \equiv \frac{\Delta_a}{\Delta} \quad (9a)$$

$$b = \frac{S_y S_{xx} - S_x S_{xy}}{SS_{xx} - (S_x)^2} \equiv \frac{\Delta_b}{\Delta} \quad (9b)$$

gdzie:  $\Delta_a = SS_{xy} - S_x S_y$ ,  $\Delta_b = S_y S_{xx} - S_x S_{xy}$  i  $\Delta = SS_{xx} - (S_x)^2$ .

Kryterium  $SK_{\text{MIN}}$  z (5) będzie spełnione przez parametry  $a$  i  $b$  o wartościach z (9a, b), gdy

$$SK_{\text{MIN}} = -a S_{xy} - b S_y + S_{yy} \quad (9c)$$

Pasmo niepewności  $U(y)$  dla rzędnych  $y$  punktów prostej regresji leży symetrycznie po obu jej stronach. Wyznacza się je z uwzględnieniem niepewności  $u_a$  współczynnika kierunkowego  $a$  i niepewności  $u_b$  wyrazu wolnego  $b$ . Parametry  $a$  i  $b$  we wzorach (9a, b) są skorelowane. Pochodne cząstkowe  $\frac{\partial S_{xy}}{\partial y_i} = 0$ ,  $\frac{\partial S_y}{\partial y_i} = 0$  parametrów prostej regresji, wyznaczają wektory  $\mathbf{c}$  i  $\mathbf{d}$ :

$$\mathbf{c} = \frac{\partial S_{xy}}{\partial \mathbf{Y}} = \mathbf{U}_Y^{-1} \mathbf{X} = \mathbf{X}^T \mathbf{U}_Y^{-1} \quad (10a)$$

$$\mathbf{d} = \frac{\partial S_y}{\partial \mathbf{Y}} = \mathbf{U}_Y^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}^T \mathbf{U}_Y^{-1} \quad (10b)$$

Macierz czułości dla parametrów  $a$ ,  $b$  ma postać  $\mathbf{AB} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  i jej elementy są określone przez:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial a}{\partial \mathbf{Y}} = \frac{S_c - S_x \mathbf{d}}{\Delta} \quad (11a)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial b}{\partial \mathbf{Y}} = \frac{S_x \mathbf{d} - S_x \mathbf{c}}{\Delta} \quad (11b)$$

Z macierzowego równania propagacji wariancji wynika macierz kowariancji parametrów  $a$  i  $b$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{ab} &= \mathbf{AB} \mathbf{U}_Y \mathbf{AB}^T = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{U}_Y \mathbf{A}^T & \mathbf{A} \mathbf{U}_Y \mathbf{B}^T \\ \mathbf{A} \mathbf{U}_Y \mathbf{B}^T & \mathbf{B} \mathbf{U}_Y \mathbf{B}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a^2 & \rho_{ab} u_a u_b \\ \rho_{ab} u_a u_b & u_b^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12a)$$

gdzie:  $\rho_{ab}$  jest współczynnikiem korelacji między parametrami  $a$  i  $b$ .

Ponieważ macierz  $\mathbf{U}_Y^{-1}$  jest symetryczna podobnie jak  $\mathbf{U}_Y$ , tzn.  $\mathbf{U}_Y = \mathbf{U}_Y^T$ ,  $\mathbf{U}_Y^{-1} = (\mathbf{U}_Y^{-1})^T$  oraz  $\mathbf{U}_Y^{-1} \mathbf{U}_Y = \mathbf{I}$  – macierz jednostkowa, to otrzymuje się:  $\mathbf{c} \mathbf{U}_Y \mathbf{c}^T = \mathbf{X}^T \mathbf{U}_Y^{-1} \mathbf{U}_Y (\mathbf{X}^T \mathbf{U}_Y^{-1})^T = S_{xx}$ ,  $\mathbf{d} \mathbf{U}_Y \mathbf{d}^T = \mathbf{1}^T \mathbf{U}_Y^{-1} \mathbf{U}_Y (\mathbf{1}^T \mathbf{U}_Y^{-1})^T = S$  oraz  $\mathbf{c} \mathbf{U}_Y \mathbf{d}^T = \mathbf{d} \mathbf{U}_Y \mathbf{c}^T = \mathbf{X}^T \mathbf{U}_Y^{-1} \mathbf{U}_Y (\mathbf{1}^T \mathbf{U}_Y^{-1})^T = S_x$ ,

a elementy macierzy  $\mathbf{U}_{ab}$  upraszczają się do postaci:

$$u_a^2 = \mathbf{A} \mathbf{U}_Y \mathbf{A}^T = \frac{S}{\Delta} \quad (12b)$$

$$u_b^2 = \mathbf{B} \mathbf{U}_Y \mathbf{B}^T = \frac{S_{xx}}{\Delta} \quad (12c)$$

$$\rho_{ab} u_a u_b = \mathbf{A} \mathbf{U}_Y \mathbf{B}^T = -\frac{S_{xx}}{\Delta} \quad (12d)$$

Standardowa niepewność jednowymiarowej zmiennej  $Y$  opisanej prostą regresji  $y = ax + b$  wynosi:

$$u_{ab}^2 [y(x)] = \left[ \frac{\partial y}{\partial a} \quad \frac{\partial y}{\partial b} \right] \mathbf{U}_{ab} \left[ \frac{\partial y}{\partial a} \quad \frac{\partial y}{\partial b} \right]^T \quad (13)$$

i po wykonaniu działań:

$$\begin{aligned} u_{ab}^2 [y(x)] &= \begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a^2 & \rho_{ab} u_a u_b \\ \rho_{ab} u_a u_b & u_b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= u_a^2 x^2 + 2x \rho_{ab} u_a u_b + u_b^2 = \frac{1}{S} + \frac{S}{\Delta} \left( x - \frac{S_x}{S} \right)^2 \end{aligned} \quad (14)$$

Równanie to określa niepewność zmiennej  $\mathbf{Y}$  w funkcji dwóch skorelowanych wielkości  $ax$  i  $b$ . Niepewność złożona  $u(y)$  jest wg GUM [5] sumą geometryczną niepewności typów A i B:

$$u(y) = \sqrt{u_{ab}^2(y) + u_B^2(y)} \quad (15)$$

Wzór (15) dotyczy przypadków, gdy współrzędne  $y_i$  wszystkich punktów pomiarowych mierzy się tym samym przyrządem i w tych samych warunkach. Wówczas nie ma konieczności, by uwzględniać osobno niepewności typu B dla każdego mierzonego punktu i  $u_{regA}^2(y) = u_{ab}^2(y)$ . Niepewność typu B, tj.  $u_B(y)$  wyznacza się wtedy dla zakresu dopuszczalnego maksymalnego błędu  $E_{\text{max}}$  miernika.

Parametry  $a$  i  $b$  prostej regresji zależą od współrzędnych  $y_i$   $n$  punktów pomiarowych. Efektywna liczba stopni swobody wynosi  $n - 2$ . Niepewność rozszerzoną  $U$  prostej regresji, np. o poziom ufności 0,95, wyznacza się z niepewności złożonej  $u(y)$  mnożonej przez współczynnik rozszerzenia  $k_{0,95}$ . Dla małej liczby punktów  $n$  stosuje się rozkład  $t$ -Studenta i otrzymuje się wzór:

$$U = k_{0,95} u(y) = t_{0,95, n-2} \sqrt{u_{ab}^2(y) + u_B^2(y)} \quad (16)$$

Równanie prostej regresji z uwzględnieniem jej pasma niepewności jest więc następujące:

