

dr hab. inż. **Mariusz Maślak**, prof. PK<sup>1</sup>  
mgr inż. **Anna Tkaczyk**<sup>2</sup>

Przyjęty/Accepted/Принята: 17.01.2016;  
Zrecenzowany/Reviewed/Рецензирована: 30.11.2016;  
Opublikowany/Published/Опубликована: 30.12.2016;

## Programowanie liniowe jako technika obliczeniowa użyteczna w szacowaniu odporności ogniowej stalowej ramowej konstrukcji nośnej<sup>3</sup>

### Linear Programming as a Computational Procedure Useful in the Fire Resistance Evaluation of a Steel Loadbearing Frame Structure

### Использование линейного программирования как метода расчёта огнестойкости стальной рамной несущей конструкции

#### ABSTRAKT

**Cel:** Przedstawiono i przedyskutowano oryginalną procedurę szacowania odporności ogniowej stalowego ramowego ustroju nośnego opartą na zastosowaniu metodyki programowania liniowego. Tego typu podejście wymaga dokonania linearyzacji zarówno klasycznych warunków równowagi, jak i warunku opisującego uplastycznienie krytycznego przekroju poprzecznego w elemencie stalowym miarodajnym do oceny nośności badanej ramy. Przekroje wybrane do analizy odpowiadają lokalizacji aktywujących się w pożarze przegubów plastycznych.

**Metody:** Miarą poszukiwanej odporności jest określona dla całej ramy temperatura krytyczna odpowiadająca osiągnięciu przez badany ustrój stanu granicznego nośności ogniowej. Stan ten identyfikowany jest z realizacją tego spośród potencjalnie możliwych mechanizmów czysto plastycznego zniszczenia ramy, który odpowiada najniższej możliwej wartości temperatury aktywacji. Taka specyfikacja wymaga akceptacji założenia, że przez cały czas trwania pożaru prognozowanego dla analizowanego ustroju nośnego wszystkie elementy tego ustroju będą efektywnie stężone. Dzięki temu nie występuje ryzyko jego wcześniejszego zniszczenia przez globalną lub lokalną formę utraty stateczności.

**Wyniki:** Pokazano sposób ogólnego formułowania problemu oraz specyfikacji funkcji celu, a także zasady budowy nierówności definiujących miarodajne ograniczenia. Uwzględniono przy tym interakcję momentu zginającego i siły podłużnej. Algorytm postępowania zilustrowano na załączonym przykładzie numerycznym. Uzyskane z rekomendowanych w pracy obliczeń oszacowanie temperatury krytycznej badanej ramy odniesiono do odpowiadającego mu wyniku alternatywnej analizy, przeprowadzonej w celach porównawczych, opartej na zastosowaniu klasycznego kinematycznego podejścia do teorii nośności granicznej.

**Wnioski:** Zaproponowane podejście obliczeniowe w opinii autorów artykułu jest bardziej uniwersalne w stosunku do możliwych procedur alternatywnych, rekomendowanych we wcześniejszych pracach. Pozwala bowiem na jednoznaczne i czytelne w interpretacji oszacowanie odporności ogniowej także w przypadku ram o złożonej geometrii i rozbudowanym schemacie obciążenia. W świetle założeń modelu formalnego, przytoczonych i szczegółowo dyskutowanych w tekście, uzasadnione może być również twierdzenie o znacząco większej wiarygodności uzyskanych w ten sposób oszacowań temperatury krytycznej analizowanej ramy w porównaniu do oszacowań otrzymanych w sposób konwencjonalny.

**Słowa kluczowe:** stalowa ramowa konstrukcja nośna, pożar, odporność ogniowa, temperatura krytyczna, programowanie liniowe

**Typ artykułu:** oryginalny artykuł naukowy

#### ABSTRACT

**Aim:** A new original procedure which can be applied to evaluate the fire resistance of a steel frame, based on the linear programming approach, is presented and discussed in this article. Such a computational technique requires the linearisation of both the classical equilibrium conditions and a condition describing the yield of a critical cross-section relating to the structural member conclusive in assessing the frame resistance. The sections selected for the analysis correspond to the location of the plastic hinges forming as a consequence of fire exposure.

**Methods:** The critical temperature, determined for the whole structure, and associated with the structure reaching its fire resistance limit state, is considered to represent the measure of such a fire resistance. This critical temperature corresponds to the realisation of such a potentially possible purely plastic failure mechanism that is bound to the lowest possible formation temperature. Such a specification requires the assumption that

<sup>1</sup> Politechnika Krakowska / Cracow University of Technology; mmaslak@pk.edu.pl;

<sup>2</sup> Biuro Budowlane Bauko S.C., Kielce;

<sup>3</sup> Artykuł został wyróżniony przez Komitet Redakcyjny / The article was recognised by the Editorial Committee; Procentowy wkład merytoryczny w opracowanie artykułu / Percentage contribution; M. Maślak – 60%, A. Tkaczyk – 40%;

throughout the duration of the fire foreseen for the considered bearing structure, all the components of this system will be effectively braced, so that there is no risk of their earlier failure by local or global loss of stability.

**Results:** The general problem formulation approach, the formulation of the objective function, and the rules governing the development of inequalities defining the representative constraints, are presented in detail. The interaction between the longitudinal force and the bending moment is taken into account as well. The obtained results are illustrated by the numerical example. The estimate resulting from the calculation recommended in this article is related to the corresponding one based on the use of the kinematical approach to the theory of plasticity.

**Conclusions:** The proposed computational approach seems to be more universal in relation to the possible alternative procedures recommended by the authors of this study in their earlier works. It facilitates an unambiguous and clearly interpretable estimate of the steel frame fire resistance also sought in the case of the frame with complex geometry and a complicated load arrangement. In the light of the assumptions of a formal model discussed in detail in this article, the conclusion can also be made that the reliability of the estimates so obtained is significantly greater in comparison to the corresponding results calculated conventionally.

**Key words:** steel frame load bearing structure, fire, fire resistance, critical temperature, linear programming

**Type of article:** original scientific article

## АННОТАЦИЯ

**Цель:** Представить и обсудить оригинальную процедуру оценки огнестойкости стальной рамной несущей конструкции на основе методологии линейного программирования. Такой подход требует проведения линеаризации как классических условий равновесия, так и условия, описывающего размягчение критического сечения стального элемента, достоверного в оценке несущей способности исследуемой рамы. Сечения, выбранные для анализа, соответствуют размещению активизирующихся при пожаре пластических шарниров.

**Методы:** Мерой огнестойкости является определенная для целой рамы критическая температура, связанная с достижением тестовой конструкцией предельного состояния несущей способности. Это условие определяется реализацией потенциала возможных механизмов при его пластическом разрушении, что соответствует самой низкой возможной величине температуры активации. При данной спецификации необходимо принять утверждение, что за все время пожара, прогнозируемого как достоверный для анализируемой конструкции, все элементы конструкции будут иметь эффективную концентрацию. Благодаря этому нет никакого риска, что она разрушится раньше из-за общей или локальной (формы) потери устойчивости.

**Результаты:** Указан способ общей формулировки проблемы и спецификации целевой функции, а также принципы создания неравенств, определяющих достоверные ограничения. Учтено при этом взаимодействие изгибающего момента и продольной силы. Результаты проиллюстрированы на численном примере, приложенном к формальной презентации модели. Результаты, полученные из предложенных в этой работе расчетов оценки критической температуры испытываемой рамы относятся к соответствующему результату альтернативного анализа, проведенного для сравнительных целей, основанного на использовании классического кинематического подхода к теории предельной нагрузки.

**Выводы:** Предложенный вычислительный подход по мнению авторов представляется более универсальным в отношении к возможным альтернативным процедурам, рекомендованных авторами в предыдущих работах. Он позволяет дать четкую оценку и интерпретацию огнестойкости, также в случае рам со сложной геометрией и большой нагрузкой. В свете предположений формальной модели, перечисленных и подробно обсуждаемых в тексте, оправданным может быть также утверждение о значительно большей достоверности полученных таким образом значений оценки критической температуры анализируемой рамы по сравнению с оценками, полученными обычным способом.

**Ключевые слова:** стальная рама, несущая конструкция, пожар, огнестойкость, критическая температура, линейное программирование

**Вид статьи:** оригинальная научная статья

## 1. Wprowadzenie

Inżynierską ocenę odporności ogniowej złożonego stalowego ramowego ustroju nośnego można uznać za wiarygodną jedynie wtedy, gdy w modelu formalnym towarzyszącym analizie statycznej odpowiadającej wyjątkowej sytuacji projektowej pożaru rozwiniętego zostanie rozważona konstrukcja potraktowana całościowo. Tego typu badanie można ewentualnie zastąpić, choć nie zawsze jest to możliwe, przez szczegółową analizę zachowania się w pożarze funkcjonalnie jednorodnych podukładów ocenianej ramy, o jednoznacznie określonym schemacie i sposobie oddziaływania na pozostałe części konstrukcji. Jak dotąd w praktyce projektowej powszechnie stosowane jest myślowe wydzielanie z ustroju pojedynczych elementów nośnych (rygli, słupów) i przypisywanie do nich lepiej lub gorzej zamodelowanych warunków brzegowych opisujących zmieniającą się wraz z rozwojem pożaru podatność więzów krępujących te elementy. Pozwala to na otrzymanie stosunkowo prostych algorytmów weryfikujących możliwość bezpiecznego przenoszenia przyłożonych do konstrukcji obciążeń zewnętrznych wraz z siłami wewnętrznymi generowanymi wskutek ograniczenia możliwości swobodnej realizacji odkształceń będących skutkiem rozszerzalności termicznej stali. Niemniej jednak uzyskane w ten sposób wyniki z uwagi na prostotę podejścia obliczeniowego nie zawsze odpowiadają rzeczywistemu zachowaniu się badanego ustroju w warunkach ekspozycji ogniowej.

