



Analiza falowa tarczy w płaskim stanie naprężenia metodą ruchomych, najmniejszych kwadratów

WOJCIECH DORNOWSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Inżynierii Lądowej i Geodezji,
01-908 Warszawa, ul. gen. S. Kaliskiego 2, wdornowski@wat.edu.pl

Streszczenie. W pracy rozwiązano zadanie początkowo-brzegowe propagacji płaskiej fali naprężenia w tarczy stalowej metodą ruchomych najmniejszych kwadratów. Stosowano różne siatki węzłów. W przypadku siatek z węzłami generowanymi losowo istotne znaczenie ma wybór węzłów sąsiedztwa aproksymacyjnego. Przyjęto kryterium topologiczne wynikające z triangulacji zbioru węzłów, która minimalizuje łączną długość krawędzi triangulacji. Stwierdzono, że triangulacyjny sposób wyboru otoczenia aproksymacyjnego i wygładzanie siatki nieregularnej metodą Laplace'a znacznie poprawia dokładność rozwiązania. Efekt odbicia fali naprężenia od brzegu swobodnego modelowano przez wprowadzenie węzłów fikcyjnych (poza obszarem tarczy). Otrzymane rezultaty porównano z wynikami obliczeń metodą różnicową, stwierdzając ich zgodność jakościową i ilościową.

Słowa kluczowe: mechanika konstrukcji, metody bezsiatkowe, metoda ruchomych najmniejszych kwadratów, fale sprężyste

DOI: 10.5604/12345865.1117107

1. Wstęp

Współczesne problemy mechaniki konstrukcji są rozwiązywane głównie metodą elementów skończonych (MES). Ma ona ugruntowane podstawy matematyczne, bogatą bibliotekę oprogramowania i jest skuteczna w modelowaniu nawet bardzo złożonych zagadnień początkowo-brzegowych mechaniki. Istnieje jednak grupa zagadnień, w których MES ujawnia swoje wady. Na przykład analiza procesów dużych deformacji. W takich przypadkach elementy mogą zmieniać swój kształt na tyle, że prowadzenie dalszych obliczeń wymaga zupełnej regeneracji siatki elementów. Powtórne tworzenie siatki zwykle wiąże się z utratą pierwotnej dokładności obliczeń

lub zbieżności. Innym przykładem jest analiza procesów powstawania i propagacji pęknięć przy obciążeniach dynamicznych. Wpływ konfiguracji elementów na kierunki rozwoju szczelin może uniemożliwić prawidłową ocenę tego, w istocie silnie niestatecznego zjawiska. Usuwanie tych ograniczeń w ramach samej MES jest dość kłopotliwe z uwagi na fakt, że węzły łączą ściśle relacja z elementami.

Ograniczeń tych nie mają tzw. metody bezsiatkowe [1, 2, 3]. Stanowią one pewne uogólnienie metody różnic skończonych, w której elementem kluczowym jest węzeł. W metodach bezsiatkowych aproksymacja jest rozpięta na zbiorze węzłów i nie ma dodatkowych relacji między węzłami a elementami. Zaletą metod bezsiatkowych jest to, że można je implementować w wersji adaptacyjnej, ze zmienną gęstością węzłów. W efekcie problemy modelowania dużych deformacji, propagacji pęknięć itp. można rozwiązać, spełniając wymagania sformułowań adaptacyjnych w sposób naturalny.

W metodach bezsiatkowych stosowana jest najczęściej aproksymacja wynikająca z minimalizacji błędu metodą najmniejszych kwadratów. W niniejszej pracy wykorzystano metodę ruchomych najmniejszych kwadratów (ang. *Moving Least Squares* — *MLS*). Strukturę tej metody określają następujące elementy:

- baza wielomianowa, niekiedy wzbogacana o funkcje modelujące różnego typu nieciągłości,
- funkcja wagowa określona na nośniku zwartym, związana z każdym węzłem siatki lub lokalnie z punktem, w którym definiujemy aproksymację,
- zbiór współczynników aproksymacji zależnych od położenia punktu.

Nośnik funkcji wagowej definiuje obszar wpływu węzła na aproksymację. Istnieje wiele sposobów definicji obszaru wpływu, wiele też wprowadzono różnych funkcji wagowych.

Niniejsza praca stanowi wstęp do bardziej zaawansowanych analiz zjawiska zniszczenia w materiałach niesprężystych przy obciążeniach dynamicznych z wykorzystaniem metod bezsiatkowych. Jest także kontynuacją wcześniejszych prac autora wraz z prof. P. Perzyną, w których wykorzystywano metodę różnic skończonych w sformułowaniu konwekcyjnym do modelowania procesów dużych deformacji i propagacji pęknięć w metalach obciążonych dynamicznie [4, 5]. Wydaje się, że konwekcyjne ujęcie metody ruchomych najmniejszych kwadratów otworzy możliwości bardziej efektywnej analizy tych zagadnień.

W rozdziale 2 pracy sformułowano zagadnienie początkowo-brzegowe propagacji płaskiej fali naprężenia. Problem ten w niniejszej pracy pełni rolę testu proponowanej numerycznej metody rozwiązania (MLS).

Rozdział 3 zawiera sformułowanie metody ruchomych najmniejszych kwadratów, a także stosowanej w obliczeniach funkcji wagowej. W rozdziale tym podano również sformułowanie różnicowe problemu wykorzystywane do odpowiednich porównań na etapie analizy rezultatów obliczeń numerycznych.

W rozdziale 4 przedstawiono rezultaty analizy numerycznej. Przedmiotem tej analizy jest cienka tarcza stalowa poddana wymuszeniu kinematycznemu na części brzegu. Przyjęto dwa rodzaje siatek węzłów do aproksymacji MLS. Jako pierwszą analizowano siatkę węzłów generowanych losowo w obszarze tarczy. Do wyboru węzłów otoczenia aproksymacyjnego wykorzystano triangulację minimalizującą łączną długość krawędzi triangulacji. Takie podejście umożliwiło także poprawę jakości generowanej losowo siatki jedną z metod wygładzania. Drugą siatkę tworzy regularny zbiór węzłów (siatka prostokątna), w którym zbiory węzłów aproksymacyjnych określano według kryterium odległościowego. Rozważano różne liczby węzłów w tych zbiorach, adekwatnie do rzędu aproksymacji 1 lub 2. Otrzymane wyniki porównano z rozwiązaniem różnicowym. Wnioski końcowe zawiera rozdział 5.

