

Radosław NOWAK, Marek PIETRZAKOWSKI

Politechnika Warszawska, IPBM, ul. Narbutta 84, 02-524 Warszawa

E-mail: rnowak@simr.pw.edu.pl, mpi@simr.pw.edu.pl

Wpływ położenia i kształtu elementu piezoelektrycznego na pozyskiwaną energię elektryczną

1 Wstęp

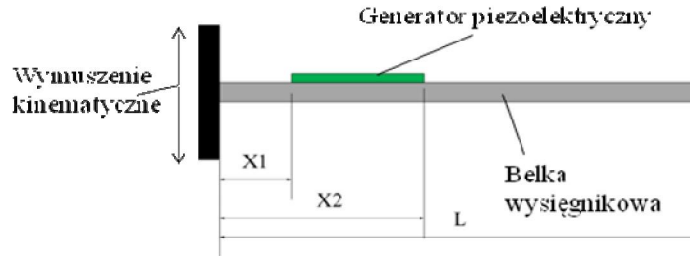
Od kilkudziesięciu lat materiały piezoelektryczne są wykorzystywane jako elementy pomiarowe i wykonawcze w wielu układach mechanicznych. Ważną grupę, ze względu na zastosowania techniczne, stanowią aktywne struktury cienkościenne. Warunkiem przeprowadzenia poprawnej analizy takich układów jest opracowanie odpowiednich modeli matematycznych. W uproszczonych modelach zakłada się idealne połączenie przetworników piezoelektrycznych z układem głównym. Zaawansowane modele aktywnych belek, w których wprowadzona została warstwa kleju, opisane są między innymi w pracach [1, 5]. Uwzględnienie szerokiego spektrum zjawisk związanych z działaniem złożonych układów mechatronicznych umożliwiają symulacje numeryczne przeprowadzane metodą elementów skończonych.

Pod koniec lat dziewięćdziesiątych dwudziestego wieku zauważalny jest wzrost zastosowań rozłożonych powierzchniowo elementów piezoelektrycznych do pozyskiwania energii elektrycznej z traconej energii drgań układów mechanicznych [7]. Sprawność transformacji energii jest stosunkowo mała, biorąc pod uwagę stosunek uzyskanej energii elektrycznej do energii wzbudzenia drgań mechanicznych. Stosowanie tego typu generatorów ma sens przy odzysku energii z tzw. szkodliwych drgań, które występują w wielu urządzeniach i zwykle są źródłem energii cieplnej lub fal akustycznych. W takim przypadku zapewnienie możliwie efektywnej zamiany części energii mechanicznej na elektryczną jest uzasadnionym działaniem naukowo-badawczym.

W niniejszym artykule, który jest rozszerzeniem pracy [3], przedstawiono analizę wpływu położenia i kształtu elementu piezoelektrycznego, przyklejonego do powierzchni belki, na wartość generowanego napięcia. W celu weryfikacji wyników posłużono się dwiema metodami obliczeniowymi: metodą analityczną i metodą elementów skończonych.

2 Analizowany układ

Rozważanym układem jest stalowa belka wysięgnikowa z przyklejonym do jej powierzchni elementem piezoelektrycznym, służącym do generowania energii elektrycznej (rys.1).



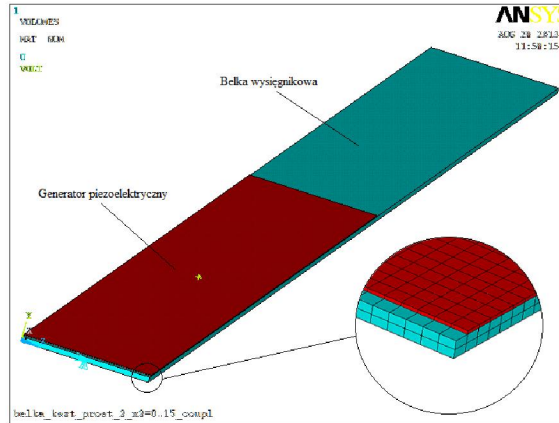
Rys.1. Schemat rozważanego układu pozyskiwania energii elektrycznej

Fig.1. Scheme of the considered energy harvesting system

Zastosowano generatory piezoelektryczne w kształcie trójkątnym i prostokątnym [4]. Współrzędne x_1 i x_2 , określające położenie elementu piezoelektrycznego, wyznaczono na podstawie obliczeń tak, aby uzyskać efektywne działanie generatora. Założono, że drgania belki wymuszone są harmonicznym ruchem podpory.

