

Tomasz Janusz TELESZEWSKI,
Anna WERNER-JUSZCZUK

Politechnika Białostocka, WBiIŚ, ul. Wiejska 45E, 15-351 Białystok
E-mail: t.teleszewski@pb.edu.pl, a.juszczuk@pb.edu.pl

Algorytm MEB wyznaczania pola temperatury w przepływie Poiseuille'a w przewodach prostoosiowych o stałej temperaturze ścianki

1 Wstęp

W wielu zagadnieniach cieplno-przepływowych wykorzystywane są nieizotermiczne przepływy Poiseuille'a w przewodach prostoliniowych [1,2]. Przepływ newtonowskiego płynu rzeczywistego jest opisany układem równań różniczkowych wynikających z zasady zachowania masy (1), momentu pędu (2) i energii (3) [3,4]:

$$\operatorname{div} \bar{c} = 0; \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\bar{c}}{Dt} = -\nabla \bar{\phi} + \mu \nabla^2 \bar{c} \quad ; \quad \bar{\phi} = \nabla p - \rho \bar{g} \quad ; \quad (2)$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \lambda \nabla^2 T + \mu \tau_{ij} \frac{\partial c_i}{\partial x_j} \quad , \quad (3)$$

gdzie: \bar{c} oznacza prędkość przepływu, p – ciśnienie, g – przyspieszenie ziemskie, ρ – gęstość cieczy, μ – współczynnik lepkości dynamicznej, c_p – ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu, natomiast τ_{ij} – lepki tensor naprężeń.

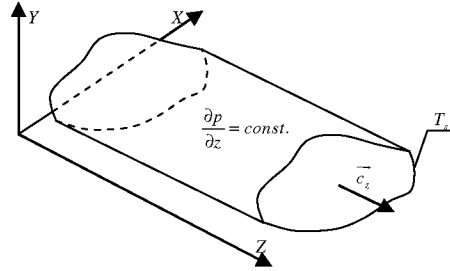
W przypadku jednokierunkowego ($c_x=0$, $c_y=0$), stacjonarnego przepływu dla bardzo małych liczb Reynoldsa (przepływ Poiseuille'a) w przewodach prostoosiowych, równania (1-3) ulegają uproszczeniu (rys.1):

$$\frac{\partial c_z}{\partial z} = 0; \quad (4)$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 c_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad ; \quad (5)$$

$$\nabla^2 T = \mathfrak{S} \quad ; \quad \mathfrak{S} = -\frac{\mu}{\lambda} \left[\left(\frac{\partial c_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial c_z}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (6)$$

gdzie: λ jest współczynnikiem przewodzenia ciepła.



Rys. 1. Szkic obrazujący zagadnienia brzegowe w przepływach przestrzennych

Fig. 1. Sketch to consideration of boundary conditions for three-dimensional problem

Równania (5-6) zostały rozwiązane metodą elementów brzegowych (MEB). W celu wykonania symulacji został napisany program obliczeniowy VISCOUS DISSIPATION 1D w języku Fortran. Obliczenia wykonywano dwuetapowo. W pierwszej kolejności wyznaczone zostało pole prędkości z równania (5), które jest warunkiem dla równania (6). W kolejnym etapie w celu wyznaczenia pola temperatury rozwiązane zostało równanie (6).

2 Brzegowe równania całkowe opisujące rozwiązanie pola temperatury w przepływie Poiseuille'a w przewodach prostoosiowych o stałej temperaturze ścianki

Równanie (5) można zredukować do równania Laplace'a. Zabiegu tego można dokonać poprzez rozdzielanie składowej prędkości przepływu jednokierunkowego c_z na: składową prędkości przepływu niezakłóconego c_∞ oraz składową prędkości przepływu wzbudzonego ściankami prostoliniowego kanału c_w [5,6]:

$$\frac{\partial^2 c_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_w}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad c_w(q) = -c_\infty \quad ; \quad q \in L \quad , \quad (7)$$

gdzie:

$$c_\infty = \frac{1}{4} \wp (x_q^2 + y_q^2) \quad ; \quad \wp = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} < 0 \quad . \quad (7a)$$