2. Sformułowanie problemu

W kartezjańskim układzie współrzędnych prostokątnych zbiór poszukiwanych funkcji problemu w płaskim stanie naprężenia tworzą odpowiednio składowe stanów przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia:

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \begin{bmatrix} u_x(x, y, t) \\ u_y(x, y, t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}(x, y, t) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}(x, y, t) \\ \varepsilon_{yy}(x, y, t) \\ \gamma_{xy}(x, y, t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}(x, y, t) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x, y, t) \\ \sigma_{yy}(x, y, t) \\ \tau_{xy}(x, y, t) \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Funkcje te zależą od dwóch zmiennych przestrzennych x i y oraz czasu t . Równania ruchu można zapisać w postaci jednego równania macierzowego:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.2)$$

w którym macierz operatorowa ma następującą strukturę:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Wektor przyspieszenia

$$\ddot{\mathbf{u}}^T = \partial_t^2 \mathbf{u}^T = [\ddot{u}_x, \ddot{u}_y], \quad (2.4)$$

a ρ jest gęstością materiału.

Liniowe związki geometryczne przyjmują postać

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u}. \quad (2.5)$$

Zależność pomiędzy stanem naprężenia i stanem odkształcenia wyrazimy prawem Hooke'a:

$$\sigma = \mathbf{E}\varepsilon. \quad (2.6)$$

Składowe macierzy modułów sprężystości w płaskim stanie naprężenia określamy według następujących wzorów:

$$E_{11} = E_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad E_{33} = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G, \quad E_{12} = \nu E_{11}, \quad E_{13} = E_{23} = 0, \quad (2.7)$$

gdzie E jest modułem Younga, ν współczynnikiem Poissona, a G oznacza moduł Kirchhoffa. Odpowiednie warunki brzegowe i początkowe sformułujemy, rozwiązując wybrane zadanie początkowo-brzegowe (rozdz. 4).

3. Metoda rozwiązań

3.1. Metoda różnic skończonych

W klasycznej metodzie różnic skończonych (MRS) stosuje się wyłącznie regularne siatki węzłów. Mogą one przybierać różne formy, w zależności od kształtu obszaru, w którym sformułowano zagadnienie początkowo-brzegowe. W pracy wykorzystano prostokątną siatkę węzłów o wymiarach oczka $\Delta x \times \Delta y$ (rys. 3.1).

Aproksymacja poszukiwanych funkcji wielomianem pierwszego stopnia w obszarze oczka siatki różnicowej prowadzi do prostych schematów różnicowych. Struktura ilorazu różnicowego, np. pierwszej pochodnej składowej przemieszczenia u_x względem zmiennej x jest następująca (rys. 3.1):

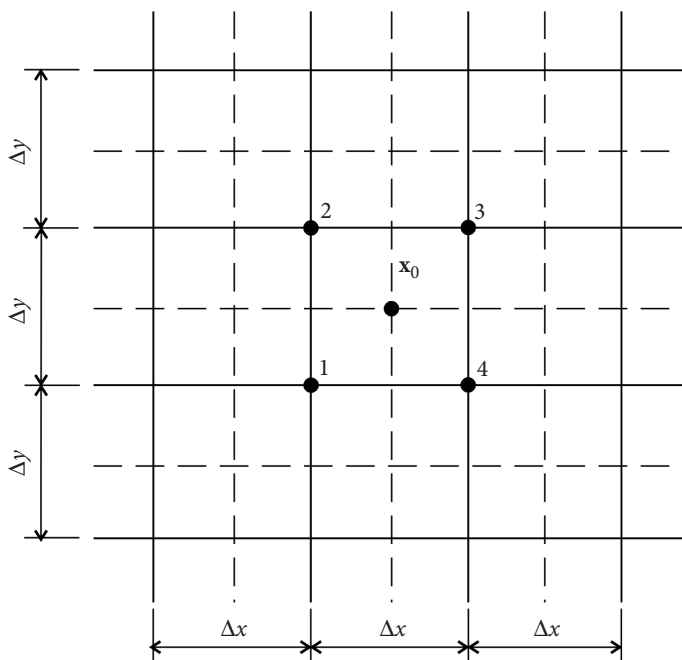
$$\partial_x u_x \Big|_{x_0} \cong \frac{1}{2\Delta x} (-u_{x1} - u_{x2} + u_{x3} + u_{x4}). \quad (3.1)$$

Stan przemieszczenia w obszarze prostokątnego oczka siatki różnicowej jest opisany przemieszczeniami jego węzłów:

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [u_{x1} \quad u_{y1} \quad u_{x2} \quad u_{y2} \quad \dots \quad u_{x4} \quad u_{y4}]. \quad (3.2)$$

Natomiast stan odkształcenia określimy, wykorzystując różnicowe sformułowanie związków geometrycznych (2.5). W zapisie macierzowym otrzymujemy:

$$\varepsilon = \mathbf{G}\hat{\mathbf{u}}. \quad (3.3)$$



Rys. 3.1. Regularna siatka węzłów metody różnicowej

Macierz operatorów różnicowych ma wymiar 3×8 i następującą postać:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\xi & 0 & \xi & 0 & -\xi & 0 & \xi & 0 \\ 0 & -\eta & 0 & -\eta & 0 & \eta & 0 & \eta \\ -\eta & -\xi & -\eta & \xi & \eta & -\xi & \eta & \xi \end{bmatrix}, \quad \xi = 1/\Delta x, \quad \eta = 1/\Delta y. \quad (3.4)$$

Znajomość odkształceń w obrębie oczka siatki różnicowej pozwala, na podstawie wzoru (2.6), obliczyć składowe stanu naprężenia. Naprężenia we wszystkich punktach węzłowych tworzą macierz jednokolumnową o dwunastu składowych:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^T = [\sigma_{xx1} \quad \sigma_{yy1} \quad \tau_{xy1} \quad \sigma_{xx2} \quad \sigma_{yy2} \quad \tau_{xy2} \quad \dots \quad \sigma_{xx4} \quad \sigma_{yy4} \quad \tau_{xy4}]. \quad (3.5)$$

Z kolei przyspieszenia odpowiednich przemieszczeń określimy, wykorzystując różnicowe sformułowanie równań ruchu (2.2):

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{H} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.6)$$

Macierz operatorów różnicowych

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\xi & 0 & -\eta & \xi & 0 & -\eta & -\xi & 0 & \eta & \xi & 0 & \eta \\ 0 & -\eta & -\xi & 0 & -\eta & \xi & 0 & \eta & -\xi & 0 & \eta & \xi \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

ma teraz wymiar 2×12 .