## 1. Introduction

An engineering evaluation of the fire resistance of a complex steel frame load bearing structure can be considered reliable only when the formal model associated with the statical analysis corresponding to the accidental design situation of a fully developed fire considers the structure as a whole. If needed, although not always possible, this type of test may be substituted with a detailed fire behaviour analysis relating to the functionally homogeneous substructures of the tested frame with an unambiguously defined pattern and the manner of exerting impact on other parts of the structure. So far, it has been common for design practice to mentally select individual load bearing members (beams, columns) from the structure and assign them to more-or-less well-modelled boundary conditions describing the susceptibility of the bonds that tie together these members as it changes with the spread of the fire. This can provide relatively simple algorithms that verify whether the external loads applied to the structure can be transferred together with the internal loads generated by the constraints in the free realisation of the strains resulting from the thermal expansion of steel. However, due to the simplicity of this computational approach, the results so obtained do not always correspond to the actual behaviour of the tested structure when exposed to fire. Indeed, it is difficult for such a simple physical model to reflect alone the redistribution of the internal forces in the members exposed directly to fire which

Trudno bowiem w tak prostym modelu fizycznym odwzorować chociażby zachodzącą w elementach konstrukcji poddanych bezpośredniemu oddziaływaniu ognia redystrybucję sił wewnętrznych determinującą ich wynikowy stan naprężenia czy odkształcenia. Ponadto sposób ten nie pozwala zidentyfikować, a zatem i oszacować istotność pewnych specyficznych dla ogrzewanej ramy efektów, które uwidaczniają się dopiero dzięki jej analizie globalnej. Przykładem może być generowanie się w ryglach rozpatrywanej ramy na skutek ich dużego ugięcia siły rozciągającej o znacznej wartości, bardzo groźnej ze względu na stateczność słupów szkieletu stalowego. Wartość takiej siły zależy bowiem głównie od podatności słupów ograniczających te rygle, a ta z kolei między innymi od geometrii całej ramy, sposobu jej obciążenia i jej schematu statycznego. Z tego względu dąży się do tego, aby miarą odporności ogniowej specyfikowanej dla badanej ramy była wielkość jednoznacznie do niej przypisana i stanowiąca niejako jej charakterystykę, niezależną od dodatkowych czynników czy okoliczności. Należy zaznaczyć, że jeśli za taką miarę przyjmie się czas, przez który w warunkach potencjalnie zagrożającego jej pożaru konstrukcja zapewni bezpieczne przenoszenie przyłożonych do niej obciążeń zewnętrznych wraz z termicznie indukowanym i zmiennym w czasie polem sił wewnętrznych, to miara ta będzie zależała od charakterystyki pożaru przyjętego do analizy. Zmiana intensywności nagrzewania lub chociażby maksymalnej temperatury gazów spalinowych osiągniętej w strefie pożarowej, do której należy analizowana rama, oznaczać będzie równoczesną zmianę oszacowanej odporności. W opinii autorów bardziej uniwersalną miarą jest w tym przypadku temperatura krytyczna szacowana dla całego ustroju ramowego. Pod tym pojęciem rozumie się temperaturę odniesioną do osiągnięcia przez badaną ramę stanu granicznego nośności ogniowej, określoną w ustalonym, miarodajnym dla tej ramy elemencie i jednoznacznie powiązaną z wartościami temperatury osiągniętymi w tym samym czasie w pozostałych jej elementach [1]. Wyznaczenie wartości tej temperatury nie zawsze jest możliwe, zwłaszcza w przypadku konstrukcji żelbetowych. Trzeba jednak podkreślić, że konstrukcje stalowe należą do obiektów, dla których tego typu podejście obliczeniowe jest, zdaniem autorów, szczególnie przydatne. Ma to związek z dobrą przewodnością cieplną stali, dzięki której można uzasadnić założenie o wyrównanym rozkładzie temperatury zarówno w przekrojach poprzecznych stalowych elementów konstrukcyjnych, jak i na całej długości tych elementów. Istnieją różne sposoby wyznaczania temperatury krytycznej ramy stalowej. Powinny one uwzględniać możliwe sposoby jej zniszczenia. W takim ujęciu byłaby to zatem na przykład mniejsza z dwóch wartości temperatury, z których pierwszą zidentyfikowano dla zniszczenia przez globalną utratę stateczności ramy, drugą natomiast dla wyczerpania nośności plastycznej jej najsłabszego elementu. Ważne, że ustalona w ten sposób wartość poszukiwanej temperatury nie będzie zależała od przebiegu rozwoju pożaru. Od tego przebiegu zależy bowiem jedynie czas, po którym zostanie ona osiągnięta w reprezentatywnym dla całej ramy elemencie konstrukcyjnym. Celem niniejszych rozważań jest prezentacja sposobu określania drugiej z przytoczonych powyżej wartości temperatury, to znaczy tej kojarzonej ze zniszczeniem typu plastycznego. Do jej wyznaczenia autorzy rekomendują wykorzystanie uogólnionego na sytuację pożaru formalizmu klasycznej teorii nośności granicznej. W prostych przypadkach tego typu podejście sprowadza się do rozważania możliwych i kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów plastycznego zniszczenia ramy [2-3] lub ewentualnie do przeprowadzenia metodą częściowo graficzną redystrybucji momentów zginających w elementach ustroju nośnego, takiej aby wyrównać te momenty w przekrojach, w których mają powstać przeguby plastyczne [4-5].

determine their resultant stress or strain states. Furthermore, it is impossible with this method to identify, and, by extension, to estimate, the significance levels of certain effects specific to the heated frame, which require a global analysis of the frame to become evident. Take, for instance, the substantial tensile force in the beams of the frame under consideration created by their substantial deflection, which is very dangerous to the stability of steel-frame columns. The value of such a force depends mainly on the susceptibility of the columns that restrict these beams, with this susceptibility depending mainly on the geometry of the whole frame, its statical scheme, and on how it is loaded. For this reason, the aim is to measure the fire resistance specified for the tested frame based on a quantity assigned unambiguously to such a frame, and that, to some degree, determines the characteristics of the frame unaffected by any additional factors or circumstances. It should be noted that if this is to be measured as the time for which a structure potentially exposed to fire is capable of ensuring the safe transfer of loads applied to it, together with the thermally induced and temporally variable internal-force field, the measure, then, will depend on the characteristics of the fire under analysis. A change in the heating intensity, or in the maximum temperature of exhaust gases reached in the fire zone of which the analysed frame is part, will also mean a change in the estimated resistance. The authors of this article claim that the critical temperature estimated for the frame structure as a whole is a more universal measure in this case. Such a temperature is defined as the temperature relative to the fire resistance limit state reached by the tested frame, defined for a specific member that is representative of this frame, and unambiguously linked with the temperature values reached over the same time in its other members [1]. It is not always possible to determine such a temperature, especially for reinforced-concrete frames. Notably, however, the authors of this article believe that such a computational approach is particularly useful for steel structures. This is due to the high thermal conduction of steel, which can explain the assumption involving the equal distribution of temperature in both the cross-sections and over the whole length of steel members. The critical temperature of a steel frame can be determined in a number of ways. These should consider the potential ways in which the frame might fail. Defined as such, this would be, for instance, the lesser of two temperature values, where the former is identified for frame failure as a result of the whole frame's losing stability and the latter is identified for the loss of the plastic resistance of the frame's weakest member. What is important is that the temperature so determined will not depend on how the fire develops. What will depend on how the fire develops is only the time after which such the temperature is reached in a member that is representative of the whole frame. This article aims to demonstrate a method of determining the latter of the two temperature values mentioned above, i.e. the one involving plastic failure. The authors of this article recommend that the formalism of the classical plastic limit load theory, generalised for a fire situation, be used to determine such the temperature. In simple cases, such an approach involves considering the possible and kinematically admissible mechanisms of the plastic failure of the frame [2-3] or, possibly, determining, through a semi-graphic approach, the bending moment redistribution in the load bearing structural members such that it balances these moments in the cross-sections in which plastic hinges are to form [4-5]. The computational approaches mentioned above lead only to an approximate estimation of the plastic limit load of the frame from the top in the former case, i.e. from the dangerous side (meaning "overly optimistic"), and from the bottom in the latter case, i.e. meaning from the "underestimated" side. An overestimated load limit of the load bearing structure must be

Przytoczone powyżej podejścia obliczeniowe prowadzą do uzyskania jedynie przybliżonego oszacowania nośności granicznej ramy, odpowiednio w pierwszym przypadku od góry, czyli od strony niebezpiecznej (w rozumieniu „nadmiernie optymistycznej”), w drugim natomiast od dołu, co oznacza „niedoszacowanej”. Przeszacowanej nośności granicznej ustroju nośnego towarzyszyć musi nadmiernie restrykcyjne oszacowanie jego temperatury krytycznej, zaś nośność niedoszacowana oznacza zawsze wyznaczenie temperatury krytycznej na poziomie zbyt ryzykownym. Zawsze jednak będą to oszacowania bardziej wiarygodne od tych, które uzyskuje się metodami przybliżonymi, po analizie jedynie pojedynczych elementów konstrukcyjnych. W ogólnym przypadku, przy bardziej złożonych układach konstrukcyjnych, wykorzystanie zaproponowanych algorytmów może być trudne lub co najmniej uciążliwe. Z tego względu w prezentowanej pracy autorzy starają się przybliżyć czytelnikowi podejście bardziej uniwersalne, oparte na formalizmie programowania liniowego. Może ono wydawać się żmudne i pracochłonne w odniesieniu do prostych przypadków obliczeniowych. Jego zalety stają się jednak bardziej dostrzegalne w obliczeniach z dużą liczbą zmiennych, w których liczba możliwych przypadków jest trudniejsza do identyfikacji.