$$y = ax + b \pm U \quad (17)$$

i ostatecznie

$$y = ax + b \pm k_{0,95} \sqrt{u_{regA}^2(y) + u_B^2(ax + b)} \quad (18)$$

**Tabela 1. Parametry prostej regresji  $y = ax + b$  dla auto-skorelowanej i nieskorelowanej zmiennej Y**

**Table 1. Parameters of regression line  $y = ax + b$  for autocorrelated and noncorrelated variable Y**

Parametr	mierzony: $\mathbf{Y} = [y_1, \dots, y_p, \dots, y_n]^T$ z niepewnością $u_i^T$ ; znany: $\mathbf{X} = [x_1, \dots, x_p, \dots, x_n]$ , $u_i(x) = 0$		
Zmienna Y	skorelowana	nieskorelowana	
Macierz kowariancji Y i jej odwrotność	$\mathbf{U}_Y = \begin{bmatrix} u_1^2 & \dots & \rho_{y_1 n} u_1 u_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{y_1 n} u_1 u_n & \dots & u_n^2 \end{bmatrix}, \mathbf{U}_Y^{-1}$	$\mathbf{U}_Y = \begin{bmatrix} u_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & u_n^2 \end{bmatrix}, \mathbf{U}_Y^{-1} = \begin{bmatrix} u_1^{-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & u_n^{-2} \end{bmatrix}$ $\mathbf{U}_Y, \mathbf{U}_Y^{-1}$ tylko wyrazy na przekątnej	
Kryterium SK	$[a\mathbf{X} + b - \mathbf{Y}]^T \mathbf{U}_Y^{-1} [a\mathbf{X} + b - \mathbf{Y}] \rightarrow \min$	$\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 u_i^{-2} \rightarrow \min$	
Parametry prostej regresji	Współczynnik kierunkowy $a = \frac{SS_{xy} - S_x S_y}{SS_{xx} - (S_x)^2} \equiv \frac{\Delta_a}{\Delta}$ , wyraz wolny $b = \frac{S_y S_{xx} - S_x S_{xy}}{SS_{xx} - (S_x)^2} \equiv \frac{\Delta_b}{\Delta}$ gdzie: $\Delta = SS_{xx} - (S_x)^2$ , $\Delta_a = SS_{xy} - S_x S_y$ , $\Delta_b = S_y S_{xx} - S_x S_{xy}$		
	$\Delta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (v_i z_j - v_j z_i)^2 \lambda_i^{-1} \lambda_j^{-1}$	$\Delta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2 u_i^{-2} u_j^{-2}$	
Parametry pomocnicze	S	$\mathbf{U}_Y^{-1} \mathbf{1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [u_y^{-1}]_{ij}$	$\sum_{i=1}^n u_i^{-2}$
	$S_x$	$\mathbf{X}^T \mathbf{U}_Y^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}^T \mathbf{U}_Y^{-1} \mathbf{X}$	$\sum_{i=1}^n x_i u_i^{-2}$
	$S_{xx}$	$\mathbf{X}^T \mathbf{U}_Y^{-1} \mathbf{X}$	$\sum_{i=1}^n x_i^2 u_i^{-2}$
	$S_y$	$\mathbf{Y}^T \mathbf{U}_Y^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}^T \mathbf{U}_Y^{-1} \mathbf{Y}$	$\sum_{i=1}^n y_i u_i^{-2}$
	$S_{xy}$	$\mathbf{X}^T \mathbf{U}_Y^{-1} \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T \mathbf{U}_Y^{-1} \mathbf{X}$	$\sum_{i=1}^n x_i y_i u_i^{-2}$
	$S_{yy}$	$\mathbf{Y}^T \mathbf{U}_Y^{-1} \mathbf{Y}$	$\sum_{i=1}^n y_i^2 u_i^{-2}$
Macierz czułości i jej elementy	$AB = [A, B]$ $\mathbf{A} = \frac{\partial a}{\partial \mathbf{Y}} = \frac{S_c - S_x d}{\Delta}, \mathbf{B} = \frac{\partial b}{\partial \mathbf{Y}} = \frac{S_{xx} d - S_x c}{\Delta}$	$AB^T = [a, b]$ $a_i = \frac{\partial a}{\partial y_i} = \frac{1}{u_i^2} \frac{S x_i - S_x}{\Delta}, b_i = \frac{\partial b}{\partial y_i} = \frac{1}{u_i^2} \frac{S_{xx} - S_x x_i}{\Delta}$	
Macierz kowariancji $\mathbf{U}_{ab}$ Wariancje i element kowariancyjny	$\mathbf{U}_{ab} = \begin{bmatrix} u_a^2 & \rho_{ab} u_a u_b \\ \rho_{ab} u_a u_b & u_b^2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{U}_Y \mathbf{A} \mathbf{B}^T$ $u_a^2 = \frac{S}{\Delta}, u_b^2 = \frac{S_{xx}}{\Delta}, \rho_{ab} u_a u_b = -\frac{S_x}{\Delta}$		
Niepewności typu A prostej regresji	standardowa	$u_{ab}^2 = u_a^2 x^2 + 2x \rho_{ab} u_a u_b + u_b^2, x_{\min} = \frac{-\rho_{ab} u_b}{u_a}, u_{ab \min}^2 = (1 - \rho_{ab}^2) u_b^2$	
	rozszerzona	$U_{ab} = t_{95, n-2} u_{ab}$	
Jednakowe niepewności $u_i = u$	Macierz $\mathbf{U}_Y$ zastępuje się korelatorem $\mathbf{R}$ $\mathbf{U}_Y = u^2 \mathbf{R}_Y$ i $\mathbf{U}_Y^{-1} = \mathbf{R}_Y^{-1} / u^2$	$u_a^2 = \frac{u^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, u_b^2 = \frac{u^2}{n} \frac{u^2 \bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$ $\rho_{ab} u_a u_b = -\frac{u^2 \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ gdzie $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, u_{ab}^2 = u^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)$	
Estymator wariancji	$\hat{u}^2 = \frac{-a \mathbf{X}^T \mathbf{R}_Y^{-1} \mathbf{Y} - b \mathbf{Y}^T \mathbf{R}_Y^{-1} \mathbf{1} + \mathbf{Y}^T \mathbf{R}_Y^{-1} \mathbf{Y}}{n - 2}$	$\hat{u}^2 = \frac{-a \sum_{i=1}^n x_i y_i - b \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2}{n - 2}$	

<sup>1)</sup> Wzór ten otrzymuje się po transformacji wektorów  $\mathbf{1}$  i  $\mathbf{X}$  odpowiednio na wektory  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{Z}$  w taki sposób, aby  $\mathbf{1} = \mathbf{H}\mathbf{v}$  i  $\mathbf{X} = \mathbf{H}\mathbf{Z}$ . Transformacji tej dokonuje się za pomocą operatora liniowego  $\mathbf{H}$ , tj. macierzy ortogonalnej diagonalizującej macierz kowariancji  $\mathbf{U}_Y^{-1}$ , macierz  $\mathbf{H}$ , jako symetryczna, ma rzeczywiste wartości własne  $\lambda_i^{-1}$ , zaś  $\mathbf{1}$  są wartościami własnymi macierzy kowariancji  $\mathbf{U}_Y$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Wyznaczone wzory parametrów prostej regresji dla skorelowanych wartości zmiennej  $\mathbf{Y}$  i ich przypadki szczególne są zestawione w tabeli 1 w lewej kolumnie. Przy braku autokorelacji, macierz kowariancji  $\mathbf{U}_Y$  i jej odwrotność  $\mathbf{U}_Y^{-1}$  redukują się do postaci diagonalnej i zależności dla parametrów prostej regresji upraszczają się. Zestawiono je w prawej kolumnie tabeli 1. Są one szczególnie przydatnymi wzorów dla wielkości skorelowanych. Parametry i pasma niepewności dla przypadków braku skorelowania z uwzględnieniem niepewności  $u_B$  autorzy analizują szczegółowo w pracy o niepewnościach linii prostej wyznaczonej metodą regresji [19].

Dla zmiennych o wartościach skorelowanych i nieokreślonej macierzy kowariancji może pojawić się osobliwość  $\Delta = 0$ , która nie występuje, gdy macierz ta jest dodatnio lub ujemnie określona. Poprawnie zdefiniowane współczynniki korelacji gwarantują dodatnią określoność macierzy, tj. wszystkie dodatnie jej wartości własne, jak wszystkie wyznaczniki minorów głównych. W regresji dla nieskorelowanych wartości punktów pomiarowych rozwiązanie dla wartości parametrów  $a$  i  $b$  równania linii prostej są jednoznaczne, gdyż we wzorach (9a, b) zawsze mianownik  $\Delta > 0$ . W literaturze o regresji liniowej nie natrafiono ani na informację o istnieniu tej osobliwości, ani na wskazówki – jak jej unikać. Przy większej liczbie punktów można, po usunięciu jednego lub kilku punktów, ponownie poszukać rozwiązania numerycznego lub zastosować statystykę odporną. Brakuje analizy tego zagadnienia oraz propozycji dalszego postępowania.

### 3.1. Punkty pomiarowe o jednakowych niepewnościach rzędnych

Dla jednakowej wartości niepewności bezwzględnych  $u_i = u$ , macierz kowariancji wynosi:

$$\mathbf{U}_Y = u^2 \mathbf{R}_Y \quad (19)$$

gdzie korelator  $\mathbf{R}_Y$  jest kwadratową symetryczną macierzą o wymiarach  $n \times n$ , której elementami są współczynniki korelacji  $\rho_{y_j}$  między wartościami  $y_i$  i  $y_j$  dla  $i, j = 1, \dots, n$ .

Wówczas dla danego układu współczynników korelacji równanie prostej regresji będzie zawsze takie same, gdyż wartości jego parametrów  $a$  i  $b$  ze wzorów (9a, b) nie zależą od niepewności  $u$ , a tylko od macierzy korelatora. Proste dla punktów o określonym zestawie współrzędnych i jednakowych niepewnościach względnych ma inne parametry niż dla jednakowych bezwzględnych.

Dla nieznanymi ale jednakowych niepewności bezwzględnych wprowadza się pojęcie estymatora wariancji zdefiniowanego jako kwadrat minimalnej odległości dzielony przez  $n - 2$  stopni swobody:

$$\begin{aligned} \hat{u}^2 &= u^2 \frac{-aS_{xy} - bS_y + S_{yy}}{n - 2} \\ &= \frac{-a\mathbf{X}^T \mathbf{R}_Y^{-1} \mathbf{Y} - b\mathbf{Y}^T \mathbf{R}_Y^{-1} \mathbf{1} + \mathbf{Y}^T \mathbf{R}_Y^{-1} \mathbf{Y}}{n - 2} \end{aligned} \quad (20)$$

### 3.2. Korelacja w serii pomiarów rzędnej pojedynczego punktu

Autokorelacja może wystąpić w serii  $m$  powtarzanych pomiarów  $y_{i1}, \dots, y_{ik}, \dots, y_{im}$  ( $k = 1, \dots, m$ ) rzędnej  $y_i$  pojedynczego punktu. Dla punktu o odciętej  $x_i$ , przy jednakowych niepewnościach  $\sigma_{ik} = \sigma = \text{const}$  każdej rzędnej  $y_{ik}$  i wynikach skorelowanych ze współczynnikami korelacji, od  $\rho_1$  dla sąsiednich punktów do  $\rho_{m-1}$  dla najbardziej oddalonych, otrzymuje się lokalną macierz kowariancji rozmiaru  $m \times m$ .

$$\mathbf{U}_{y_i} = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho_{i1} & \rho_{i2} & \dots & \dots & \rho_{im-1} \\ \rho_{i1} & 1 & \rho_{i1} & \rho_{i2} & \dots & \dots \\ \rho_{i2} & \rho_{i1} & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \rho_{i2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \rho_{i1} \\ \rho_{im-1} & \dots & \dots & \rho_{i2} & \rho_{i1} & 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

W macierzy kowariancji  $\mathbf{U}_{y_i}$  największe skorelowanie występuje dla wyrazów bliskich wartości średniej  $y_i$ . Rzeczywista niepewność typu A tego punktu  $u_{y_i}$  jest większa niż wyznaczana z klasycznego wzoru dla  $m$  powtarzanych pomiarów wartości  $y_i$ . W ocenie niepewności  $u_{A_i}$  wartości średniej  $y_i$  punktu  $x_i$  zamiast liczby wykonanych pomiarów  $m$  trzeba wówczas zastosować efektywną ich liczbę:  $n_{\text{eff}} < m$  opisaną wzorem [4, 7–9]:

$$u_{\text{eff}} = \frac{m}{1 + 2 \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m-k}{m} \rho_{ik}} \quad (22a)$$

gdzie:  $m$  – liczba skorelowanych pomiarów,  $\rho_{ik}$  – wartość funkcji autokorelacji dla pomiaru  $y_{ik}$ .