Przyspieszenie w obrębie oczka siatki różnicowej w chwili t_τ aproksymujemy następującą formułą różnicową:

$$\ddot{\mathbf{u}}^\tau = \frac{\mathbf{u}^{\tau+1} - 2\mathbf{u}^\tau + \mathbf{u}^{\tau-1}}{\Delta t^2} = \frac{\Delta \mathbf{u}^{\tau, \tau+1} - \Delta \mathbf{u}^{\tau-1, \tau}}{\Delta t^2}. \quad (3.8)$$

W rezultacie równania ruchu (3.6) przybierają postać przyrostową:

$$\Delta \mathbf{u}^{\tau, \tau+1} = \Delta \mathbf{u}^{\tau-1, \tau} + \check{\mathbf{H}} \hat{\sigma}^\tau, \quad \check{\mathbf{H}} = \frac{\Delta t^2}{\rho} \mathbf{H}. \quad (3.9)$$

Jawne sformułowanie (3.9) jest warunkowo stabilne i wymaga określenia wartości krytycznej kroku czasowego Δt . Znajomość przemieszczeń w chwili poprzedniej i odpowiedniego przyrostu przemieszczeń pozwala określić przemieszczenia w chwili następnej we wszystkich węzłach siatki różnicowej według wzoru:

$$\mathbf{u}^{\tau+1} = \mathbf{u}^\tau + \Delta \mathbf{u}^{\tau, \tau+1}. \quad (3.10)$$

Postać warunków początkowych zależy będzie od rozważanego zagadnienia początkowo-brzegowego.

3.2. Metoda ruchomych najmniejszych kwadratów

Rozważamy zbiór Ω N węzłów rozproszonych w obszarze dwuwymiarowym (nieregularna siatka węzłów). Współrzędne i -tego węzła oznaczamy przez \mathbf{x}_i . Poszukujemy kompletnego wielomianu złożonego z m funkcji bazowych, który jest najlepszym przybliżeniem średniokwadratowym aproksymowanej funkcji na podzbiorze $\bar{\Omega}$ n węzłów, przy czym $n > m$.

W takim przypadku funkcja aproksymacyjna nie odtwarza ściśle wartości węzłowych. Minimalizujemy kwadraty różnic wartości funkcji aproksymacyjnej i wartości węzłowych z pewną wagą, która uwzględnia wpływ odległości rozpatrywanego węzła na błąd aproksymacji. Funkcję u rozwijamy w szereg w otoczeniu wybranego ze zbioru $\bar{\Omega}$ węzła \mathbf{x}_0 :

$$\hat{u}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) a_j(\mathbf{x}_0) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}_0), \quad (3.11)$$

gdzie $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ jest kompletnym wielomianem rzędu p mającym m wyrazów:

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2, \dots, \ x^p, \ x^k, \ y^{p-k}, \dots, \ y^p]. \quad (3.12)$$

Wektor współczynników zależnych od wyboru punktu \mathbf{x}_0 ma następującą strukturę:

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{x}_0) = [a_1(\mathbf{x}_0) \ a_2(\mathbf{x}_0) \ \dots \ a_m(\mathbf{x}_0)]. \quad (3.13)$$

Funkcjonał błędu H jest funkcją położenia węzła \mathbf{x}_0 ,

$$H(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n w(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0) \left[\sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_i) a_j(\mathbf{x}_0) - u(\mathbf{x}_i) \right]^2. \quad (3.14)$$

W zapisie macierzowym forma funkcyjonału błędu jest następująca:

$$H = (\mathbf{P}\mathbf{a} - \mathbf{u})^T \mathbf{W}(\mathbf{P}\mathbf{a} - \mathbf{u}), \quad (3.15)$$

gdzie

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2, \dots, & x_1^p, & x_1^k, & y_1^{p-k}, \dots, & y_1^p \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2, \dots, & x_2^p, & x_2^k, & y_2^{p-k}, \dots, & y_2^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n & x_n^2 & x_n y_n & y_n^2, \dots, & x_n^p, & x_n^k, & y_n^{p-k}, \dots, & y_n^p \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

jest macierzą $n \times m$ wartości funkcji bazowych określonych dla wszystkich n węzłów. Wartości funkcji u w punktach węzłowych zapisujemy w postaci:

$$\mathbf{u}^T = [u(\mathbf{x}_1) \ u(\mathbf{x}_2) \ \dots \ u(\mathbf{x}_n)]. \quad (3.17)$$

Macierz wag zależy od wyboru (położenia) węzła \mathbf{x}_0 i ma następującą strukturę:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_0) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & w(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_0) \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Współczynniki $a_j(\mathbf{x}_0)$, $j = 1, 2, 3$ wyznaczymy, minimalizując funkcjonal błędu H , zatem

$$\partial_{a_k} H = 2 \sum_{i=1}^n w(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0) \left[\sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_i) a_j(\mathbf{x}_0) - u(\mathbf{x}_i) \right] p_k(\mathbf{x}_i) = 0. \quad (3.19)$$

W rezultacie otrzymamy układ równań algebraicznych:

$$\sum_{j=1}^m c_{kj} a_j = \sum_{j=1}^n b_{kj} u_j, \quad (3.20)$$

w którym

$$c_{kj} = c_{jk} = \sum_{i=1}^n w(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0) p_j(\mathbf{x}_i) p_k(\mathbf{x}_i), \quad b_{kj} = \sum_{i=1}^n w(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0) p_j(\mathbf{x}_i) u_j. \quad (3.21)$$

W zapisie macierzowym jest:

$$\mathbf{C}\mathbf{a} = \mathbf{B}\mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (3.22)$$

gdzie

$$\mathbf{C} = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{P}^T \mathbf{W}. \quad (3.23)$$

Podstawiając (3.22) do (3.11), otrzymujemy następujące wyrażenie na rozważaną aproksymację:

$$\hat{u}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{p}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \mathbf{u}, \quad (3.24)$$

gdzie

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \mathbf{p}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} \quad (3.25)$$

są funkcjami kształtu w rozważanej metodzie bezsiatkowej.