## 2. Ograniczenia w stosowaniu metody

Jak zaznaczono powyżej oszacowania temperatury krytycznej ramy stalowej uzyskane dzięki zastosowaniu formalizmu programowania liniowego będą miarodajne jedynie przy realizacji plastycznego mechanizmu zniszczenia ustroju nośnego. Mechanizm taki jest reprezentatywny dla ram wykonanych z kształtowników stosunkowo krępych, niepodatnych na globalną ani też na lokalną utratę stateczności. Ścisłej mówiąc, przyjęte przekroje rygli i słupów oraz ich smukłości powinny umożliwić bezpieczne przenoszenie obciążeń w warunkach ekspozycji ogniowej aż do uplastycznienia najsłabszego z punktu widzenia pracy statycznej elementu nośnego. Mechanizm plastycznego zniszczenia ramy zostanie uzyskany wtedy, gdy będzie ona efektywnie stężona przez cały czas oddziaływania pożaru. W ogólnym przypadku wyliczona w ten sposób krytyczna temperatura ramy może stanowić jedynie jedno z oszacowań, które wspólnie z oszacowaniami kojarzonymi z innymi możliwymi mechanizmami zniszczenia w pożarze (na przykład zniszczeniem typu czysto sprężystego), pozwoli na wiarygodną ocenę odporności ogniowej rozpatrywanego ustroju.

W rozważaniach przytoczonych poniżej zakłada się, że temperatura poszczególnych elementów stalowych narasta wraz z rozwojem pożaru proporcjonalnie do jednego ustalonego parametru, wspólnego dla wszystkich części badanej ramy. Dzieje się tak faktycznie jedynie w przypadku, gdy słupy i rygle tej ramy wykonano z tej samej stali oraz z elementów o takim samym przekroju poprzecznym (zarówno w odniesieniu do jego kształtu, jak i rozmiaru). Na ogół jednak przekroje i smukłość słupów różnią się od tych odniesionych do rygli rozpatrywanej ramy. Różne mogą być również sposoby ich ekspozycji ogniowej (dla słupów zwykle miarodajne jest nagrzewanie na całym obwodzie przekroju poprzecznego, podczas gdy pasy górne rygli bywają osłonięte przed ogniem przez opierającą się na nich masywną żelbetonową płytę stropową). Z powyższego wynika, że temperatura w tych elementach narasta wraz z rozwojem pożaru z reguły w odmienny sposób. Jeżeli jednak przyjąć, że miarodajnym scenariuszem pożaru w strefie pożarowej, do której należy rozpatrywana rama nośna, jest pożar w pełni rozwinięty, to temperatura gazów spalinowych będzie narastać, ale w danej chwili pożaru będzie wyrównana w całej strefie. Przy szacowaniu temperatury krytycznej ramy przyjmuje się, że jej ele-

menty będą towarzyszyć nadmiernie restrykcyjne oszacowanie jego temperatury krytycznej, zaś nośność niedoszacowana oznacza zawsze wyznaczenie temperatury krytycznej na poziomie zbyt ryzykownym. Zawsze jednak będą to oszacowania bardziej wiarygodne od tych, które uzyskuje się metodami przybliżonymi, po analizie jedynie pojedynczych elementów konstrukcyjnych. W ogólnym przypadku, przy bardziej złożonych układach konstrukcyjnych, wykorzystanie zaproponowanych algorytmów może być trudne lub co najmniej uciążliwe. Z tego względu w prezentowanej pracy autorzy starają się przybliżyć czytelnikowi podejście bardziej uniwersalne, oparte na formalizmie programowania liniowego. Może ono wydawać się żmudne i pracochłonne w odniesieniu do prostych przypadków obliczeniowych. Jego zalety stają się jednak bardziej dostrzegalne w obliczeniach z dużą liczbą zmiennych, w których liczba możliwych przypadków jest trudniejsza do identyfikacji.

## 2. Restrictions in the application

As noted above, the critical temperatures values of a steel frame estimated using the formalism of linear programming will be more reliable only if the plastic mechanism of load bearing structure failure takes place. Such a mechanism is representative of frames made of relatively stocky sections that are not susceptible to global and local loss of stability. More specifically, the assumed cross-sections of beams and columns, and their slenderness ratios, should allow the safe transmission of loads when exposed to fire until the load bearing members that are the weakest in terms of static performance are plasticised. The mechanism of the plastic failure of the frame can be achieved when the frame is effectively braced throughout the fire exposure time. In the general case, the critical temperature of the frame so calculated might only be one of a number of estimations that, together with estimations associated with other possible mechanisms of fire-related failure (for instance, a purely elastic failure), could facilitate a reliable assessment of the fire resistance of the structure under consideration.

The discussion below assumes that the temperature of individual steel members increases with the development of a fire proportionately to a single specific parameter that is common to all parts of the tested frame. This is actually the case only when the beams and columns of this frame are made of the same steel and of members with the same cross-section (in relation to both the shape and the size). Generally, however, the cross-sections and slenderness ratios of columns differ from those relating to the beams of the frame under consideration. The ways in which they are exposed to fire can differ as well (for columns, the exposure of the whole cross-sectional perimeter is usually representative, whereas the top flanges of beams sometimes have a fire barrier in the form of a massive reinforced-concrete floor slab). This means that the temperature in these members usually increases with the development of a fire in a different manner. If, however, a fully developed fire is assumed to be a representative fire scenario for the fire zone of which the load bearing frame under consideration is part, then the temperature of exhaust gases will increase, but at any given moment of the fire it will be equal for the whole zone. To estimate the critical temperature of the frame, it is assumed that its members are in no way isolated from direct fire exposure. In such conditions the differences in the beams' and columns' temperature values determined through detailed computations will thus be negligible, which renders the previously made assumption about the proportionate increase in the temperature of frame members fully admissible.

The classical algorithm for the assessment of the plastic limit load of the frame is based on the identification of all possible and kinematically admissible movement mechanisms for the frame, followed by the determination, for each

menty nie są w żaden sposób izolowane przed bezpośrednią ekspozycją ogniową. Różnice w wyznaczonych ze szczegółowych obliczeń wartościach temperatury rygli i słupów będą zatem w takich warunkach zanedbywalne, co czyni przyjęte wcześniej założenie o proporcjonalnym wzroście temperatury elementów ramy w pełni akceptowalnym.

Klasyczny algorytm oceny nośności granicznej ramy opiera się na identyfikacji dla tej ramy wszystkich możliwych i kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów ruchu, a następnie na wyznaczeniu dla każdego z tych mechanizmów granicznego obciążenia, którego przyłożenie do badanej konstrukcji skutkuje jego uaktywnieniem. Najmniejsze z tak wyznaczonych obciążeń interpretuje się jako obciążenie determinujące nośność ustroju, a skojarzony z nim mechanizm ruchu jako mechanizm krytyczny. Podstawą do szczegółowych obliczeń jest w tym przypadku wielokrotne stosowanie zasady prac wirtualnych. Należy jednak zwrócić uwagę, że w równaniach konstytuujących tę zasadę jedynym parametrem zależnym od zaprojektowanych wcześniej przekrojów poprzecznych słupów i rygli badanej ramy jest plastyczna nośność tych przekrojów na czyste zginanie, czyli  $M_{pl}$ . Stąd wniosek, że nośność graniczna analizowanej ramy nie zależy od pola sił wewnętrznych indukowanych w konstrukcji w warunkach pożaru na skutek skrępowania swobodnej realizacji generowanych termicznie odkształceń. Nie zależy zatem także od historii, czyli zrealizowanego programu obciążenia ramy. Uogólnienie powyższego podejścia na przypadek bezpośredniej ekspozycji ogniowej ustroju nośnego sprowadza się do założenia ustalonego poziomu obciążeń zewnętrznych, skutkującego określonym stanem deformacji ramy, a następnie do poddania go monotonicznemu ogrzewaniu aż do wyczerpania nośności. W takim ujęciu oszacowana odporność ogniowa rozpatrywanej ramy specyfikowana poprzez zidentyfikowaną dla tej ramy temperaturę krytyczną nie będzie zależała od sposobu jej ogrzewania. Będzie taka sama, jeśli wyznaczy się ją w odniesieniu do sytuacji, gdy pożar początkowo rozwijał się powoli, po czym jego rozwój uległ znacznemu przyspieszeniu oraz w relacji do alternatywnego scenariusza, gdy pożar na początku rozwijał się bardzo szybko, aby w końcu tempo jego wzrostu uległo spowolnieniu, jeżeli tylko na skutek zadziałania obydwu porównywanych ze sobą scenariuszy gazy spalinowe w strefie pożarowej osiągnęły w miarodajnej do oceny chwili tę samą wartość temperatury.