3 Opis modelu układu w metodzie elementów skończonych

W obliczeniach MES posłużono się komercyjnym oprogramowaniem ANSYS. Modelując belkę wysięgnikową, wybrano elementy ośmiowęzłowe Solid45. Do modelowania generatora piezoelektrycznego użyto elementy Solid5 z dodatkowymi elektrycznymi stopniami swobody – dokładny opis można znaleźć w [8]. Działanie elektrod, polegające na uśrednieniu obliczanego napięcia, uzyskano poprzez połączenie węzłów generatora odpowiednio na górnej i dolnej powierzchni. Nałożenie warunku zgodności przemieszczeń sąsiadujących ze sobą węzłów warstwy piezoelektryka i belki spełnia postulat idealnego połączenia. Siatkę elementów skończonych (rys. 2) dobrano, biorąc pod uwagę dokładność, czas obliczeń oraz obciążenie pamięci obliczeniowej komputera. Przyjęto harmonicznym w czasie przemieszczenie podpory jako wymuszenie drgań belki. Program ANSYS zastosowano do symulacji numerycznych o charakterze statycznym i dynamicznym. Wykorzystano analizę modalną w celu wyznaczenia częstotliwości drgań własnych układu oraz analizę harmoniczną, której wyniki przedstawiono w postaci charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych.



Rys.2. Model MES z generatorem w kształcie prostokąta
Fig.2. FEM model with a rectangular shape generator

4 Opis analitycznego modelu układu

Układem podstawowym jest belka wysięgnikowa, opisana zgodnie z teorią Eulera-Bernoulliego. Drgania belki lepkosprężystej, wymuszone poprzez ruch harmoniczny podpory, można zapisać równaniem (por. [3]):

$$E_b J_b \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \mu_b \frac{\partial^5 y}{\partial x^4 \partial t} \right) + \rho_b b t_b \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

gdzie: $y(x,t)$ – ugięcie belki w bezwzględnym układzie odniesienia; E_b , J_b , μ_b , ρ_b – odpowiednio moduł Younga, moment bezwładności przekroju poprzecznego, czas opóźnienia (model Kelvina-Voigta), gęstość materiału belki; b i t_b – odpowiednio szerokość i grubość belki.

W rozważanym przypadku warunki brzegowe mają postać:

$$y(0,t) = y_1(t); \quad \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=1} = 0; \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \Big|_{x=1} = 0 \quad (2)$$

gdzie $y_1(t)$ jest pionowym przemieszczeniem utwierdzonego końca belki.

Podstawiając do równania (1) wyrażenie

$$y(x,t) = y_1(t) + w(x,t), \quad (3)$$

otrzymano następujące równanie drgań giętych belki w układzie względnym:

$$E_b J_b \left(\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \mu_b \frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x^4 \partial t} \right) + \rho_b b t_b \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = -\rho_b b t_b \ddot{y}_1(t) \quad (4)$$

gdzie $w(x,t)$ jest ugięciem belki względem jej nieodkształconej osi.

W tym przypadku warunkom brzegowym (2) należy nadać postać:

$$w(0,t) = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=1} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{x=1} = 0 \quad (5)$$

Do rozwiązania równania drgań rozważanego układu posłużono się metodą przepustowości widmowej, której zastosowanie, w odniesieniu do belki aktywnie tłumionej przy pomocy elementów piezoelektrycznych, opisane jest między innymi w pracy [6].

Zależność ugięcia belki od wymuszenia przemieszczeniem podpory opisano w dziedzinie częstotliwości wzorem:

$$H_{wy}(x, \omega) = \frac{w(x, \omega)}{y_1(\omega)} = \sum_n \frac{A_n W_n(x) \omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\mu_n \omega_n^2 \omega} \quad (6)$$

gdzie: $W_n(x)$ – funkcja własna n -tej postaci drgań; A_n i ω_n – odpowiednio amplituda i częstość n -tej postaci drgań; ω – częstość wymuszonych drgań belki.