W implementacji numerycznej funkcję $u(\mathbf{x})$ w otoczeniu węzła \mathbf{x}_0 zwykle przybliża się wielomianem potęgowym względem współrzędnych lokalnych $\tilde{x} = x - x_0$, $\tilde{y} = y - y_0$, które są tak dobrane, aby w punkcie centralnym o współrzędnych (x_0, y_0) nowe współrzędne $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ były równe zeru:

$$\hat{u}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{j=1}^m p_j(\tilde{x}, \tilde{y}) a_j(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = \mathbf{p}^T(\tilde{x}, \tilde{y}) \mathbf{a}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0). \quad (3.26)$$

W rezultacie wartości funkcji aproksymowanej i jej pierwszych pochodnych przestrzennych w punkcie \mathbf{x}_0 można określić na podstawie poniższych wzorów:

$$\hat{u}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = a_1, \quad \hat{u}_{,x}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = a_2, \quad \hat{u}_{,y}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = a_3. \quad (3.27)$$

Funkcja wagowa na ogół jest także definiowana w układzie lokalnym związanym z punktem \mathbf{x}_0 . W niniejszej pracy funkcję wagową przyjęto w postaci [1]:

$$w(\rho) = 1 - 6\rho^2 + 8\rho^3 - 3\rho^4, \quad (3.28)$$

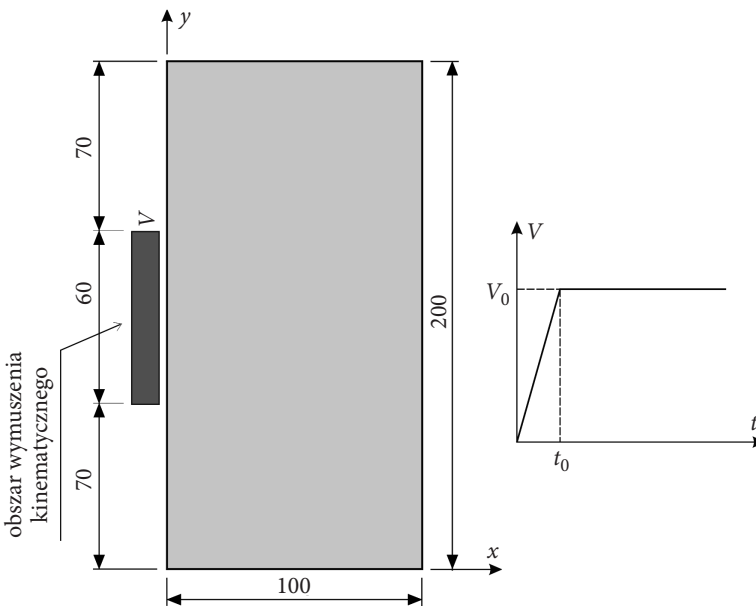
gdzie

$$\rho = r / r_0, \quad r = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}. \quad (3.29)$$

Przez r_0 oznaczono promień obszaru wpływu wagi. Dla węzła centralnego $w(\rho = 0) = 1$ i $w(\rho = 1) = 0$.

Na funkcjonal błędu (3.14) mają wpływ tylko te węzły, które leżą w obszarze wpływu wagi (w jej nośniku). Warto zauważyć, że w proponowanym podejściu nie istnieje jeden globalny sposób tworzenia funkcji aproksymowanej. Ten sposób w każdym punkcie obszaru jest inny i to zasadniczo odróżnia metody bezsiatkowe od MES. W załączniku A do artykułu zamieszczono podprogram napisany w języku FORTRAN 95, obliczający gradienty aproksymowanej funkcji według podanych wyżej zasad.

4. Przykład obliczeniowy



Rys. 4.1. Wymiary (w milimetrach) oraz sposób obciążenia cienkiej tarczy stalowej

Przedmiotem analizy numerycznej jest cienka tarcza stalowa o wymiarach w planie jak na rysunku 4.1. Obciążenie części brzegu tarczy modelowano nadaną prędkością węzłów według zależności:

$$V(t) = V_0 t / t_0 \text{ dla } t \leq t_0 \text{ i } V(t) = V_0 \text{ dla } t > t_0. \quad (4.1)$$

Czas wzrostu prędkości wymuszenia do wartości $V_0 = 10$ m/s wynosi $t_0 = 1,0$ μ s. Przyjęto jednorodnie warunki brzegowe i początkowe. Założono płaski stan naprężenia (rozdz. 2). Podobna tarcza była przedmiotem analiz propagacji pęknięcia metodą różnicową w pracach [4, 5].

Celem tej analizy jest m.in. przedstawienie możliwości niemalże dowolnego kształtowania zbioru punktów węzłowych metody ruchomych najmniejszych kwadratów. Na wstępie przyjęto siatkę punktów generowanych losowo w obszarze tarczy. Problemem pozostaje wybór węzłów sąsiednich rozważanego węzła \mathbf{x}_0 . Wykorzystano triangulację obszaru tarczy minimalizującą łączną długość krawędzi triangulacji. Przyjęto, że zbiór punktów sąsiednich rozpatrywanego węzła \mathbf{x}_0 stanowią punkty końcowe krawędzi triangulacji wychodzących z \mathbf{x}_0 (rys. 4.2). Podejście takie pozwala także poprawić jakość generowanej losowo siatki jedną z metod wygładzania.