Ostatecznie prędkość w przekroju kanału wyznaczona została z zależności:

$$c_z = c_\infty + c_w \quad . \quad (8)$$

Przy założeniu, że podział brzegu (L) zgodny jest z kierunkiem wskazówek zegara w obszarze płaskim (Λ) przekroju przewodu prostoosiowego ograniczonego brzegiem (L), rozwiązaniem równania różniczkowego (5) jest następujące równanie całkowe (rys.2) [5,6]:

$$\frac{1}{2} c_w(\mathbf{p}) + \int_{(L)} g_w(\mathbf{q}) K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q = \int_{(L)} c_w(\mathbf{q}) E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q \quad , \quad (9)$$

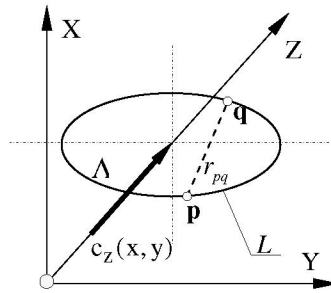
gdzie:

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r_{pq}} \right) ; \quad r_{pq} = |\mathbf{p} - \mathbf{q}| ; \quad (\mathbf{p}) \in L, (\mathbf{q}) \in L \quad (9a)$$

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \frac{(x_p - x_q)n_x + (y_p - y_q)n_y}{r_{pq}^2} ; \quad (\mathbf{p}) \in L, (\mathbf{q}) \in L \quad (9b)$$

$$[n_x, n_y] = \left[\frac{\delta y_q}{\delta L_q}, -\frac{\delta x_q}{\delta L_q} \right]$$

gdzie: n_x oraz n_y są to wersory normalnej do brzegu (L).



Rys. 2. Szkic do analizy zagadnienia brzegowego w przekroju przewodu prostoliniowego

Fig. 2. Sketch to consideration of boundary conditions in cross-section of duct

Po wyznaczeniu gęstości $g_w(\mathbf{q})$ na linii brzegowej (L) prędkość c_z w dowolnym punkcie obszaru (Λ) wyznacza się z zależności:

$$c_z(\mathbf{p}) = - \int_{(L)} g_w(\mathbf{q}) K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q + \int_{(L)} c_w(\mathbf{q}) E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q + c_\infty(\mathbf{p}) \quad (10)$$

$(\mathbf{p}) \in \Lambda, (\mathbf{q}) \in L$

Warunek w obszarze (Λ) równania (6) wyznacza się z zależności:

$$\mathfrak{S} = -\frac{\mu}{\lambda} \left[\left(\frac{\partial c_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial c_z}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (11)$$

gdzie:

$$\frac{\partial c_z(\mathbf{p})}{\partial x_p} = - \int_{(L)} g_w(\mathbf{q}) \frac{\partial K(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial x_p} dL_q + \int_{(L)} c_w(\mathbf{q}) \frac{\partial E(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial x_p} dL_q + \frac{\partial c_\infty(\mathbf{p})}{\partial x_p} \quad (12)$$

$(\mathbf{p}) \in \Lambda, (\mathbf{q}) \in L$

oraz:

$$\frac{\partial c_z(\mathbf{p})}{\partial y_p} = - \int_{(L)} g_w(\mathbf{q}) \frac{\partial K(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial y_p} dL_q + \int_{(L)} c_w(\mathbf{q}) \frac{\partial E(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial y_p} dL_q + \frac{\partial c_\infty(\mathbf{p})}{\partial y_p} \quad (13)$$

$(\mathbf{p}) \in \Lambda, (\mathbf{q}) \in L$

gdzie:

$$\frac{\partial K(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial x_p} = - \frac{1}{2\pi} \frac{(x_p - x_q)}{r_{pq}}, \quad (12a)$$

$$\frac{\partial K(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial y_p} = - \frac{1}{2\pi} \frac{(y_p - y_q)}{r_{pq}}, \quad (13a)$$

$$\frac{\partial E(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial x_p} = \frac{1}{2\pi} \frac{\left((y_p - y_q)^2 - (x_p - x_q)^2 \right) n_x - 2(x_p - x_q)(y_p - y_q) n_y}{r_{pq}^4}, \quad (12b)$$

$$\frac{\partial E(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial y_p} = \frac{1}{2\pi} \frac{\left((x_p - x_q)^2 - (y_p - y_q)^2 \right) n_y - 2(x_p - x_q)(y_p - y_q) n_x}{r_{pq}^4}. \quad (13b)$$