Przepustowość widmową $H_{vy}(\omega)$, zdefiniowaną jako stosunek generowanego napięcia $V_p(\omega)$ do wymuszenia ruchem podpory $y_1(\omega)$, podano w następującej formie:

$$H_{vy}(\omega) = \frac{V_p(\omega)}{y_1(\omega)} = -C_p \sum_n \frac{A_n S_n \omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\mu_n \omega_n^2 \omega} \quad (7)$$

We wzorze (7) S_n jest stałą elementu piezoelektrycznego odpowiadającą n -tej postaci drgań:

$$S_n = \int_0^l \frac{d^2 W_n(x)}{dx^2} b_p(x) dx \quad (8)$$

przy czym funkcją $b_p(x)$ opisano zmianę szerokości warstwy generatora wzdłuż osi belki.

Symbolem C_p oznaczono stałą generatora, której wartość zależy od właściwości materiałowych i parametrów geometrycznych układu.

$$C_p = d_{31} E_p \frac{(t_b + t_p)}{2c} \quad (9)$$

gdzie: d_{31} – stała piezoelektryczna, E_p – moduł Younga generatora, t_p – grubość warstwy generatora, c – pojemność elektryczna zdefiniowana wzorem:

$$c = A_p \frac{\epsilon_{33}}{t_p} \quad (10)$$

w którym A_p jest czynną powierzchnią elektrody, ϵ_{33} – przenikalnością dielektryczną.

W celu przeprowadzenia ilościowej oceny efektywności generatora, wprowadzono modalny współczynnik ładunku elektrycznego q_n , wyrażony w jednostkach C/m:

$$q_n = S_n d_{31} E_p \frac{(t_b + t_p)}{2} \quad (11)$$

W obliczeniach metodą analityczną wykorzystano dostępny pakiet Wolfram Mathematica 7.0.

5 Przykładowe wyniki obliczeń

W pierwszej kolejności przeprowadzono obliczenia analityczne, których celem było wyznaczenie położenia i kształtu generatora piezoelektrycznego o możliwie efektywnym działaniu. W obliczeniach przyjęto dane liczbowe zapisane w tabeli 1.

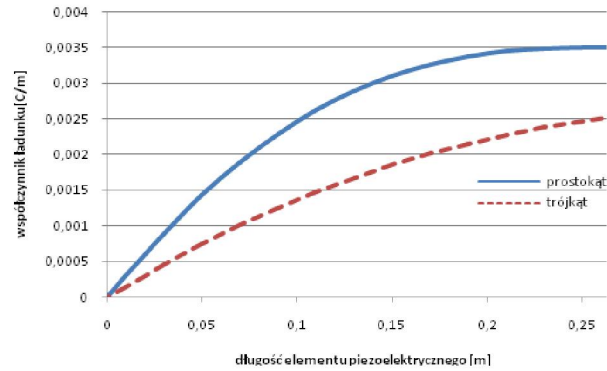
*Wpływ położenia i kształtu elementu piezoelektrycznego
na pozyskiwaną energię elektryczną*

*Tabela 1. Podstawowe parametry geometryczne i materiałowe
Table 1. Basic geometrical and material parameters*

Parametry	Belka	Generator(PZT)
Wymiary [mm]	270×25×1	(x ₂ -x ₁)×25×0,2
Moduł Younga [Pa]	2,16·10 ¹¹	6,3·10 ¹⁰
Liczba Poissona	0,33	0,3
Gęstość [kg/m ³]	7800	7280
Czas opóźnienia [s]	2·10 ⁻⁵	1·10 ⁻⁵
Położenie generatora [mm]		x ₁ =1 x ₂ zmienne
Stała piezoelektryczna d ₃₁ [m/V]		1,90·10 ⁻¹⁰
Stała piezoelektryczna d ₃₃ [m/V]		4,25·10 ⁻¹⁰
Stała piezoelektryczna d ₁₅ [m/V]		5,06·10 ⁻¹⁰
Przenikalność dielektryczna [F/m]		8,85·10 ⁻¹²

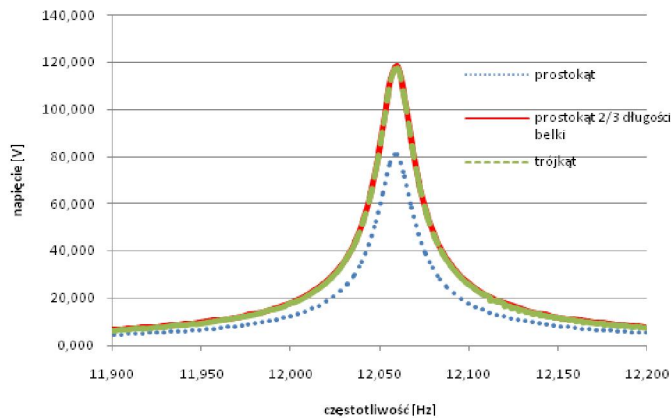
Jako kryterium doboru odpowiedniej długości piezoelementu przyjęto wartość wytwarzanego ładunku elektrycznego. Umiejscowienie generatora związane z obszarem największej krzywizny pierwszej postaci drgań własnych belki. W modelu analitycznym wprowadzono zastępczy moduł Younga materiału belki, obliczony przy założeniu równości pierwszej częstotliwości drgań własnych porównywanych modeli układu – opisanego analitycznie i za pomocą elementów skończonych.