### 3. Podstawowe założenia metody

Zgodnie z zasadami programowania liniowego zarówno sama funkcja celu, jak i wszystkie zdefiniowane dla niej ograniczenia, muszą zostać wyrażone przez odpowiednie równania i nierówności o postaci liniowej [6]. Z tego względu w dalszej analizie dla przypadku pożaru przyjęto uogólnienie klasycznego algorytmu obliczeniowego opartego na rozważaniu kolejnych potencjalnie możliwych i kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów ruchu ustroju nośnego. Mogą to być zarówno mechanizmy typu globalnego, jak i lokalnego. Mechanizmy te uaktywniają się na badanej ramie po powstaniu w składających się na nią elementach odpowiedniej liczby odpowiednio zlokalizowanych przegubów plastycznych, jeśli tylko zaistnieją warunki do uruchomienia sekwencji nieskrępowanych obrotów w tych przegubach, takich że kierunki poszczególnych obrotów będą ze sobą odpowiednio skorelowane i nie będą się wzajemnie wygaszać. Realizacja w warunkach pożaru któregośkolwiek z takich mechanizmów oznaczać będzie osiągnięcie przez ustrój stanu granicznej nośności ogniowej skojarzonego z poszukiwaną dla całej konstrukcji temperaturą krytyczną. Podstawowa idea zadania rozwiązawanego w niniejszej pracy stanowi sekwencję następujących stwierdzeń [7]:

of these mechanisms, of the plastic limit load which, if applied to the tested structure, triggers the mechanism. The smallest of loads so determined is interpreted as the load that determines the structural load bearing capacity, with the related movement mechanism being interpreted as the critical mechanism. The basis for detailed computations in this case is the multiple application of the virtual performances principle. It should be noted, however, that the only parameter that depends on the pre-designed cross-sections of columns and beams in the constitutive equations of this principle is the plastic resistance of these cross-sections to pure bending, i.e.  $M_{pl}$ . By extension, the plastic limit load of the analysed frame does not depend on the field of internal forces induced in the structure when exposed to fire as a result of restricting the free realisation of thermally generated deformations. Hence, it also does not depend on the history, i.e. the realised frame load programme. The generalisation of this approach for the purposes of the load bearing-structure direct fire exposure event involves assuming a specific level of external loads resulting in a specific state of frame deformation, followed by subjecting the structure to monotonic heating until it loses its load-bearing capacity. Estimated as such, the fire resistance of the frame under consideration, specified through the critical temperature identified for this frame, will not depend on how the frame is heated. The fire resistance will be the same if it is determined relative to the situation where the fire is developing slowly at the start and much faster later, and relative to the alternative scenario, where the fire is developing rapidly at the start to ultimately slow down, provided only that both comparable scenarios have caused the exhaust gases in the fire zone to reach the same temperature at a representative time.

### 3. The basic assumptions of the method

According to linear-programming principles, both the objective function and all the constraints defined for it must be expressed by corresponding linear equations and inequalities [6]. Consequently, further analysis makes a generalisation, for the purposes of a fire event, of a classical algorithm based on the consideration of the consecutive possible and kinematically admissible movement mechanisms of a load bearing structure. These mechanisms can be of both the global and the local types. These mechanisms are triggered in the analysed frame after a sufficient number of appropriately located plastic hinges form in its constituent components, provided that there are conditions to trigger a sequence of free rotations in these hinges, such that the directions of individual rotations are properly correlated and do not neutralise each other. The occurrence of any such mechanisms in a fire situation will lead the structure to reach its fire resistance limit state associated with the critical temperature sought for the whole structure. The underlying idea of the problem solved in this article is a sequence of the following propositions [7]:

- for the analysed possible and kinematically admissible movement mechanism, the number  $K$  and location of each of  $k = 1, \dots, K$  plastic hinges of this mechanism is known,
- the considered movement mechanism will occur only when a plastic hinge will form in each of  $K$  previously identified cross-sections, i.e. when:

$$\forall k = 1, \dots, K \quad |M_{k, \Theta}| = M_{pl, \Theta} \quad (1)$$

(the lower index  $\Theta$  here means interrelation with the steel temperature),

- dla wybranego do analizy potencjalnie możliwego do realizacji i kinematycznie dopuszczalnego mechanizmu ruchu znana jest liczba  $K$  i lokalizacja każdego z  $k = 1, \dots, K$  przegubów plastycznych formujących ten mechanizm,
- rozważany mechanizm ruchu zostanie zrealizowany tylko wtedy, gdy w każdym z  $K$  wyróżnionych wcześniej przekrojów powstanie przegub plastyczny, czyli gdy:

$$\forall k = 1, \dots, K \quad |M_{k, \Theta}| = M_{pl, \Theta} \quad (1)$$

(dolny indeks  $\Theta$  oznacza tu zależność od temperatury stali),

- zgodnie z klasycznym podejściem statycznym teorii nośności granicznej nośność rozpatrywanej ramy nie zostanie osiągnięta tak długo dopóki można wymyślić taki statycznie dopuszczalny i samorzównoważony układ reakcji, generujący odpowiedni rozkład momentów rezidualnych sumowanych z momentami zginającymi pochodzącymi od pozostałych obciążeń, który po uwzględnieniu redstrybucji wszystkich momentów zginających zapewni bezpieczną pracę całej konstrukcji,
- można zatem poszukiwać maksymalnej wartości temperatury  $\Theta$ , rozumianej w tym zadaniu jako funkcja celu, która przy określonych ograniczeniach wynikających zarówno z warunków równowagi, jak i z warunków plastyczności pozwoli na niespełnienie warunku (1),
- zadanie sformułowane powyżej jest typowym zadaniem rozwiązywanym metodami programowania liniowego.

#### 4. Liniowe warunki równowagi

Do specyfikacji liniowych warunków równowagi w niniejszej pracy wykorzystano równania kanoniczne metody sił. Rozważmy dla przykładu statycznie niewyznaczalną ramę pokazaną na ryc. 1. W ustroju tym kolejne niewiadome hiperstatyczne oznaczono symbolami  $X_j$ , przy czym  $j = 1, \dots, m$  (w przykładzie  $m = 12$ ). Ponadto poszczególnym obciążeniom przyłożonym do ramy przypisano symbole  $P_i$ , gdzie  $i = 1, \dots, 11$ . Należy zauważyć, że obciążenia  $P_i$  to nie tylko zewnętrzne obciążenia mechaniczne, skupione lub rozłożone na określonej długości elementów ramy, ale również obciążenia wewnętrzne generowane na skutek skrepowania swobody odkształceń termicznych. W analizowanym przykładzie założono, że pożar rozgorzał jedynie na dolnej kondygnacji badanej ramy i nie przedostał się przez strop i ściany na jej górne piętro. Temperatura gazów spalinowych narasta zatem monotonicznie tylko na tym poziomie budynku. Ponieważ rozważany pożar wskutek rozgorzenia osiągnął fazę pożaru rozwiniętego, temperatura ta jest w każdej chwili pożaru wyrównana na całej kondygnacji opanowanej przez ogień, rozumianej w takim ujęciu jako jedna strefa pożarowa. Narastanie temperatury gazów spalinowych w tej strefie skutkuje równoczesnym narastaniem temperatury dolnych słupów i rygli ramy, co na ryc. 1 przy tych elementach zaznaczono symbolem  $\Theta$ . Temperatura stali w każdym z nagrzewanych elementów konstrukcyjnych jest w danej chwili pożaru taka sama ze względu na wcześniejsze założenie o zastosowaniu do nich kształtowników stalowych o jednakowych przekrojach poprzecznych. Można zatem temperaturę  $\Theta$  potraktować jako kolejne obciążenie, przyjmując, że dla  $i = 11$  zachodzi  $P_i = \Theta$ . Mamy zatem do czynienia z sytuacją, gdy w czasie ekspozycji ogniowej wartości obciążeń  $P_i$  dla  $i = 1, \dots, 10$  pozostają na stałym poziomie i nie zależą od temperatury  $\Theta$ . Wzrasta jedynie wartość obciążenia  $P_{11} = P_{11, \Theta}$ .

Z formalizmu metody sił wynika, że:

$$\sum_{j=1}^m \delta_{kj} x_{j, \Theta} + \sum_i A_{ki, \Theta} = 0 \quad (2)$$

- according to the classical static approach of the plastic limit load theory, the load bearing capacity of the considered frame will not be reached as long as it is possible to conceive of such a statically admissible and self-equilibrated system of reactions – generating an appropriate distribution of residual moments summed up with the bending moments induced by other loads – that will ensure the safe performance of the whole structure after the redistribution of all bending moments has been factored in.
- the aim, therefore, might be to look for the maximum temperature value  $\Theta$ , defined here as the goal function that, under specific constraints attributable to both the equilibrium and yield conditions, will facilitate the condition's (1) not being satisfied.
- the problem defined above is a typical problem solvable with linear-programming methods.