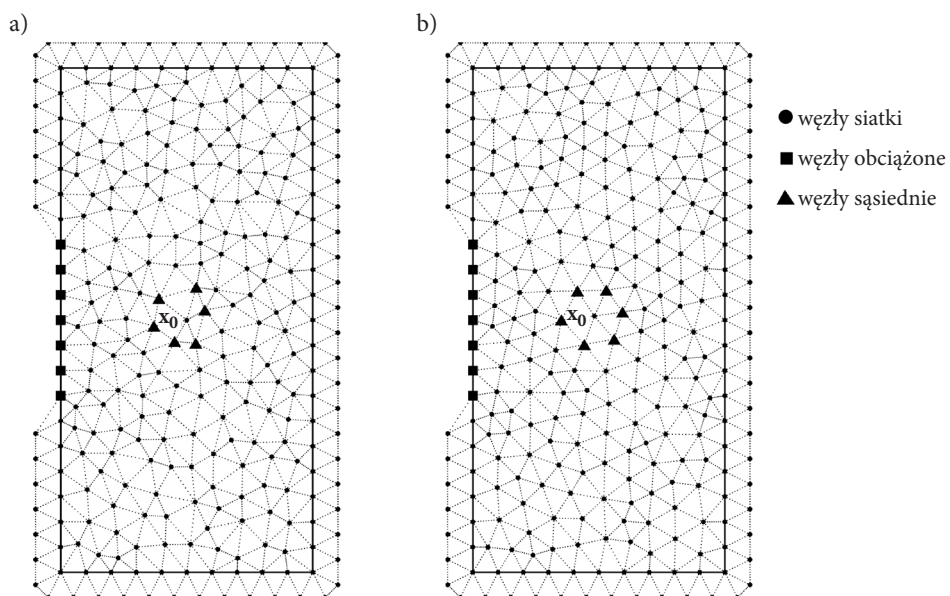
Idea wygładzania polega na przesuwaniu węzłów wewnętrznych triangulacji (tzn. nieprzylegających do żadnej z krawędzi brzegowych) w taki sposób, aby średnia jakość otoczenia punktów sąsiednich uległa poprawie. Nowe położenie punktu w prezentowanym algorytmie jest obliczane według następującej procedury iteracyjnej:

$$\mathbf{x}_0^{iter+1} = \mathbf{x}_0^{iter} + \varphi \frac{\sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i^{iter} - \mathbf{x}_0^{iter})}{n}. \quad (4.2)$$

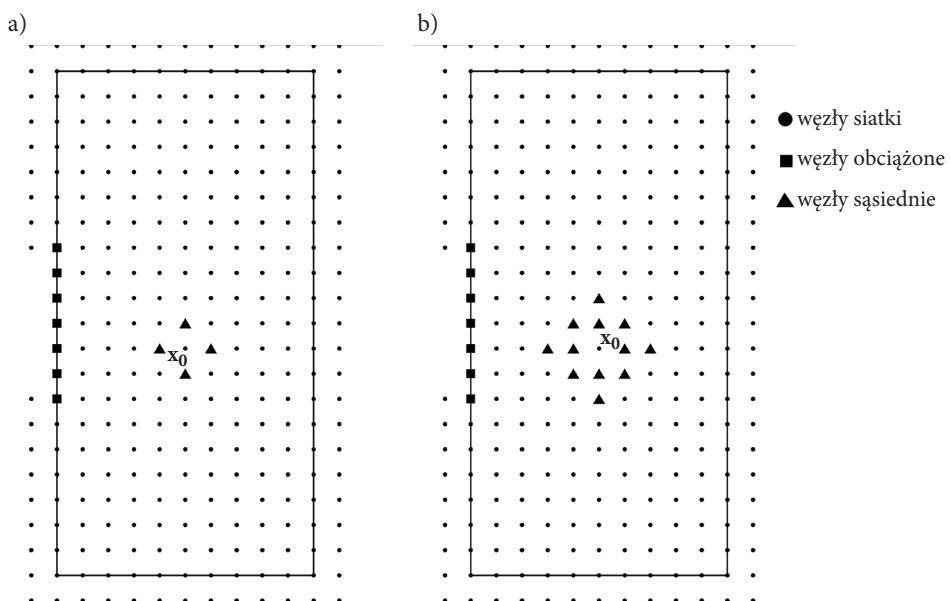
W powyższym równaniu n jest liczbą węzłów sąsiednich z otoczenia punktu \mathbf{x}_0 , \mathbf{x}_0^{iter+1} oznacza położenie węzła centralnego obliczone w kolejnej iteracji $iter + 1$, wartość parametru relaksacji φ zwykle przyjmujemy z przedziału $(0, 1]$. Efekt wygładzenia siatki z rysunku 4.2b uzyskano przy $\varphi = 0,7$.

Fikcyjne węzły leżące poza obszarem tarczy służą do aproksymacji warunków brzegowych na krawędzi swobodnej (nieobciążonej). W tych węzłach składowe stanu naprężenia znikają, $\sigma = 0$.

W analizie numerycznej wykorzystano także siatki regularne, dobierając „sąsiadów” wg kryterium odległościowego (najbliższych w stosunku do węzła centralnego) (rys. 4.3). Dobór minimalnej liczby węzłów sąsiednich zależy od zadanego rzędu aproksymacji. Jeżeli rząd aproksymacji ma być równy jedności, to liczba węzłów sąsiednich nie powinna być mniejsza od dwóch. W przypadku rzędu aproksymacji $p = 2$ liczba punktów sąsiednich musi przekraczać 4.



Rys. 4.2. Siatki węzłów generowanych losowo: a) bez wygładzania; b) siatka poprawiona metodą wygładzania Laplace'a



Rys. 4.3. Regularna siatka węzłów: a) rząd aproksymacji $p = 1$; b) rząd aproksymacji $p = 2$

Niżej przedstawiamy rezultaty obliczeń, w których wykorzystano różne siatki. Rozwiązanie uzyskane na siatce punktów wygenerowanych losowo oznaczono przez L1. Siatka ta zawiera 5151 węzłów rzeczywistych. Z uwagi na sposób doboru węzłów sąsiednich (rys. 4.2b) możliwa jest jedynie aproksymacja rzędu 1. Odległość najbliższej usytuowanej pary „sąsiadów” w tej siatce wynosi $\Delta s = 9,78 \cdot 10^{-4}$ m. Wartość krytyczną kroku czasowego w jawnym sformułowaniu różnicowym względem czasu (3.9) wyraża wzór:

$$\Delta t_{kr} = \Delta s / c, \quad (4.3)$$

gdzie

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \quad (4.4)$$

jest prędkością falową. Przyjmując dane jak dla stali ($E = 200$ GPa, $\nu = 0,3$, $\rho = 7830$ kg/m³), otrzymujemy: $c = 5298$ m/s, $\Delta t_{kr} = 0,1846$ μ s. W obliczeniach operowano wartością kroku czasowego pomniejszoną o 20%.