Pokazane na rysunku 3 krzywe przedstawiają zależność współczynnika generowanego ładunku przy pierwszej postaci drgań od długości elementu piezoelektrycznego. Linia ciągła odpowiada elementowi prostokątnemu, a linia przerywana – elementowi w kształcie trójkąta równoramiennego o podstawie znajdującej się przy podporze belki wysięgnikowej. W przypadku elementu trójkątnego widoczny jest wzrost wartości ładunku elektrycznego wraz ze zwiększaniem długości generatora. W elemencie prostokątnym wpływ długości elementu na wartość ładunku wyraźnie maleje, gdy długość generatora przekracza dwie trzecie długości belki, mierząc od punktu zamocowania. Dalsze wydłużanie elementu piezoelektrycznego jest nieuzasadnione ze względu na minimalną krzywiznę w pobliżu swobodnego końca belki. Podobne rezultaty uzyskano w pracy [3].



Rys. 3. Zależność współczynnika ładunku q_1 od długości generatora piezoelektrycznego
 Fig. 3. Dependence between the electric charge coefficient q_1 and piezoelectric generator length

Na rysunku 4 przedstawiono charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe generowanego napięcia w przetwornikach: trójkątnym (linia przerywana), prostokątnym o dwóch trzecich długości belki (linia ciągła) oraz prostokątnym przyklejonym na całej długości belki (linia kropkowana). W generatorze rozłożonym na całej powierzchni belki wartość amplitudy napięcia jest mniejsza niż w dwóch pozostałych przypadkach. Efekt ten spowodowany jest wzrostem pojemności elektrycznej wraz ze wzrostem powierzchni elektrody i w konsekwencji zmniejszeniem wartości stałej generatora C_p (por. wzory 9 i 10).

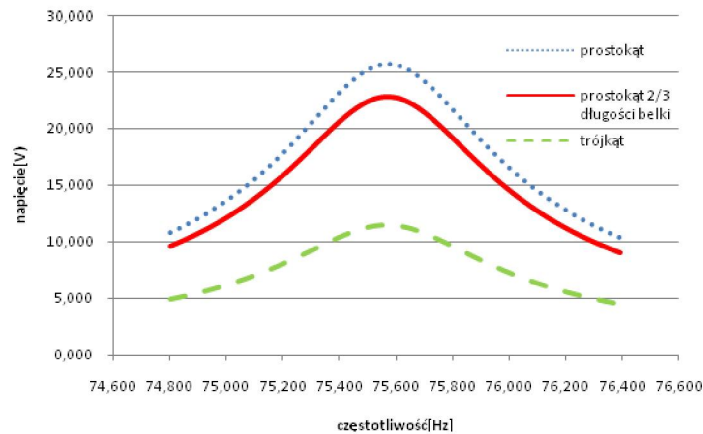


Rys. 4. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe generowanego napięcia, drgania w zakresie pierwszej częstotliwości rezonansowej
 Fig. 4. Amplitude-frequency characteristics of generated voltage, the first natural frequency vibrations

*Wpływ położenia i kształtu elementu piezoelektrycznego
na pozyskiwaną energię elektryczną*

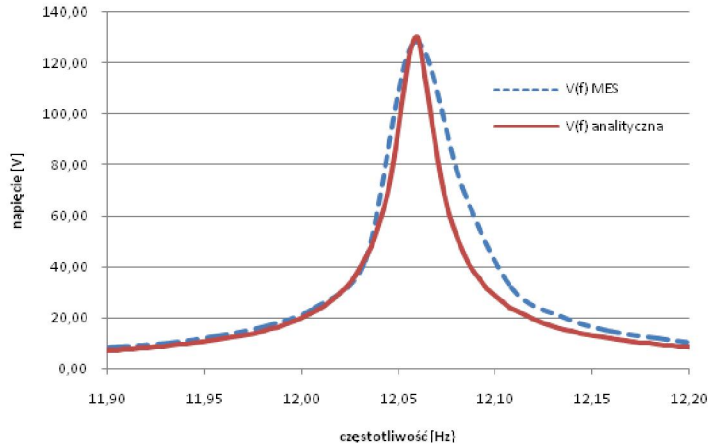
Na rysunku 5 pokazane są charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe napięcia wokół drugiej częstotliwości rezonansowej. Przetwornik trójkątny wytwarza niższe napięcie w porównaniu z przetwornikami prostokątnymi. Wynika to z kształtu drugiej postaci drgań własnych belki, przy której stosunkowo mały fragment elementu piezoelektrycznego znajduje się w obszarze największej krzywizny.