W przypadku, gdy sąsiednie punkty serii pomiarów są skorelowane ze stałym współczynnikiem  $\rho_{ik} = \rho$  efektywna liczba serii pomiarów dla badanego punktu  $x_i$  wynosi:

$$u_{\text{eff}} = \frac{m}{1 + \rho(m-1)} \quad (22b)$$

W tabeli 2 podano przykład efektywnych niepewności  $u_{y_i}$  dla  $m$ -krotnych pomiarów rzędnej  $y_i$  badanego punktu i trzech wartości współczynnika korelacji  $\rho$  między kolejnymi pomiarami.

W każdej z trzech serii wykonano  $m = 20$  pomiarów o jednakowej niepewności  $\sigma_i$ . Z tabeli 2 wynika, że ze wzrostem współczynnika korelacji  $\rho$  zwiększa się standardowa niepewność serii, gdyż efektywna liczba pomiarów zmniejsza się z 20 do 1,9 i 1 dla współczynników korelacji odpowiednio 0, 0,5 i 1. Efektywna niepewność dla nieskorelowanych obserwacji będzie około 5 razy mniejsza, niż gdy są one w pełni skorelowane.

Tabela 2. Efektywne niepewności serii pomiarów o trzech różnych współczynnikach korelacji

Table 2. Effective uncertainties of measurement series with three different correlation coefficients

Współczynnik korelacji	$\rho$	$\rho = 0$	$\rho = 0,5$	$\rho = 1$
Efektywna liczba pomiarów	$n_{\text{eff}}$	$n_{\text{eff}} = m = 20$	$n_{\text{eff}} = \frac{2m}{m+1} = 1,9$	$n_{\text{eff}} = 1$
Efektywne niepewności serii pomiarów punktu ( $x_i, y_i$ )	$\frac{\sigma_i}{\sqrt{n_{\text{eff}}}}$	$0,22 \sigma_i$	$0,72 \sigma_i$	$\sigma_i$

### 3.3. Korelacja rzędnych różnych punktów mierzonych

Do wyznaczenia macierzy kowariancji opisującej pomiary skorelowanych rzędnych  $y_i, y_j$  punktów  $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$  przy jednakowych niepewnościach  $u_i = u_j = u = \text{const}$  można też użyć funkcji autokorelacji. W macierzy (21) niepewność  $\sigma$  pojedynczych pomiarów w serii zastępujemy niepewnością punktów pomiarowych. Autokorelacja jest funkcją symetryczną szybko malejącą od wartości maksymalnej do zera, a jej początkowe ramiona można przybliżyć linią prostą [4]. Zwykle wystarczy uwzględnić ją tylko dla sąsiednich wartości mierzonej rzędnej  $y_{i-1}, y_i, y_{i+1}$  punktów o znanych odciętych  $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$ , tzn.  $\rho_1 = \rho$  i  $\rho_k = 0$  dla  $k = 2, \dots, n-1$ . Dla jednakowo odległych  $n$  punktów oraz jednakowych niepewności  $u$  i współczynników korelacji macierzy kowariancji  $U_Y$  z (22c) o wymiarach  $n \times n$  ma wszystkie współczynniki korelacji  $\rho_k = \rho$  dla  $k = 1, \dots, n-1$ .

$$U_Y = u^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_k & \dots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_k & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \rho_k \\ \rho_k & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \rho_k & \dots & \dots & 1 & \rho_1 \\ \rho_{n-1} & \dots & \rho_k & \dots & \rho_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (22c)$$

Gdy wpływ autokorelacji jest pomijalny, to macierz  $U_Y$  redukuje się do głównej przekątnej.

## 4. Przykłady numeryczne

Symulowane przykłady numeryczne pokażą i przybliżą ilościowo podane zależności teoretyczne.

### 4.1. Proste regresji i pasma niepewności dla punktów mierzonych z jednakową niepewnością bezwzględną lub względną

W Tabeli 3 podano współrzędne i niepewności standardowe 10 mierzonych punktów.

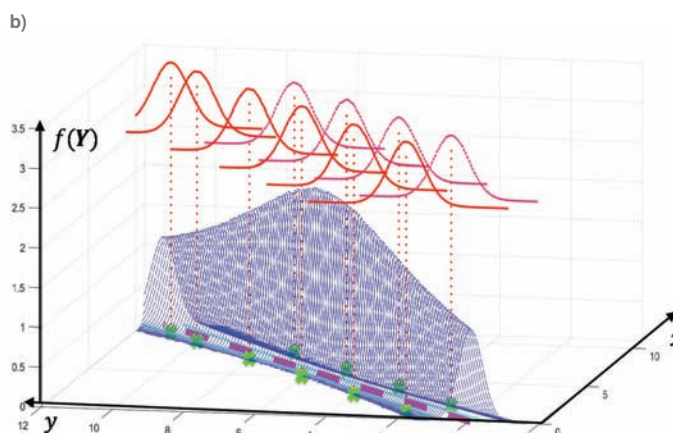
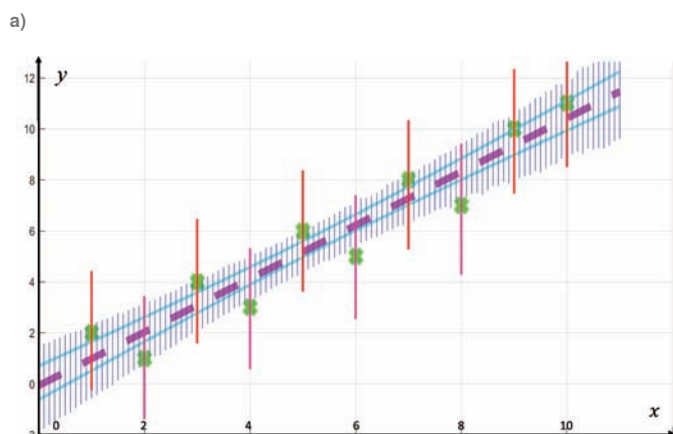
Tabela 3. Współrzędne mierzonych punktów i ich niepewności typu A bezwzględne lub względne

Table 3. Coordinates of measured points and their absolute and relative uncertainties type A

Symbol	Współrzędne i niepewności punktów									
$x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y_i$	2	1	4	3	6	5	8	7	10	11
$u_i(y_i)$	0,5									
$\sigma_i(y_i)$	5 %									
$u_B(y_i)$	$u_B(y_i) = 0,01(1 + y) \%$									

Wartości  $y_i$  są średnimi z wielokrotnych pomiarów rzędnych  $y_i$  każdego z punktów o stałej odciętej  $x_i$ . Aby zidentyfikować wpływy pojedynczych czynników analizowane będą przypadki uproszczone. Przyjęto, że niepewności bezwzględne  $u_i$  lub też względne  $\delta_i$  pomiarów wartości rzędnych  $y_i$  wszystkich punktów są jednakowe, a ich odcięte  $x_i$  są stałe i znane dokładnie. Aby porównać z wynikami dla nieskorelowanych rzędnych przyjęto takie same dane, jak w pracy [19].

Rysunek 2a przedstawia prostą i jej pasmo niepewności (kreski niebieskie) wyznaczone metodą regresji liniowej dla danych z Tabeli 3 przy braku korelacji. Pokazuje też niepewności rzęd-



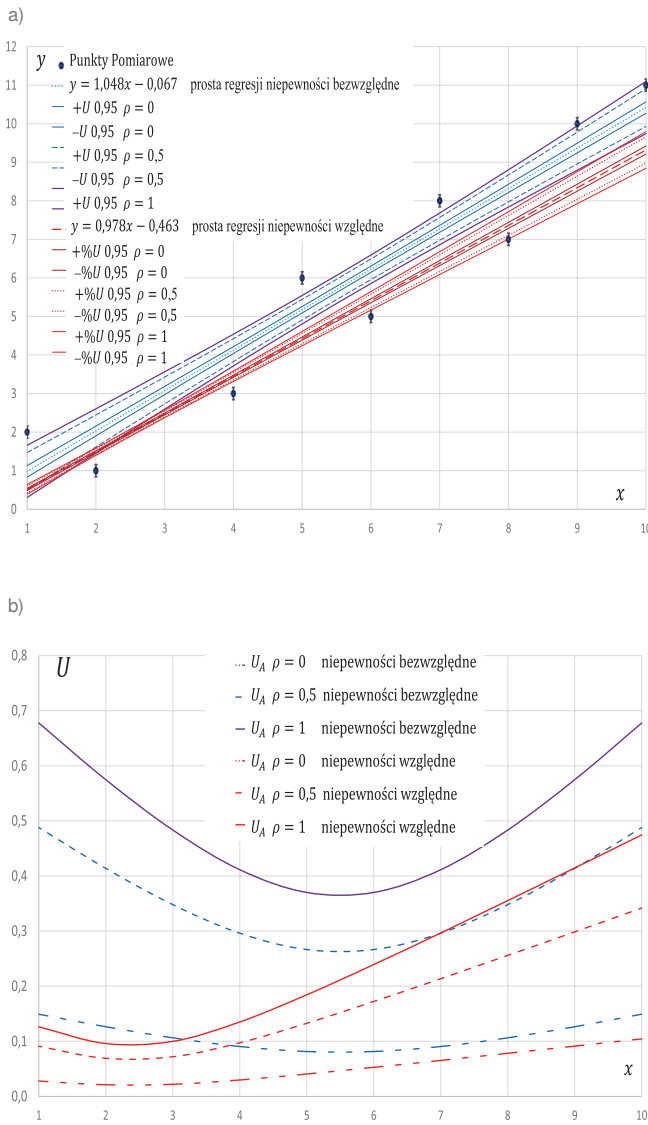
Rys. 2 a) Prosta regresji z pasmem niepewności rozszerzonej typu A i b) rozkłady gęstości prawdopodobieństwa Gaussa dla  $y$  punktów pomiarowych dla jednakowych niepewności  $u = 0,5$  punktów z pdf  $f(y)$  w 3D

Fig. 2. a) Graphs of regression line with band of its extended uncertainty type A and b) Gaussian probability density distributions (pdf-s) with uncertainty  $u = 0.5$  equal for all measured points and pdf-s  $f(y)$  of uncertainties along the regression line in 3D view

nych punktów mierzonych (kreski czerwone). Z rysunku wynika, że obszar niepewności rozszerzonej o pokryciu 95 % zmienia się wzdłuż linii regresji w taki sposób, że jego szerokość maleje od wartości początkowej do minimum w pobliżu środka zakresu linii regresji, a następnie ponownie rozszerza się do rozmiaru początkowego.