#### 4. Linear equilibrium conditions

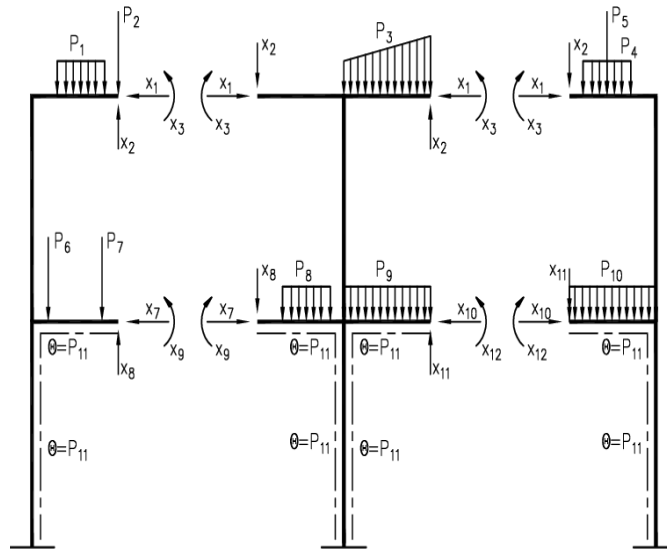
In this article the canonical equations of the force method are used to specify the linear equilibrium conditions. Consider as an example a statically indeterminate frame as shown in Figure 1. In this structure, individual hyperstatic unknowns are marked with the  $X_j$  symbols, with  $j = 1, \dots, m$  (the example shows  $m = 12$ ). Also, individual loads applied to the frame are assigned the  $P_i$  symbols, where  $i = 1, \dots, 11$ . It should be noted that the  $P_i$  loads are not only external loads, concentrated or distributed along a specific length of the frame members, but also internal loads induced by constraints on free thermal deformations. The analysed example assumes that the fire involved only the lower floor of the analysed frame without penetrating to its upper floor through the floor slab and walls. The exhaust gas temperature, then, increases monotonically only at this level of the building. Since the considered fire flashed over to become a fully developed fire, this temperature is equal for the whole floor which is on fire, defined here as the only fire zone, at any given moment of the fire. The rising exhaust gas temperature in this zone causes a simultaneous increase in the temperature of the lower frame columns and beams, as marked for these members in Figure 1 with the  $\Theta$  symbol. The steel temperature in each of the heated members is the same at any given moment of the fire because of the assumption that these members are made of steel sections with the same cross-section. The  $\Theta$  temperature, then, can be considered as another load, assuming that for  $i = 11$  there is  $P_i = \Theta$ . Therefore, this is a situation where the load values of  $P_i$  for  $i = 1, \dots, 10$  remain at a constant level and are independent of the temperature when exposed to fire. The only value that increases is the load  $P_{11} = P_{11, \Theta}$ .

It follows from the formalism of the forces method that:

$$\sum_{j=1}^m \delta_{kj} x_{j, \Theta} + \sum_i A_{ki, \Theta} = 0 \quad (2)$$

where  $\delta_{kj}$  are displacements of a statically determinate basic system, as specified in point  $k$ , induced by hyperstatic forces with the values of  $x_j = 1$ , and  $A_{ki, \Theta}$  are corresponding displacements of the same basic system induced by the load  $P_i$  (or  $P_i, \Theta$ ). The equation (2) is often used to prove that the principle of the superposition of the bending moment is true. Consequently, the value of the bending moment in point  $k$  of the analysed frame is determined by the equation:

$$M_{k, \Theta} = \sum_{j=1}^m m_{kj} x_{j, \Theta} + \sum_i m_{ki}^p P_i \quad (3)$$



Ryc. 1. Przykładowa rama z zaznaczonymi siłami hiperstatycznymi i obciążeniami zewnętrznymi.

Fig. 1. Sample frame with marked hyperstatic forces and external loads

Źródło: Rysunek na podstawie pracy [8] uzupełniono o obciążenie termiczne wynikające z nagrzania wyróżnionych elementów konstrukcji.

Source: Figure based on [8] supplemented by the thermal load due to the heating of selected structural members.

gdzie  $\delta_{kj}$  są określonymi w punkcie  $k$  przemieszczeniami statycznie wyznaczalnego układu podstawowego wywołanymi siłami hiperstatycznymi o wartościach  $x_j = 1$ , natomiast  $\Delta_{ki}$  analogicznymi przemieszczeniami tego samego układu podstawowego pochodzącymi od obciążenia  $P_i$  (lub  $P_i, \Theta$ ). Zależność (2) często wykorzystuje się do udowodnienia prawdziwości zasady superpozycji momentów zginających. W konsekwencji wartość momentu zginającego w punkcie  $k$  badanej ramy wyznacza się z równania:

$$M_{k,\Theta} = \sum_{j=1}^m m_{kj} x_{j,\Theta} + \sum_i m_{ki}^p P_i \quad (3)$$

w którym  $m_{kj}$  jest momentem zginającym określonym w punkcie  $k$  statycznie wyznaczalnego układu podstawowego tej ramy i pochodzącym od siły hiperstatycznej  $x_j = 1$ , natomiast

$m_{ki}^p$  – analogicznym momentem zginającym, również skojarzonym ze statycznie wyznaczalnym układem podstawowym rozpatrywanej ramy ale pochodzącym od obciążenia  $P_i = 1$ . Oczywiście, jednym z obciążeń  $P_i$  jest w tym przypadku obciążenie  $P_{11,\Theta}$ , jedyne zmieniające się wraz z temperaturą  $\Theta$ . Nie daje ono jednak momentu zginającego w statycznie wyznaczalnym układzie podstawowym ramy, a zatem  $m_{k,11}^p = 0$ . Analogicznie, siłę podłużną w punkcie  $k$  ramy można wyznaczyć z równania:

$$N_{k,\Theta} = \sum_{j=1}^m n_{kj} x_{j,\Theta} + \sum_i n_{ki}^p P_i \quad (4)$$

natomiast siłę poprzeczną z zależności:

$$V_{k,\Theta} = \sum_{j=1}^m v_{kj} x_{j,\Theta} + \sum_i v_{ki}^p P_i \quad (5)$$

przy czym  $n_{k,11}^p = 0$  i  $v_{k,11}^p = 0$ . Znaczenie parametrów  $n_{kj}$

i  $v_{kj}$  oraz odpowiednio  $n_{kj}^p$  i  $v_{kj}^p$  jest analogiczne do  $m_{kj}$  i  $m_{kj}^p$ , z tym, że są one odniesione kolejno do siły podłużnej  $N_{k,\Theta}$  i siły poprzecznej  $V_{k,\Theta}$ , nie zaś do momentu zginającego  $M_{k,\Theta}$ .

where  $m_{kj}$  is the bending moment defined in point  $k$  of the statically determinate basic system of this frame and induced

by the hyperstatic force  $x_j = 1$ , and  $m_{ki}^p$  is the corresponding bending moment that is also interrelated with the statically determinate basic system of the considered frame, except that it is induced by the load  $P_i = 1$ . It is self-explanatory, then, that one of the loads  $P_i$  is in this case the load  $P_{11,\Theta}$ , which is the only load that changes along with the changing temperature  $\Theta$ . This equation, however, does not produce the bending moment in a statically determinate basic system of the frame, so

$m_{k,11}^p = 0$ . By analogy, the longitudinal force in point  $k$  of the frame can be determined by the equation:

$$N_{k,\Theta} = \sum_{j=1}^m n_{kj} x_{j,\Theta} + \sum_i n_{ki}^p P_i \quad (4)$$

and the transverse force can be determined by the relationship:

$$V_{k,\Theta} = \sum_{j=1}^m v_{kj} x_{j,\Theta} + \sum_i v_{ki}^p P_i \quad (5)$$

where  $n_{k,11}^p = 0$  and  $v_{k,11}^p = 0$ . The meaning of the parameters

$n_{kj}$  and  $v_{kj}$  and  $n_{kj}^p$  and  $v_{kj}^p$ , respectively, corresponds to  $m_{kj}$

and  $m_{kj}^p$ , except that they relate to the longitudinal force  $N_{k,\Theta}$  and the transverse force  $V_{k,\Theta}$ , respectively, as opposed to the bending moment  $M_{k,\Theta}$ .

## 5. The linearisation of the yield criterion

It follows from the static approach of the plastic limit load theory that if it is possible to identify for the considered structure such a statically admissible distribution of residual bending moments – induced by a self-equilibrated system of reactions – that will ensure a safe transfer of loads when combined with the distribution of bending moments specified for the purely elastic performance of the system, then it is reasonable to assert that this particular distribution will emerge in the load process to resist the triggering of any kinematically admissible movement mechanism in the analysed system. In other words, each statically indeterminate structure that is made of steel