Rozwiązanie przy regularnej siatce węzłów umożliwiającej aproksymację rzędu 1 (rys. 4.3a) oznaczono przez R1. Siatka ta zawiera tę samą liczbę węzłów co siatka wygenerowana losowo L1, a $\Delta s = 20 \cdot 10^{-4}$ m, zatem $\Delta t_{kr} = 0,3775$ μ s. Przez R2 oznaczono rozwiązanie uzyskane na siatce o tych samych parametrach co w rozwiązaniu R1, lecz o zwiększonej liczbie węzłów sąsiednich. W tym przypadku możliwa jest aproksymacja rzędu 2. Oznaczenie D nosi rozwiązanie uzyskane metodą różnicową wg podejścia przedstawionego w rozdziale 3.1. Siatka metody różnic skończonych zawierała również 5151 węzłów rzeczywistych.

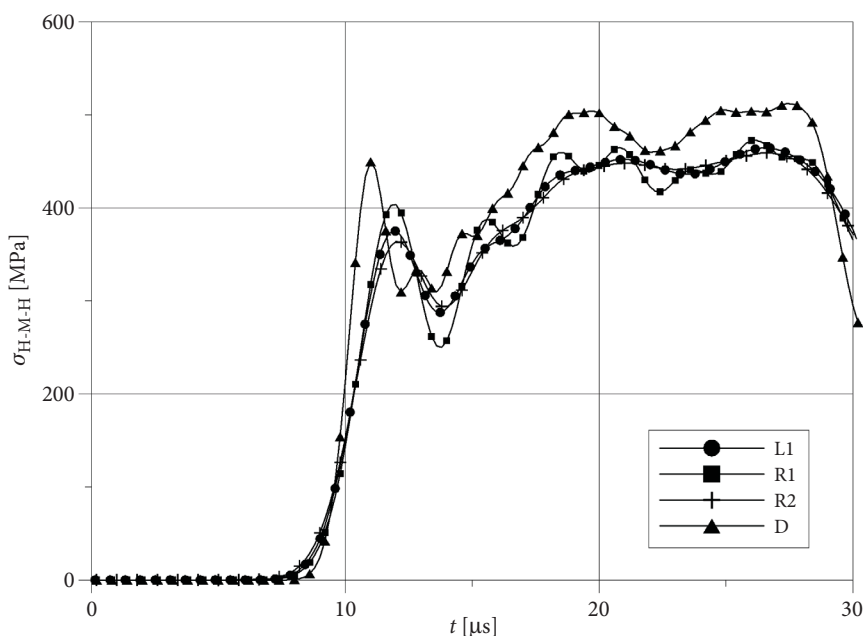
Na rysunku 4.4 przedstawiono zmienność w czasie naprężenia zastępczego według hipotezy wytrzymałościowej Hubera-Misesa-Hencky'ego (H-M-H) w punkcie środkowym tarczy:

$$\sigma_{H-M-H} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2}. \quad (4.5)$$

Czas dotarcia frontu fali naprężenia do tego punktu wynosi $t = 9,44$ μ s.

Zwraca uwagę zgodność rozwiązań L1 i R2 o różnych rzędach aproksymacji. Można wnioskować, że sposób wyboru otoczenia węzłów sąsiednich ma kluczowe znaczenie dla stosowanej metody bezsiatkowej. Triangulacja i wygładzanie siatki nieregularnej metodą Laplace'a poprawia dokładność rozwiązania o rzędzie aproksymacji 1 na tyle, że jest ono porównywalne z rozwiązaniem na siatce regularnej o rzędzie aproksymacji 2.

Rozwiązanie R1 (siatka regularna, rząd aproksymacji 1) charakteryzuje się większymi amplitudami zmian σ_{H-M-H} w stosunku do pozostałych rozwiązań. Metoda różnicowa daje wartości naprężenia σ_{H-M-H} nieco większe niż w pozostałych przypadkach.



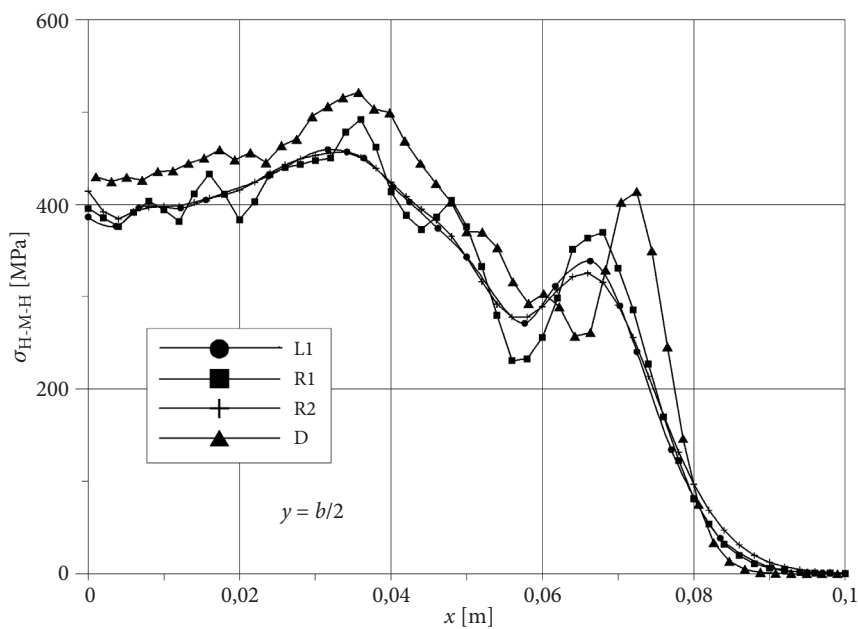
Rys. 4.4. Zmienność w czasie naprężenia zastępczego wg hipotezy H-M-H w punkcie środkowym tarczy (oznaczenia stosowane na wykresie opisano w tekście)

Na rysunku 4.5 zamieszczono profil naprężenia według hipotezy H-M-H w przekroju wzdłuż krótszej osi symetrii tarczy określony w chwili $t = 15 \mu\text{s}$. Charakterystyczną cechą rozwiązania R1 są silne gradienty zmian analizowanego naprężenia. Zbliżone wartości $\sigma_{\text{H-M-H}}$ uzyskano z rozwiązań L1 i R2 (różne rzędy aproksymacji), największe zaś w rozwiązaniu D (metoda różnicowa).