Na rysunku 2b u góry podane są wykresy gaussowskich rozkładów gęstości prawdopodobieństwa (pdf) (czerwone krzywe) dla rzędnych punktów mierzonych położonych po obu stronach prostej regresji. Funkcje gęstości prawdopodobieństwa (pdf) rzędnych  $y_i$  są dla pokrycia 95 % o odchyleniu standardowym  $u = 0,5$ . Poniżej przedstawione są krzywe gęstości prawdopodobieństwa dla  $y$  wokół prostej regresji, w pasmie jej niepewności. W środkowej części zakresu linii regresji funkcja pdf jest najwyższa, a więc i najwęższa. Maksimum pdf (najwyższy rozkład) występuje dla minimum szerokości pasma niepewności w części środkowej zakresu prostej. Przy oddalaniu się od maksimum w przeciwnych kierunkach wartość maksymalna funkcji pdf zmniejsza się i rozkład rozszerza się, gdyż granice pasma niepewności oddalają się od siebie.

Rysunek 3a przedstawia dwie proste regresji wraz z ich pasmami niepewności typu A dla rzędnych  $y_i$  punktów z tabeli 3 o różnych współczynnikach korelacji, mierzonych z różnymi, ale jednakowymi niepewnościami bezwzględnymi lub względnymi, a rysunek 3b – same ich pasma typu A i B.



**Rys. 3. a) Prosta regresji i b) jej pasma niepewności typu A dla trzech wartości współczynnika korelacji  $\rho$  jednakowego w każdej z serii 20 pomiarów dla 10 mierzonych o współrzędnych z tabeli 3**  
 Fig. 3. a) Regression line and b) its uncertainty bands type A for three values of the correlation coefficient  $\rho$  for series of 10 measuring points of 20 measurements each with coordinates from Table 3

Ze wzrostem współczynnika korelacji między wynikami powtarzanych obserwacji pomiarowych mierzonej wielkości zwiększa się jej niepewność [4, 7–9]. W punkcie 3.2 wykazano, że efektywna liczba obserwacji próbki o 20 pomiarach dla współczynnika korelacji 0, 0,5 i 1 zmniejszyła się z 20 do 1,9 i 1. Najwyższe pasmo niepewności otrzymuje się dla obserwacji nieskorelowanych, tj. dla  $\rho = 0$ . Jeśli takie pomiary wykona się dla rzędnych wszystkich 20 punktów z jednakową niepewnością, to dla współczynnika korelacji  $\rho = 1$  otrzyma się pasmo niepewności prostej regresji ponad czterokrotnie szersze niż przy braku korelacji. Ujemne współczynniki  $\rho$  w tych pomiarach nie występują.

### 4.2. Porównanie prostych regresji i pasm niepewności dla nieskorelowanych i skorelowanych wartości zmiennej Y punktów pomiarowych

Na rys. 4a,b porównano pasma niepewności typu A dla dwu prostych regresji o współrzędnych  $y$  nieskorelowanych oraz skorelowanych z macierzą kowariancji (21) o  $u_i = 0,5, \rho = 0,5$  dla punktów sąsiednich  $\rho_1 = \rho$  i  $\rho_k = 0$  dla punktów pozostałych ( $k = 2, \dots, 9$ ).

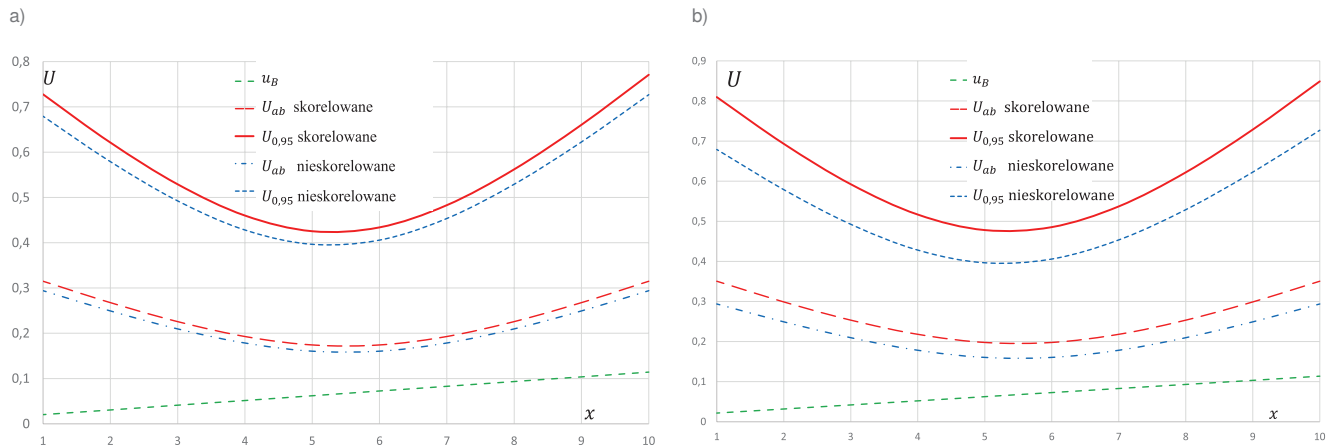
Z wykresów na rys. 4a, b wynika, że niewielkie skorelowanie między rzędnymi punktów mierzonych niewiele zmienia szerokości pasma niepewności, a uwzględnienie niepewności typu B opisane w tabeli 3 poszerza pasmo niepewności rozszerzonej na końcu zakresu prostej regresji.

### 4.4. Wpływ wartości współczynnika korelacji

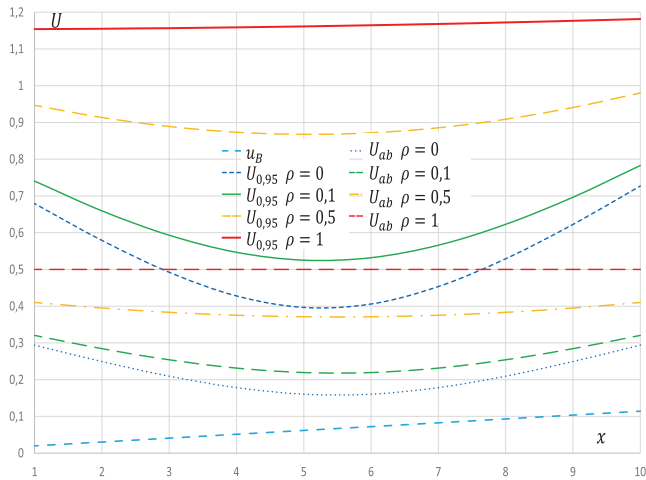
Na rys. 5 porównuje się dwie proste regresji i pasma niepewności dla macierzy kowariancji  $U_Y$  wg wzoru (21) o parametrach  $u_i = 0,5, \rho_1 = 0,6; \rho_2 = 0,5; \rho_3 = 0,4; \rho_4 = 0,2; \rho_5 = 0,1$  i  $\rho_k = 0$  dla pozostałych o  $k = 6, \dots, 9$  – prosta regresji dla punktów skorelowanych  $y = 0,981x + 0,417$ . Widoczny jest znaczny wzrost (ponad 30%) szerokości pasma prostej regresji, gdy występuje wpływ autokorelacji punktów opisany przy użyciu macierzy kowariancji. Natomiast niepewność typu B ma większy wpływ na pasmo wyznaczone bez korelacji, niż na pasmo z korelacją, gdyż przy rozpatrywanych tu danych wzrost niepewności o 1% jest pomijalny.

### 4.5. Porównanie pełnego skorelowaniu i jego braku

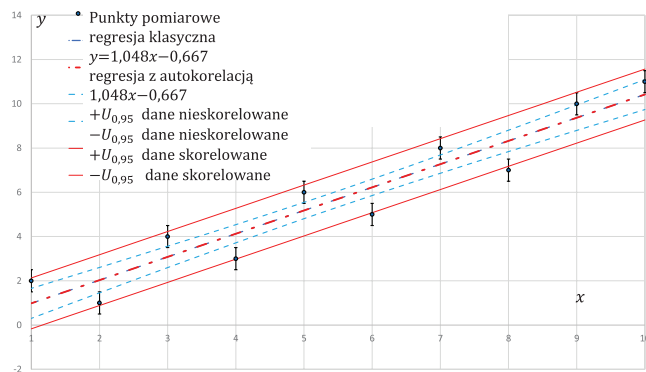
Proste regresji i ich pasma niepewności bezwzględnej dla pełnego skorelowania ( $\rho = 0,99 \approx 1$ ) mierzonych rzędnych  $Y_i$  punktów o macierzy kowariancji  $U_Y = u^2|1|$  i dla braku skorelowania ( $\rho = 0$ ), przedstawiono na rys. 6 dla niepewności.