## 5. Linearyzacja warunku plastyczności

Z podejścia statycznego teorii nośności granicznej wynika, że jeżeli tylko dla rozpatrywanej konstrukcji da się zidentyfikować taki statycznie dopuszczalny rozkład zginających momentów rezydualnych, generowany przez samorzównoważony układ reakcji, który po złożeniu z rozkładem momentów zginających specyfikowanym dla czysto sprężystej pracy ustroju zapewni bezpieczne przenoszenie obciążeń, to można twierdzić, że właśnie taki rozkład zostanie wygenerowany w procesie obciążenia i przeciwstawi się uruchomieniu w analizowanym układzie jakiegokolwiek kinematycznie dopuszczalnego mechanizmu ruchu. Innymi słowy, każda konstrukcja statycznie niewyznaczalna wykonana z elementów stalowych o przekrojach klasy 1, czyli takich, które po uplastycznieniu zachowują zdolność do obrotu, posiada swoją rezerwę nośności warunkowaną możliwościami redystrybucji momentów zginających. Twierdzenie to pozwala na konstatację, że stan graniczny nośności ogniowej kojarzony z realizacją kinematycznie dopuszczalnego mechanizmu ruchu nie zostanie w ramie osiągnięty tak długo, dopóki można wykazać, że istnieje możliwość jego zablokowania przez odpowiedni rozkład momentów rezydualnych. Oznacza to, że temperatura krytyczna  $\Theta_{cr}$  specyfikowana dla danego mechanizmu ruchu będzie największą spośród wszystkich możliwych do uzyskania z obliczeń. Warunek plastyczności (1), jeśli lokalizować go po stronie bezpiecznej warunku granicznego, powinien zatem zostać zapisany w formie nierówności:

$$\forall k = 1, \dots, K \quad |M_{k,\Theta}| \leq M_{pl,\Theta,d} \quad (6)$$

W kolejnym kroku należy określić relację pomiędzy plastyczną nośnością przekroju poprzecznego i temperaturą stali, czyli funkcję  $M_{pl,\Theta,d} = M_{pl,d}(\Theta)$ . Jeżeli stopień redukcji granicy plastyczności stali w temperaturze pożarowej opisuje współczynnik  $k_{y,\Theta} = f_{y,\Theta}/f_y$ , o wartościach specyfikowanych w normie PN-EN 1993-1-2 [9], to przy założeniu równomiernego rozkładu temperatury  $\Theta$  zarówno w przekroju poprzecznym, jak i na długości ogrzewanego elementu wartość obliczeniową poszukiwanej nośności można wyznaczyć z zależności:

$$M_{pl,\Theta,d} = W_{pl} \frac{k_{y,\Theta} f_y}{\gamma_{M,fi}} = k_{y,\Theta} M_{pl,d} \frac{\gamma_{M,fi}}{\gamma_M} \quad (7)$$

w której:  $f_y$  jest wartością nominalną granicy plastyczności stali, w uproszczonych obliczeniach normowych zwykle utożsamianą z jej wartością charakterystyczną,  $W_{pl}$  – wskaźnikiem oporu plastycznego, zależnym jedynie od wielkości geometrycznych, a więc niezależnym od temperatury, natomiast  $\gamma_M$  i  $\gamma_{M,fi}$  – częściowymi współczynnikami bezpieczeństwa specyfikowanymi dla nośności i odniesionymi odpowiednio do podstawowej sytuacji projektowej i wyjątkowej sytuacji pożaru. W praktycznych obliczeniach, zgodnie z zaleceniami normy PN-EN 1991-1-2 [10], przyjmuje się, że  $\gamma_{M,fi} = \gamma_M = 1,0$ . Oznacza to, że obliczeniowa nośność plastyczna przekroju elementu stalowego zmienia się wraz z temperaturą proporcjonalnie do zmian charakterystycznej granicy plastyczności stali. Jest to zależność silnie nieliniowa. Z badań eksperymentalnych wynika, że niezależnie od dużej zmienności statystycznej uzyskiwanych wyników, dobrym oszacowaniem poszukiwanej zależności jest relacja:

$$\text{gdzie } k_{y,\Theta} = \frac{1,0087}{(e^{\beta} + 1)^{0,2609}} \quad \text{gdzie } \beta = \frac{\Theta - 482}{39,19} \quad (8)$$

Aby zależność (8) mogła zostać wykorzystana do proponowanego w niniejszej pracy algorytmu programowania liniowego, musi zostać zlinearyzowana. Wprawdzie w normie PN-EN 1993-1-2 [9] zamienia się ją na odcinkowo liniową

members with class 1 cross-sections – i.e. members that retain their ability to rotate after yield – has an inherent reserve of load bearing capacity conditional on the capacity to redistribute bending moments. This allows the conclusion that the fire resistance limit state associated with the occurrence of the kinematically admissible movement mechanism will not be reached in the frame as long as it is possible to demonstrate that it can be blocked by an appropriate distribution of residual moments. This means that the critical temperature  $\Theta_{cr}$  specified for a given movement mechanism will be the highest of all computable temperature values. When located on the safe side of the boundary condition, the yield criterion should be expressed in the form of the inequality:

$$\forall k = 1, \dots, K \quad |M_{k,\Theta}| \leq M_{pl,\Theta,d} \quad (6)$$

Another step is to define the relationship between the plastic bending resistance of the cross-section and the steel temperature, i.e. the function  $M_{pl,\Theta,d} = M_{pl,d}(\Theta)$ . If the extent to which the yield point of steel is reduced in the fire temperature is described by the factor  $k_{y,\Theta} = f_{y,\Theta}/f_y$ , with values specified in the PN-EN 1993-1-2 standard [9], then, assuming the equal distribution of the temperature  $\Theta$ , the estimated value of the load bearing capacity sought can be determined both cross-wise and length-wise in relation to the heated member based on the following relationship:

$$M_{pl,\Theta,d} = W_{pl} \frac{k_{y,\Theta} f_y}{\gamma_{M,fi}} = k_{y,\Theta} M_{pl,d} \frac{\gamma_{M,fi}}{\gamma_M} \quad (7)$$

where  $f_y$  is the nominal value of the yield point of steel, usually identified with its characteristic value in simplified standardised computations,  $W_{pl}$  – is the plastic section modulus that depends only on the geometric values and as such is independent of the temperature, while  $\gamma_M$  and  $\gamma_{M,fi}$  – are partial safety factors specified for load bearing capacity and relating to the basic design situation and the accidental fire situation, respectively. In practical computations, as recommended by the PN-EN 1991-1-2 standard [10], it is assumed that  $\gamma_{M,fi} = \gamma_M = 1,0$ . This means that the design plastic bending resistance of a steel member's cross-section changes with the temperature proportionately to the changes in the characteristic yield point of steel. This is a highly non-linear relationship. Experiments show that regardless of the high statistical variability of the results, the following relation is a good estimation of the relationship sought:

$$\text{where } k_{y,\Theta} = \frac{1,0087}{(e^{\beta} + 1)^{0,2609}} \quad \text{and } \beta = \frac{\Theta - 482}{39,19} \quad (8)$$

In order for the relationship (8) to be used for the linear-programming algorithm proposed here, it must be linearised. While in the PN-EN 1993-1-2 standard [9] it is substituted with a piecewise linear function, the number of straight segments is so large that it makes computation practically impossible. It can be assumed, however, that the resultant critical temperature of the frame is relatively rarely estimated to be more than 785°C. Such a limit allows the acceptance of the simplified relationship proposed by the authors of [3]. This relationship is as follows:

- for:  $20^\circ\text{C} \leq \Theta \leq 400^\circ\text{C}$ :  $k_{y,\Theta} = k_{y,20} = k_{y,400} = 1,0$  (9)
- for:  $400^\circ\text{C} < \Theta \leq 785^\circ\text{C}$ :  $k_{y,\Theta} = 2,04 - 2,6 \cdot 10^{-3} \Theta$  (10)

The approximation level of straight lines resulting from the relationships (9) and (10) to the piecewise linear function as proposed in the PN-EN 1993-1-2 standard [9] is shown in Figure 2. It is easy to notice that for temperature values high-



łamaną, jednak liczba odcinków prostych jest na tyle duża, że w praktyce uniemożliwia to prowadzenie obliczeń. Można jednak przyjąć, że wynikowa temperatura krytyczna ramy stosunkowo rzadko szacowana jest na poziomie wyższym niż 785°C. Takie ograniczenie pozwala na akceptację zależności uproszczonej zaproponowanej przez autorów w pracy [3]. Ma ona postać:

- dla:  $20^{\circ}\text{C} \leq \Theta \leq 400^{\circ}\text{C}$ :  $k_{y,\Theta} = k_{y,20} = k_{y,400} = 1,0$  (9)

- dla:  $400^{\circ}\text{C} < \Theta \leq 785^{\circ}\text{C}$ :  $k_{y,\Theta} = 2,04 - 2,6 \cdot 10^{-3} \Theta$  (10)

Stopień przybliżenia prostych wynikających z zależności (9) i (10) do łamanej proponowanej w normie PN-EN 1993-1-2 [9] pokazano na ryc. 2. Łatwo zauważyć, że dla temperatury wyższej niż 785°C otrzymuje się ujemne wartości współczynnika  $k_{y,\Theta}$ , co nie ma uzasadnienia formalnego. W takim ujęciu jest to zatem niejako temperatura graniczna, powyżej której zaniedbuje się i tak już niewielką nośność badanego przekroju. Wykorzystanie zależności (9) i (10) daje możliwość zapisania warunku plastyczności w postaci liniowej. Wychodząc z formuły (6), można bowiem zauważyć, że zachodzi:

- dla:  $20^{\circ}\text{C} \leq \Theta \leq 400^{\circ}\text{C}$ :  $M_{pl,\Theta,d} = M_{pl,d}$  (11)

- dla:  $400^{\circ}\text{C} < \Theta \leq 785^{\circ}\text{C}$ :  $M_{pl,\Theta,d} = M_{pl,d} (2,04 - 2,6 \cdot 10^{-3} \Theta)$  (12)