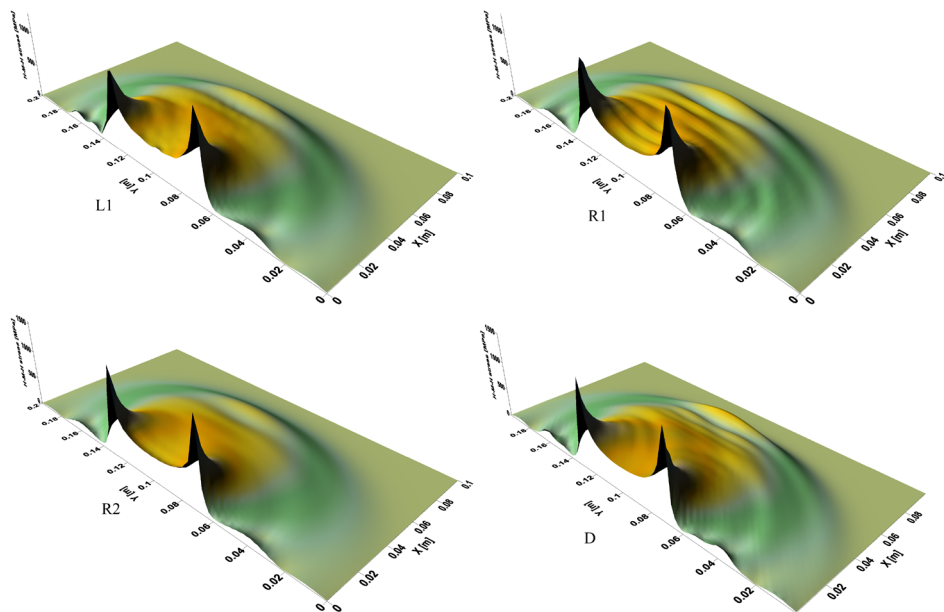
Charakter przestrzennych rozkładów naprężenia $\sigma_{\text{H-M-H}}$ w chwili $t = 15 \mu\text{s}$ przedstawiono na rysunku 4.6. Silna lokalizacja tego naprężenia na krawędzi obciążonej wynika z nieciągłego rozkładu wymuszenia kinematycznego (rys. 4.1). Najbardziej regularny rozkład $\sigma_{\text{H-M-H}}$ uzyskano w rozwiązaniu R2 (siatka prostokątna z aproksymacją rzędu 2). W przypadku rozwiązania L1 można zauważyć lokalne zróżnicowanie wartości rozważanego naprężenia, wynikające z silnie niejednorodnego rozkładu węzłów generowanych losowo. Rozwiązania R1 i uzyskane metodą różnicową D charakteryzują się większymi gradientami w rozważanym rozkładzie.

Warto zwrócić uwagę, że przy wszystkich rozwiązaniach front fali po określonym czasie ($t = 15 \mu\text{s}$) znajduje się w tym samym miejscu tarczy (rys. 4.6). Świadczy to o poprawności stosowanej procedury całkowania względem czasu i o stabilności rozwiązania numerycznego.

Przyjęty sposób aproksymacji warunku brzegowego ($\sigma = 0$), przez wprowadzenie węzłów fikcyjnych umożliwia także modelowanie odbicia fali naprężenia od brzegu

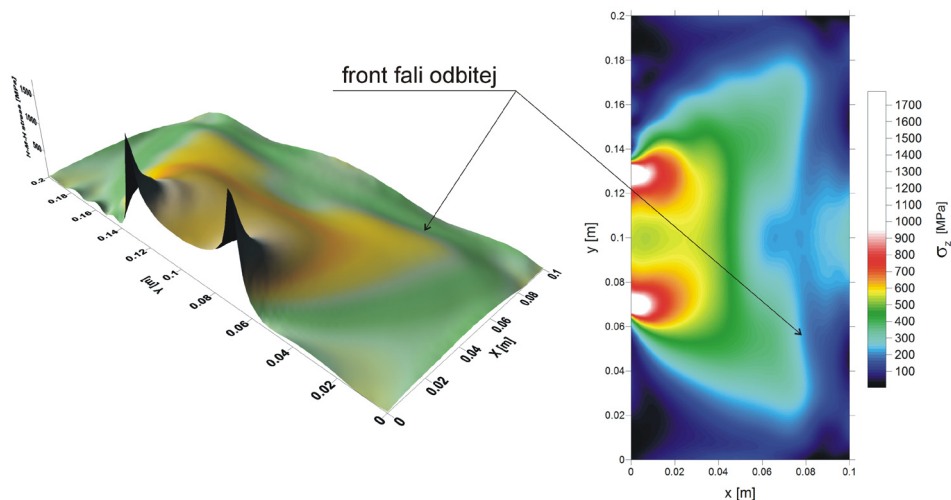


Rys. 4.5. Rozkład naprężenia zastępczego σ_{H-M-H} w przekroju wzdłuż krótszej osi symetrii tarczy ($y = b/2$) w chwili $t = 15 \mu s$ (oznaczenia stosowane na wykresie opisano w tekście)



Rys. 4.6. Wykresy przestrzenne naprężenia σ_{H-M-H} uzyskane w różnych rozwiązaniach ($t = 15 \mu s$)

swobodnego. Na rysunku 4.7 przedstawiono rozkłady naprężenia zastępczego według hipotezy H-M-H dla chwili $t = 30 \mu\text{s}$, czyli po odbiciu się fali naprężenia od brzegu swobodnego (rozwiązanie L1). Można zauważyć front fali odbitej przemieszczającej się w kierunku brzegu z wymuszeniem kinematycznym.