Na rysunku 6 porównano wyniki, otrzymane metodą analityczną i metodą elementów skończonych, w przypadku generatora piezoelektrycznego w kształcie prostokąta o długości dwóch trzecich długości belki. Linia przerywaną przedstawiono charakterystykę obliczoną metodą elementów skończonych, natomiast linią ciągłą – wyznaczoną metodą analityczną. Model MES można uznać za dokładniejszy ze względu na opis generatora piezoelektrycznego, w którym uwzględniono parametry materiałowe w układzie przestrzennym, a także tłumienie wewnętrzne. W modelu analitycznym właściwości generatora ograniczono tylko do jednokierunkowego efektu piezoelektrycznego, wywołanego wzdłużnym odkształceniem. Uproszczenie to jest przyczyną pewnych różnic w przebiegu charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych.



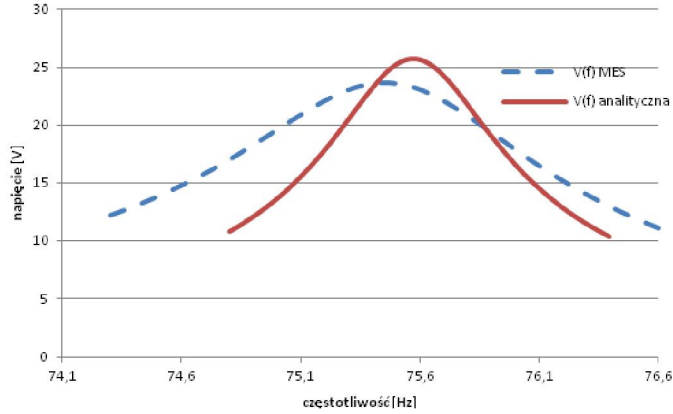
Rys. 5. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe generowanego napięcia, drgania w zakresie drugiej częstotliwości rezonansowej

Fig. 5. Amplitude-frequency characteristics of generated voltage, the second natural frequency vibrations



Rys. 6. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe generowanego napięcia, drgania w zakresie pierwszej częstotliwości rezonansowej; porównanie wyników metody analitycznej i MES

Fig. 6. Amplitude-frequency characteristics of generated voltage, the first natural frequency vibrations; results comparison of the analytical method and FEM



Rys. 7. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe generowanego napięcia, drgania w zakresie drugiej częstotliwości rezonansowej; porównanie wyników metody analitycznej i MES

Fig. 7. Amplitude-frequency characteristics of generated voltage, the second natural frequency vibrations; results comparison of the analytical method and FEM

W przypadku drgań w zakresie drugiej częstotliwości rezonansowej (rys. 7) bardziej widoczny jest efekt wprowadzonych uproszczeń w modelu analitycznym w stosunku do modelu MES. Ma tu także znaczenie sposób doboru sztywności zastępczej belki, na podstawie zgodności tylko pierwszych częstotliwości drgań własnych porównywanych modeli.

6 Uwagi końcowe i wnioski

W pracy przedstawiono model MES i model analityczny belki wysięgnikowej z idealnie zamocowanym generatorem piezoelektrycznym, poddanej wymuszeniu kinematycznemu ruchem podpory. Zbadano wpływ położenia i kształtu elementu piezoelektrycznego na pozyskiwaną energię elektryczną.