Należy zaznaczyć, że nie ma formalnych przeszkód do rozważenia sytuacji nierównomiernego ogrzania przekroju poprzecznego. Można na przykład uwzględnić niewiele niższą temperaturę górnego pasa dwuteowego stalowego rygła ramy względem pozostałych części przekroju. Taka, w praktyce stosunkowo niewielka, różnica temperatury, odpowiednio  $\Theta^l$  w dolnym pasie i w środku rozpatrywanego przekroju oraz  $\Theta^u < \Theta^l$  w jego górnym pasie jest skutkiem bezpośredniego sąsiedztwa górnego pasa stalowego rygła ramy z masywną żelbetową płytą stropową o dużej pojemności cieplnej. Ograniczemu w ten sposób przekrojowi przypisuje się wtedy parametr  $\alpha$  stanowiący niejako mnożnik temperatury odniesienia  $\Theta^l$  [8], taki że:

$$\alpha = \frac{\Theta^l - \Theta^u}{\Theta^l} \quad (13)$$

er than 785°C negative values of the factor  $k_{y,\Theta}$  are obtained, for which there is no formal explanation. As such, this is, to some extent, a limit temperature above which the resistance of the analysed cross-section, being insignificant anyway, is ignored. The use of the relationships (9) and (10) makes it possible to express the yield criterion in a linear form. Indeed, taking the formula (6) as the starting point, the following can be observed:

- for:  $20^{\circ}\text{C} \leq \Theta \leq 400^{\circ}\text{C}$ :  $M_{pl,\Theta,d} = M_{pl,d}$  (11)

- for:  $400^{\circ}\text{C} < \Theta \leq 785^{\circ}\text{C}$ :  $M_{pl,\Theta,d} = M_{pl,d} (2,04 - 2,6 \cdot 10^{-3} \Theta)$  (12)

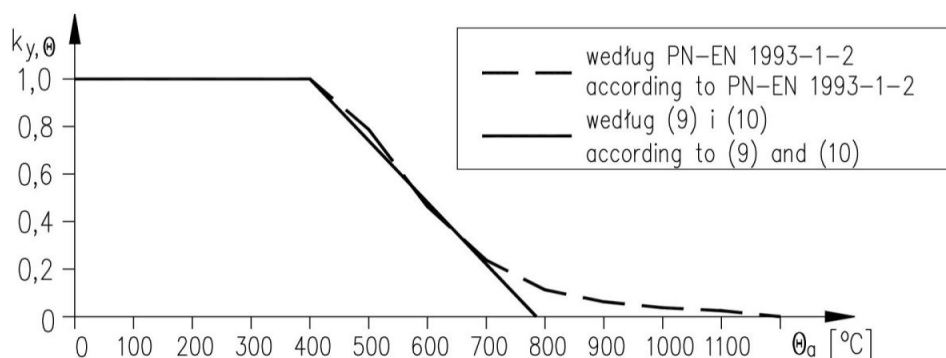
It is important to note that there are no formal obstacles to considering a situation where the cross-section is not heated uniformly. For instance, a slightly lower temperature can be considered of the I-beam top flange of the steel frame beam in relation to other parts of the cross-section. Such an, actually insignificant, temperature difference –  $\Theta^l$  in the bottom flange and in the middle of the considered cross-section, and  $\Theta^u < \Theta^l$  in its top flange, respectively – is attributable to the direct contact of the top flange of the steel frame beam with a massive reinforced-concrete floor slab of high heat capacity. The cross-section so heated is then assigned the parameter  $\alpha$ , which is, to some extent, the multiplier of the reference temperature  $\Theta^l$  [8], such that:

$$\alpha = \frac{\Theta^l - \Theta^u}{\Theta^l} \quad (13)$$

This means that there is  $\Theta^u = (1 - \alpha)\Theta^l$  (Figure 3). It should be noted, however, that the value of the factor  $\alpha$  changes with the change in temperature  $\Theta^l$  during the fire. And this is by no means a proportionate change. The neutral-axis location changes as well, which further complicates computations. The yield criterion, then, must be in each case linearised again for each given value of the steel temperature.

For multi-storey frames, it might prove important for the precision of the estimated critical temperature of  $\Theta_{cr}$  to take into account the effect of the  $M-N$  interaction. The yield criterion (6) is then expressed by the relationship:

$$\forall k = 1, \dots, K \quad |M_{k,\Theta}| \leq M_{pl,\Theta,d} \left( 1 - \frac{|N_{k,\Theta}|}{N_{pl,\Theta,d}} \right) \quad (14)$$



Ryc. 2. Aproksymacja zależnościami (9) i (10) łamanej proponowanej w normie PN-EN 1993-1-2 [9] do przybliżenia relacji (8)  
Fig. 2. An approximation of the piecewise linear function proposed in the PN-EN 1993-1-2 [9] standard to estimate the relationship (8) by the formulae (9) and (10)

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [3].

Source: Own elaboration based on [3].

Oznacza to, że zachodzi  $\Theta^u = (1 - \alpha)\Theta^l$  (ryc. 3). Należy jednak zauważyć, że wartość współczynnika  $\alpha$  zmienia się w czasie pożaru wraz ze zmianą wartości temperatury  $\Theta^l$ . Nie jest to przy tym zmiana w żaden sposób proporcjonalna. Zmienia się również położenie osi obojętnej, co dodatkowo komplikuje obliczenia. Linearyzację warunku plastyczności trzeba zatem w takim przypadku przeprowadzać od nowa dla każdej zadanej wartości temperatury stali.

W przypadku ram wielokondygnacyjnych istotnym dla precyzji uzyskanego oszacowania temperatury krytycznej  $\Theta_{cr}$  może okazać się uwzględnienie wpływu interakcji M-N. Warunek plastyczności (6) zapisuje się wtedy zależnością:

$$\forall k = 1, \dots, K \quad |M_{k,\Theta}| \leq M_{pl,\Theta,d} \left( 1 - \frac{|N_{k,\Theta}|}{N_{pl,\Theta,d}} \right) \quad (14)$$

Ponieważ jednak, analogicznie do (7), zachodzi:

$$N_{pl,\Theta,d} = A \frac{k_{y,\Theta} f_y}{\gamma_{M,f_i}} = k_{y,\Theta} N_{pl,d} \frac{\gamma_{M,f_i}}{\gamma_M} \quad (15)$$

gdzie  $A$  jest powierzchnią analizowanego przekroju poprzecznego, warunek (14) sprowadza się do postaci:

$$\forall k = 1, \dots, K \quad |M_{k,\Theta}| + \frac{W_{pl}}{A} |N_{k,\Theta}| \leq M_{pl,\Theta,d} \quad (16)$$

równoważnej sekwencji czterech niezależnych ograniczeń, to znaczy:

- gdy:  $M_{k,\Theta} \geq 0$  i  $N_{k,\Theta} \geq 0$ : (17)

$$\forall k = 1, \dots, K \quad M_{k,\Theta} + \frac{W_{pl}}{A} N_{k,\Theta} \leq M_{pl,\Theta,d}$$

- gdy:  $M_{k,\Theta} < 0$  i  $N_{k,\Theta} < 0$ : (18)

$$\forall k = 1, \dots, K \quad -M_{k,\Theta} - \frac{W_{pl}}{A} N_{k,\Theta} \leq M_{pl,\Theta,d}$$

- gdy:  $M_{k,\Theta} \geq 0$  i  $N_{k,\Theta} < 0$ : (19)

$$\forall k = 1, \dots, K \quad M_{k,\Theta} - \frac{W_{pl}}{A} N_{k,\Theta} \leq M_{pl,\Theta,d}$$

- gdy:  $M_{k,\Theta} < 0$  i  $N_{k,\Theta} \geq 0$ : (20)

$$\forall k = 1, \dots, K \quad -M_{k,\Theta} + \frac{W_{pl}}{A} |N_{k,\Theta}| \leq M_{pl,\Theta,d}$$

Since, however, by analogy to (7), there is:

$$N_{pl,\Theta,d} = A \frac{k_{y,\Theta} f_y}{\gamma_{M,f_i}} = k_{y,\Theta} N_{pl,d} \frac{\gamma_{M,f_i}}{\gamma_M} \quad (15)$$

where  $A$  is the cross sectional area of the analysed member, the criterion (14) is shown as:

$$\forall k = 1, \dots, K \quad |M_{k,\Theta}| + \frac{W_{pl}}{A} |N_{k,\Theta}| \leq M_{pl,\Theta,d} \quad (16)$$

of an equivalent sequence of four independent constraints, that is:

- when:  $M_{k,\Theta} \geq 0$  i  $N_{k,\Theta} \geq 0$ : (17)

$$\forall k = 1, \dots, K \quad M_{k,\Theta} + \frac{W_{pl}}{A} N_{k,\Theta} \leq M_{pl,\Theta,d}$$

- when:  $M_{k,\Theta} < 0$  i  $N_{k,\Theta} < 0$ : (18)

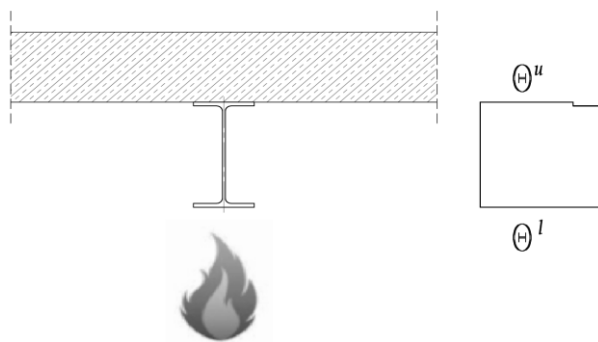
$$\forall k = 1, \dots, K \quad -M_{k,\Theta} - \frac{W_{pl}}{A} N_{k,\Theta} \leq M_{pl,\Theta,d}$$

- when:  $M_{k,\Theta} \geq 0$  i  $N_{k,\Theta} < 0$ : (19)

$$\forall k = 1, \dots, K \quad M_{k,\Theta} - \frac{W_{pl}}{A} N_{k,\Theta} \leq M_{pl,\Theta,d}$$

- when:  $M_{k,\Theta} < 0$  i  $N_{k,\Theta} \geq 0$ : (20)

$$\forall k = 1, \dots, K \quad -M_{k,\Theta} + \frac{W_{pl}}{A} |N_{k,\Theta}| \leq M_{pl,\Theta,d}$$



Ryc. 3. Obliczeniowy rozkład temperatury w przekroju poprzecznym niez izolowanego stalowego ryglu ramy nośnej uwzględniający wpływ sąsiadującej z tym ryglem żelbetowej płyty stropowej

Fig. 3. The computational distribution of the temperature in the cross-section of an uninsulated steel beam in a bearing frame, taking into account the influence of a reinforced-concrete floor slab in direct contact with the beam

Źródło: Opracowanie własne.