Rys. 4.7. Przestrzenny wykres naprężenia $\sigma_{\text{H-M-H}}$ dla chwili $t = 30 \mu\text{s}$ (rozwiązanie L1)

5. Wnioski

Prezentowane w pracy rozważania stanowią podbudowę bardziej zaawansowanych analiz zjawiska zniszczenia w materiałach sprężysto-plastycznych w obecności fal naprężenia generowanych obciążeniem dynamicznym. W numerycznej analizie tego typu zagadnień nabiera znaczenia możliwość elastycznego dostosowywania siatki węzłów aproksymacyjnych do powstających obszarów zlokalizowanych odkształceń plastycznych i pękania. Tego typu cechy mają tzw. metody bezsiatkowe, w tym stosowana w niniejszej pracy metoda ruchomych najmniejszych kwadratów.

W pracy rozwiązano zagadnienie początkowo-brzegowe propagacji płaskiej fali naprężenia w tarczy stalowej, wykorzystując różne siatki węzłów metody MLS. Stosowano także siatki węzłów generowanych losowo. Stwierdzono, że w przypadku takich siatek istotne znaczenie ma sposób doboru węzłów sąsiedztwa aproksymacyjnego. Przyjęto kryterium topologiczne wynikające z triangulacji zbioru węzłów minimalizującej łączną długość krawędzi triangulacji. Stwierdzono, że triangulacyjny sposób wyboru otoczenia aproksymacyjnego i wygładzanie siatki nieregularnej metodą Laplace'a znacznie poprawia dokładność rozwiązania. Efekt odbicia fali naprężenia od brzegu swobodnego modelowano przez wprowadzenie węzłów fikcyjnych (poza obszarem tarczy). Otrzymane metodą MLS rezultaty

porównano z wynikami obliczeń metodą różnicową, stwierdzając ich zgodność jakościową i ilościową.

Artykuł wpłynął do redakcji 28.05.2014 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano 7.07.2014 r.

LITERATURA

- [1] BELYTSCHKO T., KRONGAUZ Y., ORGAN D., FLEMMING M., KRYSL P., *Meshless Methods: An Overview and Recent Development*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 139, 1996, 3-44.
- [2] CHEN Y., LEE J., ESKANDARIAN A., *Meshless Methods in Solids Mechanics*, Springer Science+Business Media, Inc., New York, 2006.
- [3] CICHONŃ CZ., CECOT W., KROK J., PLUCIŃSKI P., *Metody komputerowe w liniowej mechanice konstrukcji. Wybrane zagadnienia*, Politechnika Krakowska, Kraków, 2009.
- [4] DORNOWSKI W., PERZYNA P., *Numerical analysis of macrocrack propagation along a bimaterial interface under dynamic loading processes*, Int. J. Solids Structures, 39, 2002, 4949-4977.
- [5] DORNOWSKI W., PERZYNA P., *Numerical investigation of localized fracture phenomena in inelastic solids*, Foundation of Civil and Environmental Engineering, Publishing House of Poznan University of Technology, 7, Poznań, 2006, 79-116.

Dodatek A

Program obliczający gradienty funkcji $u(x, y)$ metodą MLS

```

SUBROUTINE mls(n, xy, u, r, pw, gr)
!
! Procedura oblicza gradienty funkcji aproksymowanej u w punkcie
! o współrzędnych x = xy(1, n), y = xy(2, n) metodą ruchomych
! najmniejszych kwadratów.
!
! Dane:
!   n      = liczba punktów,
!   xy(2, n) = tablica współrzędnych punktów, ostatnią kolumnę tej tablicy
!               zajmują współrzędne punktu obliczanego,
!   u(n)   = wartości funkcji,
!   r      = promień wpływu funkcji wagowej,
!   pw     = rząd wielomianu (pw = 1 lub pw = 2).
!
! wyniki:
!   gr(2)  = gradienty funkcji aproksymowanej w punkcie
!               o współrzędnych xy(1, n), xy(2, n).
!
IMPLICIT NONE

```



```

INTEGER, INTENT (IN) :: n, pw
REAL(8), INTENT (IN) :: xy(2, n), u(n), r
REAL(8), INTENT(OUT) :: gr(2)
!
INTEGER :: m, i, l, k, j
REAL(8) :: a(6, 7), xi, yi, ri, wi, p(6), c, d
!
! liczba składników wielomianu
m = 3
IF(pw == 2) m = 6
IF(n < m) THEN
  WRITE(*, '(„za mała liczba punktów =”, i2)') n
  STOP
END IF
a = 0.0
DO i = 1, n
  !
  ! współrzędne lokalne i wagi
  xi = xy(1, i) - xy(1, n)
  yi = xy(2, i) - xy(2, n)
  ri = (DSQRT(xi * xi + yi * yi)) / r
  IF(ri >= 1.0) THEN
    wi = 0.0
  ELSE
    wi = 1.0 - 6.0 * ri * ri + 8.0 * ri ** 3.0 - 3.0 * ri ** 4.0
  END IF
  !
  ! składniki wielomianu
  p(1) = 1.0
  p(2) = xi
  p(3) = yi
  IF(m == 3) GO TO 10
  p(4) = xi * xi
  p(5) = xi * yi
  p(6) = yi * yi
10 CONTINUE
  !
  ! układ równań
  DO k = 1, m
    c = wi * p(k)
    a(k, m + 1) = c * u(i) + a(k, m + 1)
    DO l = 1, m
      a(k, l) = c * p(l) + a(k, l)
    END DO
  END DO

```

```
    END DO
  END DO
  !
  ! rozwiązanie układu równań
  DO i = 1, m
    c = a(i, i)
    a(i, i) = c - 1.0
    DO k = i + 1, m + 1
      d = a(i, k) / c
      DO j = 1, m
        a(j, k) = a(j, k) - d * a(j, i)
      END DO
    END DO
  END DO
  !
  ! gradienty
  gr(1) = a(2, m + 1)
  gr(2) = a(3, m + 1)
  END SUBROUTINE mls
```

W. DORNOWSKI

Analysis of a plane stress wave by the moving least squares method

Abstract. A meshless method based on the moving least squares approximation is applied to stress wave propagation analysis. Two kinds of node meshes, the randomly generated mesh and the regular mesh are used. The nearest neighbours' problem is developed from a triangulation that satisfies minimum edges length conditions. It is found that this method of neighbours' choice significantly improves the solution accuracy. The reflection of stress waves from the free edge is modelled using fictitious nodes (outside the plate). The comparison with the finite difference results also demonstrated the accuracy of the proposed approach.

Keywords: civil engineering, meshless method, moving least squares method, elastic waves