**Rys. 4. Porównanie pasm niepewności dwu prostych regresji wyznaczonych dla nieskorelowanych i skorelowanych punktów sąsiednich o macierzy kowariancji  $U_Y$  (21) a) prosta  $y = 1,044x - 0,028$  dla punktów skorelowanych o  $\rho = 0,1$ ; b) prosta regresji  $y = 1,023x + 0,129$  dla  $\rho = 0,3$  of correlated points**  
 Fig. 4. Uncertainty bands of uncorrelated and correlated nearest points with covariance matrix  $U_Y$  (21): a) regression line  $y = 1.044x - 0.028$  for  $\rho = 0.1$  of correlated points; b) regression line  $y = 1.023x + 0.129$  for  $\rho = 0.3$  of correlated points



**Rys. 5.** Porównanie pasm niepewności linii regresji  $y = 1,048x - 0,067$  dla nieskorelowanych i skorelowanych punktów pomiarowych o trzech macierzach kowariancji  $U_Y$  z (21) dla  $u = 0,5, \rho_k = \rho$  dla  $i = 1, \dots, 9$ :  $\rho = 0,1, \rho = 0,5$  i  $\rho = 1$  z uwzględnieniem niepewności typu B  
Fig. 5. Uncertainty bands for regression line  $y = 1.048x - 0.067$  for correlated and non-correlated measurements point for three covariance matrices  $U_Y$  from (21) for  $u = 0.5, \rho_k = \rho$  for  $i = 1, \dots, 9$ :  $\rho = 0.1, \rho = 0.5$  and  $\rho = 1$  with uncertainty of type B



**Rys. 6.** Proste regresji i pasma niepewności dla punktów pomiarowych z zaznaczonymi niepewnościami przy nieskorelowanych i skorelowanych sąsiednich punktach o  $\rho \approx 1$  o macierzy kowariancji  $U_Y$   
Fig. 6. Regression lines and uncertainty bands for measuring points with uncertainties marked at uncorrelated and correlated points with  $\rho \approx 1$  for covariance matrix  $U_Y$

Z rys. 6 wynika, że przy pełnej korelacji ( $\rho = 1$ ) granice pasma niepewności o charakterze hiperbolicznym stają się liniami prostymi stając się równoległymi do prostej regresji. Zanika też przeżęnie pasma w środkowej części linii regresji. Parametry tej prostej nie zmieniają się ze wzrostem jednakowych współczynników w macierzy kowariancji.

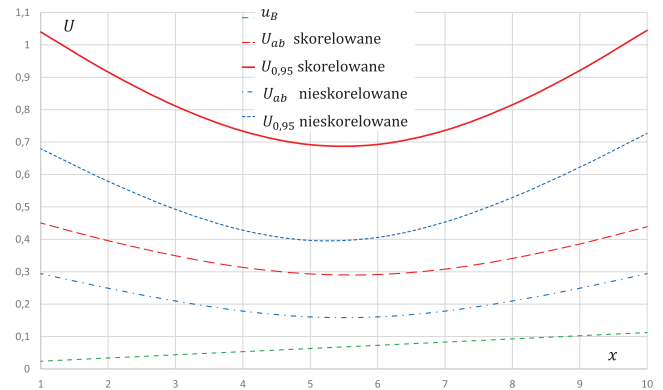
#### 4.6. Wpływ korelacji między rzędnymi punktów mierzonych

Wykresy z rys. 7 dotyczą przypadku o macierzy kowariancji między punktami z jednakowymi wartościami współczynników korelacji wg macierzy (21). Obserwuje się wzrost szerokości pasma niepewności przy występowaniu dodatniej korelacji.

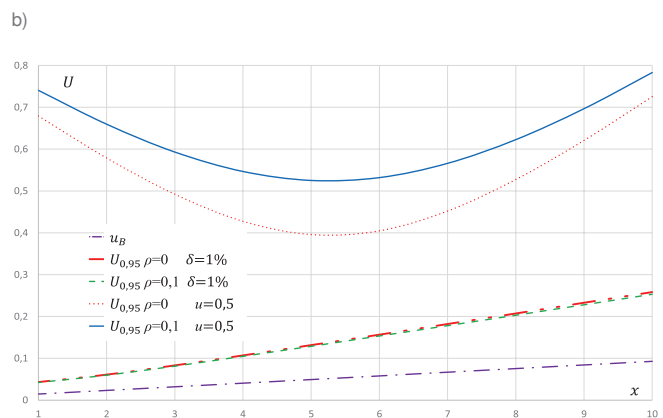
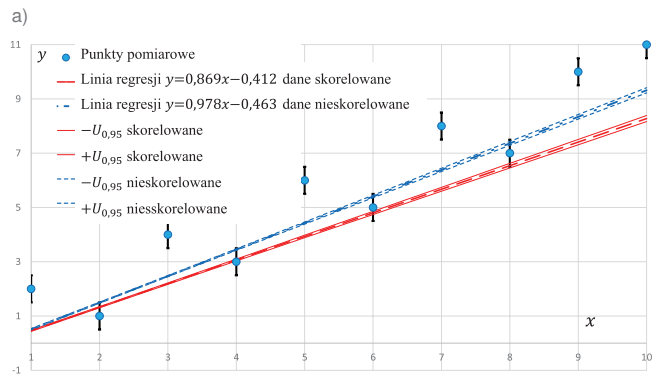
#### 4.7. Porównanie prostych regresji dla stałych niepewności bezwzględnych i względnych mierzonych punktów

Proste regresji i pasma niepewności otrzymane dla skorelowanych i nieskorelowanych rzędnych  $y_i$  punktów mierzonych z niepewnościami względnymi  $\delta = 1\%$ , porównano na rys. 8a, b.

Taka prosta dla małych wartości jednakowych współczynników korelacji (rys. 8a) odchyła się od kierunku prostej dla tych samych rzędnych punktów bez korelacji. Jej współczynnik kierunkowy zmniejszył się z 0,978 do 0,869. Granice pasma niepewności ulegają nieznacznemu poszerzeniu dla niepewności bezwzględnych i praktycznie bez zmian pozostają granice pasma dla niepewności względnych. Liniowo narastająca niepewność typu B powoduje zachwianie symetrii granic pasma typu A względem środka prostej regresji i przesunięcie w kierunku większych wartości. Wskutek tego szerokość pasma wzrasta wraz ze zmienną  $x$ , zarówno dla punktów pomiarowych o skorelowanych jak i nieskorelowanych współrzędnych.



**Rys. 7.** Pasma niepewności dla nieskorelowanych i skorelowanych mierzonych odczytów  $y_i$  punktów o macierzy kowariancji  $U_Y$  z (21)  
Fig. 7. Uncertainty bands for uncorrelated and correlated  $y_i$  of measured points with covariance matrix  $U_Y$  (21)



**Rys. 8.** Przypadki jednakowych niepewności względnych  $\delta = 1\%$  dla nieskorelowanych i skorelowanych odczytów  $y_i$  mierzonych punktów o macierzy kowariancji  $U_Y$  (21) z  $\delta = 1\%$ ,  $\rho_k = 0,1$  dla  $i = 1, \dots, 9$ ; a) proste regresji; b) pasma niepewności z uwzględnieniem niepewności typu B  
Fig. 8. Cases of equal relative uncertainty  $\delta = 1\%$  for uncorrelated and correlated  $y_i$  of measured points for the covariance matrix  $U_Y$  of (21) with  $\delta = 1\%$ ,  $\rho_k = 0.1$  for  $i = 1, \dots, 9$ ; a) regression lines; b) uncertainty bands with uncertainty of type B



## 5. Skorelowanie wartości zmiennej zależnej Y w paśmie niepewności

Obok skorelowania między punktami pomiarowymi, lub jego braku, punkty należące do prostej regresji  $y = ax + b$  są też ze sobą skorelowane. Wynika to stąd, że macierz kowariancji dwóch punktów prostej regresji  $y_i = ax_i + b$  (dla  $i = 1, 2$ ) jest określona przez równanie propagacji wariancji:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} u_{y_1}^2 & \rho_{y_1 y_2} u_{y_1} u_{y_2} \\ \rho_{y_1 y_2} u_{y_1} u_{y_2} & u_{y_2}^2 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial a} & \frac{\partial y_1}{\partial b} \\ \frac{\partial y_2}{\partial a} & \frac{\partial y_2}{\partial b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a^2 & \rho_{ab} u_a u_b \\ \rho_{ab} u_a u_b & u_b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial a} & \frac{\partial y_1}{\partial b} \\ \frac{\partial y_2}{\partial a} & \frac{\partial y_2}{\partial b} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} u_a^2 x_1^2 + 2x_1 \rho_{ab} u_a u_b + u_b^2 & u_a^2 x_1 x_2 + (x_1 + x_2) \rho_{ab} u_a u_b + u_b^2 \\ u_a^2 x_1 x_2 + (x_1 + x_2) \rho_{ab} u_a u_b + u_b^2 & u_a^2 x_2^2 + 2x_2 \rho_{ab} u_a u_b + u_b^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

gdzie:  $\frac{\partial y_1}{\partial a} = x_1$ ,  $\frac{\partial y_1}{\partial b} = 1$ ,  $\frac{\partial y_2}{\partial a} = x_2$ ,  $\frac{\partial y_2}{\partial b} = 1$ .