Po uwzględnieniu warunku \mathfrak{S} w obszarze (Λ) oraz temperatury T na brzegu (L) rozwiązaniem równania różniczkowego (6) jest następujące równanie całkowe:

$$\frac{1}{2} T(\mathbf{p}) + \int_{(L)} q(\mathbf{q}) K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q = \int_{(L)} T(\mathbf{q}) E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q + \iint_{(\Lambda)} \mathfrak{S}(\mathbf{v}) K(\mathbf{p}, \mathbf{v}) d\Lambda \quad (14)$$

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r_{pv}} \right); \quad r_{pv} = |\mathbf{p} - \mathbf{v}|; \quad (\mathbf{p}) \in (L), (\mathbf{v}) \in (\Lambda)$$

Po obliczeniu funkcji $q(\mathbf{q})$ na brzegu (L) pole temperatury wyznacza się z zależności:

$$T(\mathbf{p}) = - \int_{(L)} q(\mathbf{q}) K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q + \int_{(L)} T(\mathbf{q}) E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q - \iint_{(\Lambda)} \mathfrak{S}(\mathbf{v}) K(\mathbf{p}, \mathbf{v}) d\Lambda \quad (15)$$

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r_{pv}} \right); \quad r_{pv} = |\mathbf{p} - \mathbf{v}|; \quad (\mathbf{p}) \in (L), (\mathbf{v}) \in (\Lambda)$$

$$(\mathbf{p}) \in \Lambda, (\mathbf{q}) \in L$$

3 Weryfikacja numerycznego modelu

Weryfikując przedstawiony algorytm, posłużono się znanym rozwiązaniem teoretycznym rozkładu temperatury w cieczy przepływu Poiseuille'a w rurze o przekroju kołowym, w której ścianki utrzymywane są w stałej temperaturze T_s [3]:

*Algorytm MEB wyznaczania pola temperatury w przepływie Poiseuille'a
w przewodach prostoosiowych o stałej temperaturze ścianki*

$$T_{TEO}(r) = T_s + \frac{\mu c_{sr}^2}{\lambda} \left(1 - \frac{r^4}{R^2} \right), \quad (16)$$

gdzie: c_{sr} jest to prędkość średnia w przewodzie, natomiast R oznacza promień przewodu.

Maksymalna różnica temperatur ΔT_{max} między ścianką przewodu a temperaturą w osi przewodu zależy przede wszystkim od lepkości cieczy. W tabeli 1 przedstawiono rozwiązanie równania (16) dla wybranych cieczy [7] w przewodzie kołowym przy założeniu, że $Re=20$. W przypadku cieczy o dużej lepkości (takich jak gliceryna) różnica temperatur ΔT_{max} jest znaczna, natomiast dla toluenu, którego lepkość jest około 2555-krotnie mniejsza niż gliceryny, ΔT_{max} jest pomijalne. Zastosowanie praktyczne przedstawionego zagadnienia sprowadza się do cieczy lepkich o dużej lepkości.

Tab. 1. Różnica temperatur ΔT_{max} w cieczy przepływu Poiseuille'a w rurze o przekroju kołowym, w której ścianki utrzymywane są w stałej temperaturze T_s dla wybranych substancji

Tab. 1. The solution ΔT_{max} in a fluid moving in Poiseuille flow in a pipe with circular cross-section whose are maintained at constant temperature T_s