Przeprowadzono obliczenia symulacyjne modelu analitycznego z elementem piezoelektrycznym w kształcie trójkątnym i prostokątnym. Wyznaczono efektywną długość generatora prostokątnego na podstawie analizy wartości współczynnika ładunku elektrycznego przy pierwszej częstotliwości drgań własnych belki. Stwierdzono, że element prostokątny o dwóch trzecich długości belki jest równie efektywny, z punktu widzenia generowanego napięcia, jak element trójkątny rozłożony na całej długości belki. Wykazano również, że generator prostokątny rozłożony na całej długości belki pozyskuje najmniej energii z drgań mechanicznych układu głównego. Spowodowane jest to zmianą pojemności elektrycznej przetwornika piezoelektrycznego. Wyniki otrzymane metodą analityczną i MES wykazują zbliżoną maksymalną wartość wytwarzanego napięcia, przy czym przyczyną obserwowanych różnic są uproszczenia wprowadzone w modelu analitycznym.

Generowane napięcie elektryczne, w przypadku drgań z drugą częstotliwością rezonansową, ma największą wartość przy zastosowaniu przetwornika prostokątnego rozłożonego na całej długości belki wysięgnikowej, a najmniejszą, gdy element piezoelektryczny ma kształt trójkąta. Wynika to z położenia obszaru największej krzywizny belki przy drugiej postaci drgań, któremu odpowiada znacznie mniejsza efektywna powierzchnia przetwornika piezoelektrycznego.

Z punktu widzenia efektywności odzysku energii elektrycznej z energii drgań mechanicznych, w analizowanym przykładzie belki wysięgnikowej najkorzystniejsze jest zastosowanie generatora prostokątnego, rozłożonego na dwóch trzecich długości belki.

Bibliografia

1. Buchacz A.; Płaczek M.: Development of Mathematical Model of a Mechatronic System. *Solid State Phenomena*, vol. 164, 2010, 319-322
2. Friswell M.; Adhikari S.: Sensor shape design for piezoelectric cantilever beams to harvest vibration energy. *Journal of Applied Physics*, 108, 2010, 014901-014901-6
3. Nowak R.; Pietrzakowski M.: FEM analysis of influence of piezoelectric patch shape on cantilever beam energy harvesters. *Machine Dynamics Research*, vol. 4, 2012, 60-68
4. Osama J. A.; Tarunraj S.; Wetherhold R. C.: Optimal Size and Location of Piezoelectric Actuator/Sensors: Practical Considerations. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2000, 509-515

5. Pietrzakowski M.: Active Damping of Beams by Piezoelectric System: Effects of Bonding Layer Properties. *International Journal of Solids and Structures*, 38, 2001, 7885–7897
6. Pietrzakowski M.: Experiment on a cantilever beam control and theoretical approximation. *J. of Theoretical and Applied Mechanics*, 40(3), 667-689, 2002
7. Umeda M.; Nakamura K.; Ueha S.: Analysis of the transformation of mechanical impact energy to electric energy using piezoelectric vibrator. *Japanese Journal of Applied Physics*, Part 1: Regular Papers & Short Notes & Review Papers, vol. 35, 1996, 3267-3273
8. Release 11.0 Documentation for ANSYS, ANSYS Ltd. 2006.

Streszczenie

W niniejszej pracy skupiono się na zbadaniu wpływu kształtu i położenia generatora piezoelektrycznego na pozyskiwane napięcie. Rozważono układ mechaniczny w postaci belki wysięgnikowej z przyklejonym przetwornikiem piezoelektrycznym, spolaryzowanym poprzecznie. Zastosowano generator w kształcie prostokątnym i trójkątnym. Na podstawie obliczeń analitycznych dokonano wyboru możliwie efektywnego generatora. Wyznaczono charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe wytwarzanego napięcia w przypadku drgań belki w zakresie pierwszej i drugiej częstotliwości rezonansowej. Do obliczeń porównawczych, przeprowadzonych metodą elementów skończonych (MES), wybrano generator prostokątny, rozłożony na dwóch trzecich długości powierzchni belki. Wykazano zadowalającą zgodność wyników uzyskanych metodą analityczną i MES.

Słowa kluczowe: piezoelektryk, belka, MES, pozyskiwanie energii elektrycznej

Influence of the piezoelectric element position and shape on energy harvesting

Summary

This study focuses on examining the influence of the shape and position of the piezoelectric generator on the harvested voltage. The considered mechanical system is the cantilever beam with the glued transversely polarized piezoelectric transducer. Both rectangular and triangular generators were used. Using analytical calculations, the generator's shape was selected as efficiently as possible. Amplitude-frequency characteristics were determined in the first and second resonant frequency range. The rectangular generator covering two-thirds of the upper surface of the beam was selected for comparative calculations. The results of both methods were compared with acceptable agreement.

Keywords: piezoelectric, beam, FEM, energy harvesting