Dla  $y_i$  w punktach  $i = 1, 2$  kwadraty niepewności  $u_{y_i}$  i współczynnik korelacji między  $y_1$  i  $y_2$  są następujące

$$u_{y_1}^2 = u_a^2 x_1^2 + 2x_1 \rho_{ab} u_a u_b + u_b^2 \quad (23a)$$

$$u_{y_2}^2 = u_a^2 x_2^2 + 2x_2 \rho_{ab} u_a u_b + u_b^2 \quad (23b)$$

$$\rho_{y_1 y_2} = \frac{u_a^2 x_1 x_2 + (x_1 + x_2) \rho_{ab} u_a u_b + u_b^2}{u_{y_1} u_{y_2}} \quad (23c)$$

Jeśli pomiary dotyczą wyznaczenia prostej regresji opisującej charakterystykę przyrządu, procesu lub urządzenia i będzie ona stosowana przy występowaniu nieznanymi cząstkowych błędów systematycznych, niemożliwych do eliminacji w zmiennych warunkach wpływających, to trzeba też oszacować niepewność typu B. Zwykle przyjmuje się, że wynika ona z dopuszczalnego maksymalnego błędu  $E_{\max}$  mierników cyfrowych, jako funkcja liniowa  $u_B(y) = u_{B0} + \delta(y - y_0)$  lub w funkcji  $x$  jako  $u_B(x) = u_{B0} + \delta_B(b - y_0) + \delta_B a x$ . Niepewności złożone  $u_C$  prostej regresji są większe od analizowanych dotąd niepewności typu A. Niepewność złożoną  $u_C(x)$  prostej opisuje wzór:

$$\begin{aligned} u_C^2(x) &= u_{ab}^2 + u_B^2 = u_a^2 x^2 + 2x \rho_{ab} u_a u_b + u_b^2 + a^2 \delta_B^2 x^2 + \\ &+ 2xa \delta_B (u_{B0} + \delta_B (b - y_0)) + (u_{B0} + \delta_B (b - y_0))^2 \end{aligned} \quad (24)$$

Po uporządkowaniu wyrazów otrzymuje się:

$$\begin{aligned} u_C^2(x) &= (u_a^2 + a^2 \delta_B^2) x^2 + \\ &+ 2x(\rho_{ab} u_a u_b + a \delta_B (u_{B0} + \delta_B (b - y_0))) + u_b^2 + (u_{B0} + \delta_B (b - y_0))^2 \end{aligned} \quad (25)$$

Z równania (25) wynika, że po uwzględnieniu wpływu niepewności typu B, efektywne wartości niepewności złożonych  $u_{aC}$ ,  $u_{bC}$  i współczynnik korelacji  $\rho_{abC}$  wyniosą odpowiednio:

$$\rho_{y_1 y_2} = \frac{(u_a^2 + a^2 \delta_B^2) x_1 x_2 + (x_1 + x_2) \rho_{ab} u_a u_b + \delta_B (u_{B0} + \delta_B (b - y_0)) + u_b^2 + \delta_B (u_{B0} + \delta_B (b - y_0))^2}{u_{yC1} u_{yC2}} \quad (28)$$

$$u_{aC}^2 = u_a^2 + a^2 \delta_B^2 \quad (26a)$$

$$u_{bC}^2 = u_b^2 + (u_{B0} + \delta_B (b - y_0))^2 \quad (26b)$$

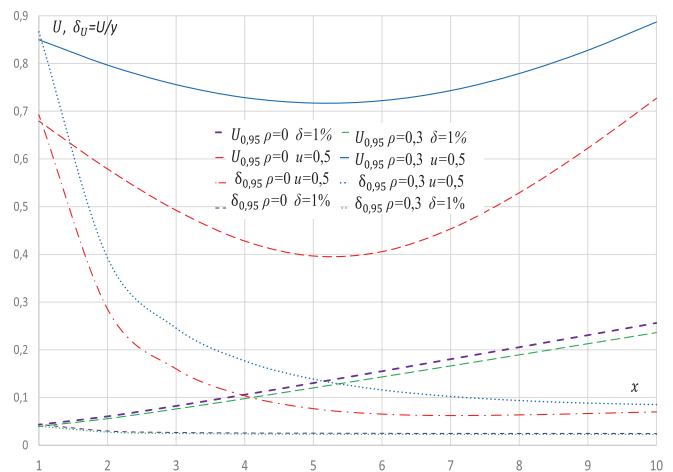
$$\rho_{abC} = \frac{\rho_{ab} u_a u_b + a \delta_B (u_{B0} + \delta_B (b - y_0))}{u_{aC} u_{bC}} \quad (26c)$$

Kwadraty niepewności złożonej w punktach  $x_i$  dla  $i = 1, 2$  wynoszą

$$\begin{aligned} u_{yCi}^2(x) &= (u_a^2 + a^2 \delta_B^2) x_i^2 + \\ &+ 2x_i (\rho_{ab} u_a u_b + a \delta_B^2 (1 + b)) + u_b^2 + \delta_B^2 (1 + b)^2 \end{aligned} \quad (27)$$

Na rys. 9 przedstawiono pasma niepewności względnych i bezwzględnych opisanych przez (27) dla niepewności bezwzględnych 0,5 i dla względnych 1 % skorelowanych zmiennych  $\rho_k = 0,3$  dla  $i = 1, \dots, 9$  z narastającą liniowo niepewnością  $u_B(y) = \delta(1 + y)$  dla  $\delta = 1\%$ , gdy  $u_{B0} = \delta_B$ ,  $y_0 = 0$ .

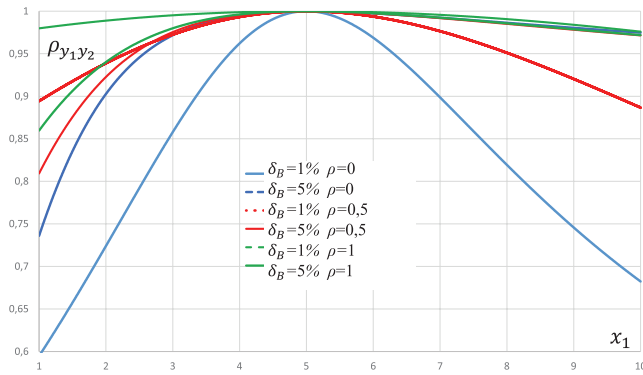
Z rys. 9 wynika, że w obszarze przewężenia pasma, niepewność dla wartości skorelowanych  $y_i$  wzrasta prawie dwukrotnie w stosunku do nieskorelowanych  $y_i$ , o jednakowych niepewnościach bezwzględnych przy niewielkim wpływie niepewności typu B nieznacznie asymetryzującej pasmo względem centralnego obszaru prostej regresji.



Rys. 9. Względne i bezwzględne niepewności typu A oraz typu A i B łącznie dla skorelowanych  $\rho_k = 0,3$  dla  $i = 1, \dots, 9$  nieskorelowanych zmiennych i z niepewnością typu B  $\delta = 1\%$  z (27) dla  $u = 0,5$  i  $\delta = 1\%$  Fig. 9. Relative and absolute uncertainties for type A and Type A and B for correlated variables  $\rho_k = 0.3$  for  $i = 1, \dots, 9$  and uncorrelated variables with taking into account type B as linear uncertainty  $\delta = 1\%$  of (27) for  $u = 0.5$  and  $\delta = 1\%$

Wyjściowe niepewności względne zmniejszają się z poziomu kilkudziesięciu procent na początku prostej regresji do poniżej 10 % na końcu. Dla niepewności względnych, pasma skorelowanych i nieskorelowanych zmiennych niemal pokrywają się. Nieznacznie są większe dla wartości zmiennych nieskorelowanych, niż dla skorelowanych. Wyjściowe wielkości względne liniowo narastają do poziomu poniżej 0,3, natomiast wartości względne nie przekraczają poziomu 2-3 %. Wpływ liniowo narastającej niepewności typu B jest praktycznie niezauważalny.

Współczynnik korelacji między zmiennymi  $y_1$  i  $y_2$  z (23b) prostej regresji z uwzględnieniem niepewności typu B (27) ma postać:



Rys. 10. Zależności współczynnika korelacji  $\rho_{y_1y_2}$  dwu wartości  $y$  prostej regresji w funkcji  $x_1$ , bez wpływu niepewności typu B ( $\delta_B = 0$ ) dla różnych wartości  $x_2$ ,  $u = 0,5$

Fig. 10. Relationships of the correlation coefficient  $\rho_{y_1y_2}$  of two values  $y$  of the regression line as a function of  $x_1$ , without influence of the uncertainty type B ( $\delta_B = 0$ ) for different values of  $x_2$ ,  $u = 0,5$

Ze względu na liniową zależność wielkości  $y$  od  $x$  zmienne te są w pełni skorelowane, co oznacza, że taki sam współczynnik korelacji (28) mają zmienne  $x_1$  i  $x_2$ .

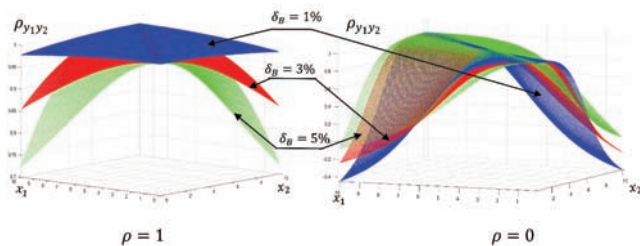
Rysunki 10 i 11 przedstawiają zależność współczynnika korelacji  $\rho_{y_1y_2}$  ze wzoru (28) między dowolnymi rzędnymi  $y$  prostej regresji o niepewności według (27).

Z rys. 10 wynika, że współczynnik korelacji w funkcji zmiennej zależy od wzajemnego położenia punktów, niezależnie czy mierzone odcięte  $y$  punktów są skorelowane, czy nie oraz czy uwzględniono liniowo narastającą niepewność typu B. Największą wartość współczynnika  $\rho_{y_1y_2} \rightarrow 1$  jest dla punktów najbliższych i zmniejsza się wraz z ich oddalaniem się.

Rysunek 11 pokazuje zależność współczynnika  $\rho_{y_1y_2}$  w funkcji dwóch zmiennych  $x_1$  i  $x_2$  dla trzech wartości procentowych niepewności względnej typu B. Współczynnik ten ma wartość  $\rho_{y_1y_2} = 1$  dla linii prostej  $x_1 = x_2$  i zmniejsza się symetrycznie względem tej linii, w miarę oddalania się punktów na prostej regresji. Odpowiadające niepewnościom typu B powierzchnie wyznaczające współczynnik korelacji układają się nad sobą ze wzrostem lub zmniejszaniem się wartości  $\delta_B = 1\%$ ,  $3\%$  i  $5\%$ , odpowiednio przy braku skorelowania i przy pełnym skorelowaniu między punktami pomiarowymi.