Lepk.dyn. μ	Gęstość ρ	Wsp. przew. ciepła λ	Prędkość średnia c_{sr}	Temp. dla R=0 $T_{max}(R=0)$	$T_{max}-T_s$ ΔT_{max}
Pa*s	kg/m ³	W/mK	m/s	K	K
Gliceryna (Re=20, $T_s=293$ [K], R=0,01 [m])					
1,50E+00	1261,1	0,2797	1,189E+00	3,0057228857E+02	7,572E+00
Olej rycynowy (Re=20, $T_s=293$ [K], R=0,01 [m])					
9,86E-01	969	0,18	1,018E+00	2,9867166650E+02	5,672E+00
Olej z oliwek (Re=20, $T_s=293$ [K], R=0,01 [m])					
8,50E-02	916,5	0,189	9,274E-02	2,9300386839E+02	3,868E-03
Glikol etylenowy (Re=20, $T_s=293$ [K], R=0,01 [m])					
2,13E-02	1115,6	0,2705	1,912E-02	2,9300002882E+02	2,882E-05
Toluen (Re=20, $T_s=293$ [K], R=0,01 [m])					
5,87E-04	873	0,141	6,719E-04	2,9300000000E+02	1,878E-09

W celu wykonania weryfikacji do obliczeń przyjęto: $Re=20$, $\mu=1.499$ [Pa*s], $R=0.01$ [m], $c_{sr}=2.97$ [m/s]. Do dokładnego odczytu warunku (11) zbudowano siatkę składającą się z 80400 trójkątnych elementów. Błąd rozwiązania metody elementów brzegowych dla temperatury wyznaczono z zależności:

$$\delta T_{MEB} = \left| \frac{T_{TEO} - T_{MEB}}{T_{TEO}} \right| * 100\% , \quad (17)$$

gdzie: T_{MEB} jest to temperatura wyznaczona metodą elementów brzegowych, natomiast T_{TEO} jest rozwiązaniem teoretycznym (16) [3].

W tabeli 2 zestawiono błąd metody MEB dla brzegu składającego się z 100 i 200 liniowych elementów. Wszystkie jądra całkowe zostały wyznaczone metodą trapezów, gdzie na pojedynczym elemencie założono 16 trapezów. Zagęszczenie podziału linii brzegowej powoduje zmniejszenie błędu metody MEB.

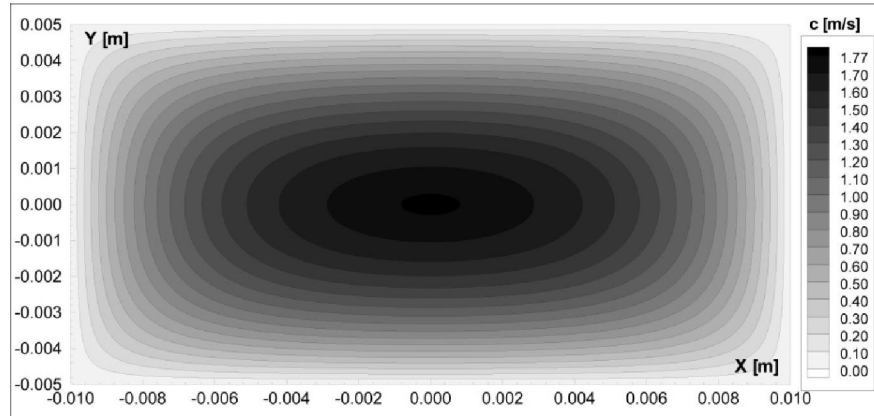
Tab. 2. Temperatura w przepływie Poiseuille'a w przewodzie okrągłym - błąd rozwiązania MEB

Tab. 2. The temperature distribution in a fluid moving in Poiseuille flow in a pipe with circular cross - error analysis applied in BEM