## 6. Wyznaczanie linii prostej dla dwóch wielokrotnie mierzonych punktów pomiarowych

Najprostszym przypadkiem jest wyznaczenie prostej i jej pasma niepewności dla liczby punktów pomiarowych  $n = 2$  [14, 15]. Linia ta przebiega przez wartości średnie wyników wielokrotnych pomiarów obu punktów, a zależność niepewności w funkcji położenia wybranej wartości zmiennej  $Y$  jest ważonym splotem zmiennych  $Y_1$  i  $Y_2$  z uwzględnieniem ich korelacji. Niepewności



Rys. 11. Wykresy 3D współczynnika korelacji w funkcji  $x_1$  i  $x_2$  dla skorelowanych i nieskorelowanych odciętych  $y$  punktów pomiarowych i różnych niepewności względnych typu B  
Fig. 11. Three dimensional (3D) charts of the correlation coefficient as a function of  $x_1$  and  $x_2$  for correlated and non-correlated variable  $y$  of measurements points and different relative uncertainties of type B

w punktach  $x_1$  i  $x_2$  oznacza się odpowiednio przez  $u_i = u(y_i)$ , dla  $i = 1, 2$  i współczynnik korelacji między ich zmiennymi  $Y$  – jako  $\rho$ . Po przyjęciu oznaczeń  $\varepsilon = u_1/u_2$  i  $\gamma = \frac{1}{1-\rho^2}$ .

z macierzy kowariancji i jej odwrotności w postaciach

$$U_Y = \begin{bmatrix} u_1^2 & \rho u_1 u_2 \\ \rho u_1 u_2 & u_2^2 \end{bmatrix} \quad U_Y^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1/u_1^2 & -\rho/u_1 u_2 \\ -\rho/u_1 u_2 & 1/u_2^2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

wyznacza się parametry (6a-f). Dla dwu mierzonych punktów są one następujące:

$$S = \mathbf{1}^T U_Y^{-1} \mathbf{1} = \gamma \left( \frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2} - \frac{2\rho}{u_1 u_2} \right) = \gamma u_1^{-2} (1 + \varepsilon^2 - 2\rho\varepsilon) \quad (30a)$$

$$S_x = \mathbf{X}^T U_Y^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}^T U_Y^{-1} \mathbf{X} = \gamma u_1^{-2} (x_1 + x_2 \varepsilon^2 - \rho\varepsilon(x_1 + x_2)) \quad (30b)$$

$$S_{xx} = \mathbf{X}^T U_Y^{-1} \mathbf{X} = \gamma u_1^{-2} (x_1^2 + x_2^2 \varepsilon^2 - 2\rho\varepsilon x_1 x_2) \quad (30c)$$

$$\Delta = S_{xx} - (S_x)^2 = \gamma^2 u_1^{-4} \varepsilon^2 (1-\rho^2) (x_2 - x_1)^2 \quad (30d)$$

$$S_y = \mathbf{Y}^T U_Y^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}^T U_Y^{-1} \mathbf{Y} = \gamma u_1^{-2} (y_1 + y_2 \varepsilon^2 - \rho\varepsilon(y_1 + y_2)) \quad (30e)$$

$$S_{xy} = \mathbf{X}^T U_Y^{-1} \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T U_Y^{-1} \mathbf{X} = \gamma u_1^{-2} (x_1 y_1 + x_2 y_2 \varepsilon^2 - \rho\varepsilon(x_1 y_2 + x_2 y_1)) \quad (30f)$$

Z (9a, b) otrzymuje się współczynnik kierunkowy  $a$  i wyraz wolny  $b$  równania prostej dla dwu punktów

$$a = \frac{SS_{xy} - S_x S_y}{\Delta} = \frac{\gamma^2 u_1^{-4} \varepsilon^2 (1-\rho^2) (x_2 - x_1) (y_2 - y_1)}{\gamma^2 u_1^{-4} \varepsilon^2 (1-\rho^2) (x_2 - x_1)^2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (31a)$$

$$b = \frac{S_y S_{xx} - S_x S_{xy}}{\Delta} = \frac{\gamma^2 u_1^{-4} \varepsilon^2 (1-\rho^2) (x_2 y_1 - x_1 y_2)}{\gamma^2 u_1^{-4} \varepsilon^2 (1-\rho^2) (x_2 - x_1)^2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_2 + y_2 = y_2 - a x_2 \quad (31b)$$

Jest to taka sama prosta regresji, jak dla dwu punktów o współrzędnych bez korelacji. Z (12b-d) wyznacza się następujące wariancje i element niediagonalne macierzy kowariancji  $U_{ab}$ :

$$u_a^2 = \frac{S}{\Delta} = \frac{u_1^2 + u_2^2 - 2\rho u_1 u_2}{(x_2 - x_1)^2} \quad (32a)$$

$$u_b^2 = \frac{S_x}{\Delta} = \frac{x_2^2 u_1^2 + x_1^2 u_2^2 - 2\rho u_1 u_2 x_1 x_2}{(x_2 - x_1)^2} \quad (32b)$$

$$\rho_{ab} u_a u_b = -\frac{S_x}{\Delta} = \frac{\rho u_1 u_2 (x_1 + x_2) - x_2 u_1^2 - x_1 u_2^2}{(x_2 - x_1)^2} \quad (33)$$

Pasmo niepewności prostej regresji wyznaczono z niepewności skorelowanych parametrów  $a$  i  $b$ :

$$u_{ab}^2(x) = u_a^2 x^2 + 2x \rho_{ab} u_a u_b + u_b^2 \quad (34)$$

Po podstawieniu (32a, b) do (34) oraz zgrupowaniu wyrazów dla  $u_1^2$ ,  $2\rho u_1 u_2$  i  $u_2^2$  otrzymuje się:

$$u_{ab}^2(x) = u_1^2 \left( \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \right)^2 + 2\rho u_1 u_2 \frac{(x_2 - x)(x - x_1)}{(x_2 - x_1)^2} + u_2^2 \left( \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)^2 \quad (35)$$

Gdy zmienną  $X$  przedstawi się jako średnią ważoną dwóch punktów sąsiadujących o współrzędnych  $x_1$  i  $x_2$ , czyli jako  $x = (1 - k)x_1 + kx_2$  z zmienną  $k$  z przedziału  $0 \leq k \leq 1$ , która określa pozycję punktu  $x$ , to niepewność  $u_{ab}$  przyjmie prostszą postać:

$$u_{ab}(k) = \sqrt{(1 - k)^2 u_1^2 + 2\rho(1 - k)ku_1 u_2 + k^2 u_2^2} \quad (36)$$

Identyczną postać zależności, jako pierwiastka kwadratowego z ważonej sumy kwadratów niepewności dla końców interpolowanego przedziału oraz podwójnego iloczynu niepewności z wagami i współczynnikiem korelacji, autorzy otrzymali dla wyznaczania niepewności w punkcie  $x$  [14, 15].

## 7. Podsumowanie i wnioski

Jest to druga z serii prac, które autorzy poświęcili analizie dokładności metod regresji liniowej pod kątem ich zastosowania w metrologii i technice pomiarowej. Przypadki dla nieskorelowanych danych mierzonej zmiennej zależnej  $Y$  omówiono w [19]. W niniejszej pracy analizuje się uogólnienie dla skorelowanych danych pomiarowych  $Y$ .

Równanie linii prostej i jej pasmo niepewności wyznacza się tu metodą ważonej regresji liniowej. Zastosowano ocenę niepewności pomiarów opartą na zaleceniach Przewodnika GUM [5], w tym uwzględniono niepewność typu B pomijaną dotychczas w literaturze o regresji oraz niepewności względne charakteryzujące pomiary cyfrowe. Równanie prostej zależy od wartości mierzonych rzędnych  $y_i$  i od elementów macierzy kowariancji. Korelację zmiennej  $Y$  opisuje się przez niediagonalne elementy macierzy kowariancji  $U_{\nu}$ .

Rozważono wpływ dodatniego skorelowania między rzędnymi punktów pomiarowych. Taka korelacja zmienia parametry równania prostej regresji i poszerza jej pasmo niepewności. Przy wzroście współczynnika korelacji sąsiednich punktów mierzonych wzrasta też nachylenie prostej regresji. Najszersze pasmo niepewności tej prostej występuje przy pełnym skorelowaniu wartości zmiennej  $Y$ , tj. gdy  $\rho = 1$ . Wówczas prosta regresji dla rzędnych skorelowanych jest identyczna jak bez korelacji. Zmienne  $x$  i  $y$  punktów prostej są w pełni skorelowane jako zależne liniowo.

Przy proporcjonalnej zmianie niepewności wszystkich mierzonych punktów, parametry prostej regresji pozostają bez zmiany i zależą tylko od elementów macierzy kowariancji. Szerokość pasma niepewności zależy liniowo od jednakowej dla wszystkich punktów niepewności bezwzględnej zdeterminowanej przez niediagonalne elementy macierzy korelatora.

Jednakowe współczynniki korelacji między rzędnymi punktów pomiarowych dają równanie prostej regresji identyczne jak w przypadku wielkości nieskorelowanych. Przy jednakowej niepewności względnej wszystkich punktów otrzymuje się te same równanie prostej regresji dla różnych wartości tej niepewności. Jest ono inne niż dla jednakowej niepewności bezwzględnej. Dotyczy to też granic pasm niepewności.

Wyznaczane z pomiarów pasma niepewności typu A prostej regresji, podobnie jak dla zmiennych nieskorelowanych, przebiegają hiperbolicznie i ich odcięte są symetryczne względem tej prostej. Dla jednakowych niepewności względnych granice pasma niepewności prostej regresji też są rozchylonymi hiperbolami o stycznych ukośnych względem tej prostej. W środkowej części pasma występuje przewężenie o szerokości  $S$  zależnej od parametrów macierzy kowariancji.