Współrzędne węzłów		Roz. teoretyczne	Roz. num. MEB 100	Błąd met. MEB 100	Roz. num. MEB 200	Błąd met. MEB 200
X_P	Y_P	T_{TEO} [°C]	T_{BEM} [°C]	δT_{BEM} [%]	T_{BEM} [°C]	δT_{BEM} [%]
-	-					
0,00E+00	0,00E+00	2,757E+01	2,801E+01	1,601E+00	2,773E+01	5,539E-01
0,00E+00	1,00E-03	2,757E+01	2,801E+01	1,601E+00	2,772E+01	5,539E-01
0,00E+00	2,00E-03	2,756E+01	2,800E+01	1,602E+00	2,771E+01	5,542E-01
0,00E+00	3,00E-03	2,751E+01	2,795E+01	1,605E+00	2,766E+01	5,554E-01
0,00E+00	4,00E-03	2,738E+01	2,782E+01	1,614E+00	2,753E+01	5,584E-01
0,00E+00	5,00E-03	2,710E+01	2,754E+01	1,631E+00	2,725E+01	5,647E-01
0,00E+00	6,00E-03	2,659E+01	2,703E+01	1,664E+00	2,674E+01	5,764E-01
0,00E+00	7,00E-03	2,575E+01	2,620E+01	1,720E+00	2,591E+01	5,964E-01
0,00E+00	8,00E-03	2,447E+01	2,491E+01	1,815E+00	2,462E+01	6,290E-01
0,00E+00	9,00E-03	2,260E+01	2,304E+01	1,936E+00	2,276E+01	6,801E-01

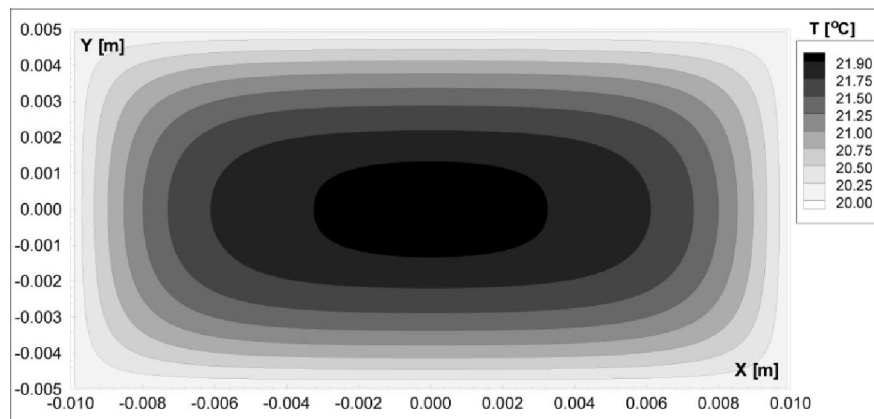
4 Przykłady obliczeniowe

Poniżej przedstawiono przykłady obliczeniowe metody elementów brzegowych programu VISCOUS DISSIPATION 1D w kanale prostokątnym. Obliczenia wykonano dla gliceryny ($Re=10$, $\mu=1.499$ [Pa*s]) przepływającej przez kanał prostokątny o wymiarach 0.01×0.02 [m], którego ścianki utrzymywane są w temperaturze 20°C . Graficzne rezultaty obliczeń zostały przedstawione na rysunku 3 (izotachy) oraz na rysunku 4 (izotermy).



Rys. 3. Pole prędkości w przewodzie prostoosiowym o przekroju prostokąta wyznaczone metodą MEB (gliceryna, $Re=10$, $\mu=1.499$ [Pa*s])

Fig.3. Velocity in rectangle channel (glycerin, $Re=10$, $\mu=1.499$ [Pa*s]) - BEM solution



Rys. 4. Pole temperatury w przewodzie prostoosiowym o przekroju prostokąta wyznaczone metodą MEB (gliceryna, $Re=10$, $\mu=1.499$ [Pa*s])

Fig.4. The temperature distribution in rectangle channel (glycerin, $Re=10$, $\mu=1.499$ [Pa*s]) - BEM solution

5 Podsumowanie

Przedstawiony algorytm metody elementów brzegowych pozwala w sposób wydajny rozwiązywać zagadnienia cieplne przepływów Poiseuille'a w przewodach prostoosiowych przy stałej zadanej temperaturze ścianek. Dyssypacja energii powodowana lepkością ogranicza zakres stosowania algorytmu do przepływów płynów o dużej lepkości. Mały błąd metody MEB w porównaniu do znanego rozwiązania

analizy świadczy o dużej dokładności algorytmu. Należy również zaznaczyć, że alternatywne metody siatkowe wymagają wykonywania pracochłonnych przestrzennych siatek [8]. Obecnie metoda elementów brzegowych należy do intensywnie rozwijających się, a także jest bardzo konkurencyjna w stosunku do najczęściej stosowanych metod obszarowych. Zaprezentowany algorytm MEB wyznaczania pola temperatury w przepływie Poiseuille'a w przewodach prostoosiowych o stałej temperaturze ścianki może być szczególnie przydatny do symulacji pól temperatur w mikrokanałach [9,10,11,12], tam gdzie przepływy zgodne są z makroprzepływami, i pozwala zastąpić kosztowne eksperymenty.

Literatura

1. Clark M. M.: *Transport Modeling for Environmental Engineers and Scientists* Second Edition. John Wiley&Sons, 2000
2. Kakac S., Liu H.; 2002.: *Heat exchangers selection, rating, and thermal design*, Second Edition, CRC Press 2002
3. Landau L.D., Lifshitz E.M.: *Fluid Mechanics*, Pergamon Press 1987
4. Batchelor G.K.: *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press 2000
5. Teleszewski T.J., Sorko S.A.: Zastosowanie metody elementów brzegowych do wyznaczania jednokierunkowego przepływu w przewodach prostoosiowych o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego, *Acta Mechanica et Automatica*, pp. 124-132, Vol.5, nr 3, 2011
6. Brebbia C.A., Telles J.F.C., Wrobel L.C.: *Boundary element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag. NY 1984
7. Aylward G., Tristan Findlay T.: *SI Chemical Data Book* (4th ed.) John Wiley and Sons Ltd, 1999
8. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Nithiarasu P.: *Finite Element Method for Fluid Dynamics* 6th ed., Butterworth Heinemann 2005.
9. El-Genk M. S., In-Hwan Yang: Friction Numbers and Viscous Dissipation Heating for Laminar Flows of Water in Microtubes, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 130, Issue 8, 2008
10. Wibel W., Ehrhard P.: Experiments on the laminar/turbulent transition of liquid flows in rectangular microchannels, *Heat Transfer Engineering*, Vol. 30, Issue 1-2, pp. 70-77, 2009
11. Morini G. L., Spiga M.: The Role of the Viscous Dissipation in Heated Microchannels, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 129, Issue 3, 2007
12. Hetsroni G., Mosyak A., Pogrebnyak E., Yarin L. P.: Micro-Channels: Reality and Myth, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 133, Issue 12, 2011

Streszczenie

W publikacji przedstawiono algorytm metody elementów brzegowych wyznaczania pola temperatury przepływu Poiseuille'a w przewodach prostoosiowych o dowolnym przekroju poprzecznym, w którym ścianka utrzymywana jest w stałej temperaturze. Weryfikacja metody elementów brzegowych została wykonana poprzez porównanie rezultatów obliczeń MEB ze znanym rozwiązaniem analitycznym. Wyprowadzony algorytm może być stosowany w przepływach cieczy lepkich o znacznych lepkościach

np. olejów. W prezentowanej publikacji przedstawiono graficzne rezultaty obliczeń dla wybranych przykładów, dla których nie są znane rozwiązania analityczne.

Słowa kluczowe: metoda elementów brzegowych, przepływ Poiseuille'a, dyssypacja lepkości, przewody prostoosiowe

Application Boundary Element Method to calculate the temperature distribution in a fluid moving in Poiseuille flow in a pipe with arbitrary cross-section at constant temperature in wall

Summary

The paper presents the numerical application Boundary Element Method to calculate the temperature distribution in a fluid moving in Poiseuille flow in a pipe with arbitrary cross-section at constant temperature in wall. The efficiency and the credibility of proposed algorithm were verified by numerical tests. This algorithm can be used to calculate temperature distribution in system pipe with liquid where the viscosity is large. Numerical examples are presented. The computer program Viscous Dissipation 1D was written in Fortran programming languages.

Keywords: boundary element method, Poiseuille flow, viscous dissipation, longitudinal duct

Opracowanie zrealizowano w ramach pracy własnej nr W/WBiŚ/8/2011.