Przy pełnej korelacji, tj. dla  $\rho = 1$ , hiperboliczne przebiegające granice pasma niepewności stają się liniami równoległymi do prostej regresji. Ze wzrostem współczynnika korelacji między rzędnymi punktów badanych istotnie zmniejsza się współczyn-

nik kierunkowy prostej regresji. Punkty znajdujące się wewnątrz pasma niepewności prostej regresji są skorelowane tym silniej, im są bliżej siebie i ich współczynnik korelacji dąży do 1. Dotyczy to całego zakresu zmiennej  $y$ .

Niepewność typu B szacuje się heurystycznie na podstawie maksymalnego dopuszczalnego błędu miernika  $E$  o angielskim akronimie MPB jako odchylenie standardowe  $E/\sqrt{3}$  równomiernego rozkładu o rozstępie  $2E$ . Zwykle błąd  $E$  zależy liniowo od mierzonej wartości  $y$  (np. dla przyrządów cyfrowych). Niepewność typu B sumuje się geometrycznie z niepewnością typu A prostej regresji otrzymanej z pomiarów (pierwiastek z sumy kwadratów). Wskutek tego wypadkowe pasma niepewności złożonej i rozszerzonej poszerzają się wraz ze wzrostem  $y$  i  $x$ .

Dokładność parametrów prostej regresji prostej zwiększa się przy wielokrotnym pomiarze wartości rzędnej  $y_i$  punktów o określonej odciętej  $x_i$ . Wyniki obserwacji w takiej serii są bliskie siebie i trzeba uwzględnić wpływ autokorelacji za pomocą lokalnej macierzy kowariancji dla danego punktu, lub skorzystać ze wzoru na efektywną liczbę pomiarów [4, 7–9].

Wykryto, że dla zmiennych o wartościach skorelowanych i nieokreślonej macierzy kowariancji może pojawić się osobliwość  $\Delta = 0$ , która nie występuje, gdy macierz ta jest dodatnio określona. W literaturze o regresji liniowej nie natrafiono na informację o istnieniu tej osobliwości ani na wskazówki – jak dalej postępować.

## Bibliografia

1. Draper R.D., Smith H., *Analiza regresji stosowana*, PWN, Warszawa 1973.
2. Mańczak K., *Technika planowana eksperymentu*, WNT, Warszawa 1976.
3. Dobosz M., *Wspomagana komputerowo statystyczna analiza wyników badań*, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2004.
4. Zięba A., *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*, PWN, Warszawa 2013.
5. JCGM 100:2008, Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement; +JCGM101:2008 Supplement 1 – Propagation of distributions using a Monte Carlo method; JCGM102:2011 Supplement 2 – Extension to any number of output quantities.
6. Kessel R., Kacker R., *Correlation in uncertainty of measurement - a discussion of state-of-the-art techniques*, Proceedings of XIX IMEKO World Congress Fundamental and Applied Metrology September 6–11, 2009 Lisbon Portugal, p.2352
7. Dorzhovets M., Warszawa Z.L., *Propozycje rozszerzenia metod wyznaczania niepewności wyniku pomiarów wg Przewodnika GUM (2) „Pomiary Automatyka Robotyka”*, 2 2007, 6–12.
8. Warszawa Z.L., *Evaluation of the type A uncertainty in measurements with autocorrelated observations*, “Journal of Physics: Conference series”, Vol. 459, 2013 Joint IMEKO TC1+TC7+TC13 Symposium: Measurement Across Physical and Behavioral Sciences, Genova 4-6 Sept. Italy, DOI: 10.1088/1742-6596/459/1/0120356.
9. Warszawa Z.L., *Metody rozszerzenia analizy niepewności pomiarów*. Oficyna Wydawnicza PIAP, Warszawa 2016.
10. Elster C, Toman B., *Bayesian uncertainty analysis for a regression model versus application of GUM Supplement 1 to the least-squares estimate*. “Metrologia”, Vol. 48, 2011, 233–240, DOI:10.1088/0026-1394/48/5/001
11. Amiri-Simkooei A.R., Zangeneh-Nejad F., Asgari J., Jazaeri S., *Estimation of straight-line parameters with fully correlated coordinates*, “Measurement”, Vol. 48, 2014, 378–386, DOI: 10.1016/j.measurement.2013.11.005.
12. Chunovkina A., Stepanov A., *Estimation of Linear Regression Confidence Bands in Case of Correlated Noise*. Proceedings of 12<sup>th</sup> International Conference Measurement, 2019, 58–61, DOI: 10.23919/MEASUREMENT47340.2019.8779916.

13. Fotowicz P., *Modyfikacja sposobu obliczania niepewności pomiaru*, „Pomiary Automatyka Robotyka”, R. 20, Nr 3, 2016, 29–32, DOI: 10.14313/PAR\_221/29.
14. Warsza Z.L., Puchalski J., *Estymacja niepewności charakterystyki z pomiarów w punktach kontrolnych*, „Pomiary Automatyka Robotyka”, R. 22, Nr 4, 2018, 39–50, DOI: 10.14313/PAR\_230/39.
15. Warsza Z., Puchalski J., *Ocena niepewności punktów charakterystyki z dwu pomiarów kontrolnych*, „Zeszyty Naukowe Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej”, Nr 66, 2019, 101–108, DOI: 10.32016/2.66.21.
16. Warsza Z.L., Puchalski J., *Rozszerzona metoda oceny niepewności pośrednich pomiarów wieloparametrowych i układów do tych pomiarów. Cz. 1. Wpływ korelacji i niepewności funkcji przetwarzania – zależności podstawowe*. „Pomiary Automatyka Robotyka”, R. 23, Nr 3, 2019, 55–63, DOI: 10.14313/PAR\_233/5.
17. Warsza Z.L., Puchalski J., *Niepewność wieloparametrowych pomiarów wielkości skorelowanych*. „Zeszyty Naukowe Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej”, Nr 66, 2019, 95–100, DOI: 10.32016/2.66.20.
18. Warsza Z.L., Puchalski J., *Estimation of uncertainties in indirect multivariable measurements Part 1. Case of correlated quantities*. Proceedings of AUTOMATION 2020, Towards Industry of the Future. AISIC series, Vol. 1140, 2020, 309–325, DOI: 10.1007/978-3-030-40971-5\_29.
19. Warsza Z.L., Puchalski J., *Niepewności pomiarów w metodzie regresji liniowej. Część 1. Prosta i jej pasma niepewności dla nieskorelowanych danych pomiarowych*, „Pomiary Automatyka Robotyka”, R. 24, Nr 3, 2020, 79–91, DOI: 10.14313/PAR\_237/79.

## Uncertainty of Measurement in the Linear Regression Method Part 2. Uncertainty Bands of the Regression Straight-Line for the Correlated Data of Y Variable

**Abstract:** This is the continuation of authors' works on the description of the accuracy of various straight-line cases determined from the results of linear regression measurements. In the first work, the essence, criteria and dependencies of the regression method were examined, as well as simulated examples of determining simple uncertainty bands fitted to measured points with uncorrelated ordinates. The GUM Guide was referred to and the B type uncertainty not discussed yet in the literature about the application of the regression method in measurements was taken into account. This work discusses determining the equation of a simple regression and its uncertainty bands from measuring points with ordinates with autocorrelation. This is illustrated by examples with precisely known abscissa and ordinates with different correlation variants, and absolute and relative uncertainty types A and B. Proposed is the extended method for assessing the accuracy of simple regression takes into account both the correlation of the Y variable data and the impact of type B uncertainty in routine measurements.

**Keywords:** linear regression, band, uncertainty of A and B type, measurements, correlation

### doc. dr inż. Zygmunt Lech Warsza

zlw1936@gmail.com

ORCID: 0000-0002-3537-6134



Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Warszawskiej 1959, doktorat 1967, docent od 1970. Praca: Instytut Elektrotechniki 1958–1963 i 1994–1995, Politechnika Warszawska 1960–1970, Politechnika Świętokrzyska 1970–1978 (organizator i dziekan Wydziału Transportu w Radomiu), Organizator i kierownik: Ośrodek Aparatury Pomiarowej w Instytucie Meteorologii i Gospodarki Wodnej 1978–1982 oraz Zakładu Automatyzacji i Pomiarów w Instytucie Chemii Przemysłowej 1983–1992. Doradca Ministra Edukacji Narodowej 1992–1995, Politechnika Radomska 1983–2002. Obecnie główny specjalista w Przemysłowym Instytucie Automatyki i Pomiarów PIAP. Autor ponad 340 publikacji, 6 monografii, kilkudziesięciu prac badawczych i konstrukcyjnych, 11 patentów oraz promotor 2 doktorów. Prezes Polskiego Towarzystwa Metrologicznego. Członek stowarzyszenia PolSPAR oraz Akademii Metrologii Ukrainy.

### dr inż. Jacek Puchalski

j.puchalski@gum.gov.pl

ORCID: 0000-0002-5055-8550



Absolwent Wydziału Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej (1986 r.) oraz Wydziału Elektroniki (1988 r.) Politechniki Warszawskiej. W latach 1987–1995 asystent na Politechnice Warszawskiej, w 1995 r. obronił pracę doktorską. Kolejne 10 lat pracował w branży nowych technologii w firmach produkujących i importujących kasy rejestrujące. Przygotowywał i uczestniczył w certyfikacji nowych modeli kas w Ministerstwie Finansów oraz prowadził szkolenia i serwis urządzeń fiskalnych. Od 2006 r. pracuje w Głównym Urzędzie Miar. Zajmował się zatwierdzeniem typu i oceną zgodności taksometrów elektronicznych i mierników prędkości w ruchu drogowym, a obecnie jako główny metrolog rozwija metody matematyczne szacowania niepewności pomiarowych.