Source: Own elaboration.

## 6. Sformułowanie zadania programowania liniowego

Liniove warunki równowagi, odpowiednio (3), (4) i (5) oraz zlinearyzowany warunek plastyczności (16) pozwalają na sformułowanie ograniczeń stanowiących bazę dla zadania programowania liniowego. Wcześniej jednak należy przyjąć ustaloną wartość temperatury  $\Theta = \Theta_0$ , która w dalszych rozważaniach traktowana będzie jako temperatura odniesienia. Wtedy bowiem temperaturę krytyczną  $\Theta_{cr}$  wyznaczy mnożnik  $\zeta = \zeta_{cr}$ , taki że:

$$\Theta_{cr} = \zeta_{cr} \Theta_0 \quad (21)$$

W zadaniu chodzi zatem o maksymalizację wartości mnożnika  $\zeta$ , kojarzonego w tym przypadku z funkcją celu, przy spełnieniu liniowych względem temperatury  $\Theta$  ograniczeń zapisanych przez następujący zbiór ośmiu nierówności, wyspecyfikowany osobno dla każdego punktu  $k = 1, \dots, K$  odpowiadającego lokalizacji przegubu plastycznego w wybranym do analizy mechanizmie ruchu:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m m_{kj} x_{j\Theta} + \sum_i m_{ki}^P P_i + \frac{W_{pl}}{A} \left( \sum_{j=1}^m n_{kj} x_{j\Theta} + \sum_i n_{ki}^P P_i \right) &\leq \\ &\leq W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^m m_{kj} x_{j\Theta} - \sum_i m_{ki}^P P_i + \frac{W_{pl}}{A} \left( - \sum_{j=1}^m n_{kj} x_{j\Theta} - \sum_i n_{ki}^P P_i \right) &\leq \\ &\leq W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^m m_{kj} x_{j\Theta} - \sum_i m_{ki}^P P_i + \frac{W_{pl}}{A} \left( \sum_{j=1}^m n_{kj} x_{j\Theta} + \sum_i n_{ki}^P P_i \right) &\leq \\ &\leq W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m m_{kj} x_{j\Theta} + \sum_i m_{ki}^P P_i + \frac{W_{pl}}{A} \left( - \sum_{j=1}^m n_{kj} x_{j\Theta} - \sum_i n_{ki}^P P_i \right) &\leq \\ &\leq W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m m_{kj} x_{j\Theta} + \sum_i m_{ki}^P P_i + \frac{W_{pl}}{A} \left( \sum_{j=1}^m n_{kj} x_{j\Theta} + \sum_i n_{ki}^P P_i \right) &\leq \\ &\leq W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} (2,04 - 2,6 \cdot 10^{-3} \zeta \Theta_0) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^m m_{kj} x_{j\Theta} - \sum_i m_{ki}^P P_i + \frac{W_{pl}}{A} \left( - \sum_{j=1}^m n_{kj} x_{j\Theta} - \sum_i n_{ki}^P P_i \right) &\leq \\ &\leq W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} (2,04 - 2,6 \cdot 10^{-3} \zeta \Theta_0) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^m m_{kj} x_{j\Theta} - \sum_i m_{ki}^P P_i + \frac{W_{pl}}{A} \left( \sum_{j=1}^m n_{kj} x_{j\Theta} + \sum_i n_{ki}^P P_i \right) &\leq \\ &\leq W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} (2,04 - 2,6 \cdot 10^{-3} \zeta \Theta_0) \end{aligned} \quad (28)$$

## 6. The formulation of the linear-programming problem

The linear equilibrium conditions (3), (4) and (5), respectively, and the linearised yield criterion (16) facilitate the formulation of the constraints to be used as the basis of the linear-programming problem. Prior to this, however, a specific temperature value of  $\Theta = \Theta_0$  must be defined as the reference temperature for further considerations. Then, the critical temperature of  $\Theta_{cr}$  will be determined by the multiplier  $\zeta = \zeta_{cr}$ , such that:

$$\Theta_{cr} = \zeta_{cr} \Theta_0 \quad (21)$$

The problem involves, then, the maximisation of the multiplier value  $\zeta$ , associated in this case with the objective function, with the satisfaction of constraints linear to the temperature of  $\Theta$ , where the constraints are expressed by the following set of eight inequalities specified separately for each point  $k = 1, \dots, K$  corresponding to plastic-hinge location in the analysed movement mechanism:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m m_{kj} x_{j\Theta} + \sum_i m_{ki}^P P_i + \frac{W_{pl}}{A} \left( \sum_{j=1}^m n_{kj} x_{j\Theta} + \sum_i n_{ki}^P P_i \right) &\leq \\ &\leq W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^m m_{kj} x_{j\Theta} - \sum_i m_{ki}^P P_i + \frac{W_{pl}}{A} \left( - \sum_{j=1}^m n_{kj} x_{j\Theta} - \sum_i n_{ki}^P P_i \right) &\leq \\ &\leq W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^m m_{kj} x_{j\Theta} - \sum_i m_{ki}^P P_i + \frac{W_{pl}}{A} \left( \sum_{j=1}^m n_{kj} x_{j\Theta} + \sum_i n_{ki}^P P_i \right) &\leq \\ &\leq W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m m_{kj} x_{j\Theta} + \sum_i m_{ki}^P P_i + \frac{W_{pl}}{A} \left( - \sum_{j=1}^m n_{kj} x_{j\Theta} - \sum_i n_{ki}^P P_i \right) &\leq \\ &\leq W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m m_{kj} x_{j\Theta} + \sum_i m_{ki}^P P_i + \frac{W_{pl}}{A} \left( \sum_{j=1}^m n_{kj} x_{j\Theta} + \sum_i n_{ki}^P P_i \right) &\leq \\ &\leq W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} (2,04 - 2,6 \cdot 10^{-3} \zeta \Theta_0) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^m m_{kj} x_{j\Theta} - \sum_i m_{ki}^P P_i + \frac{W_{pl}}{A} \left( - \sum_{j=1}^m n_{kj} x_{j\Theta} - \sum_i n_{ki}^P P_i \right) &\leq \\ &\leq W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} (2,04 - 2,6 \cdot 10^{-3} \zeta \Theta_0) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^m m_{kj} x_{j\Theta} - \sum_i m_{ki}^P P_i + \frac{W_{pl}}{A} \left( \sum_{j=1}^m n_{kj} x_{j\Theta} + \sum_i n_{ki}^P P_i \right) &\leq \\ &\leq W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} (2,04 - 2,6 \cdot 10^{-3} \zeta \Theta_0) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\sum_{j=1}^m m_{kj} x_{j\Theta} + \sum_i m_{ki}^P P_i + \frac{W_{pl}}{A} \left( - \sum_{j=1}^m n_{kj} x_{j\Theta} - \sum_i n_{ki}^P P_i \right) \leq \quad (29)$$

$$\leq W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} \left( 2,04 - 2,6 \cdot 10^{-3} \zeta \Theta_0 \right)$$

Ograniczenia (22) do (29), wyspecyfikowane dla  $k$ -tej lokalizacji przegubu plastycznego, wygodnie zapisać w postaci macierzowej:

$$\mathbf{A}_{8xj} \mathbf{X}_{jx1} + \mathbf{B}_{8x1} \leq \mathbf{C}_{8x1} \quad (30)$$

gdzie:

$$\mathbf{A}_{8xj} = \begin{bmatrix} m_1 + \frac{W_{pl}}{A} n_1 & \dots & m_j + \frac{W_{pl}}{A} n_j \\ -m_1 - \frac{W_{pl}}{A} n_1 & \dots & -m_j - \frac{W_{pl}}{A} n_j \\ -m_1 + \frac{W_{pl}}{A} n_1 & \dots & -m_j + \frac{W_{pl}}{A} n_j \\ m_1 - \frac{W_{pl}}{A} n_1 & \dots & m_j - \frac{W_{pl}}{A} n_j \\ m_1 + \frac{W_{pl}}{A} n_1 & \dots & m_j + \frac{W_{pl}}{A} n_j \\ -m_1 - \frac{W_{pl}}{A} n_1 & \dots & -m_j - \frac{W_{pl}}{A} n_j \\ -m_1 + \frac{W_{pl}}{A} n_1 & \dots & -m_j + \frac{W_{pl}}{A} n_j \\ m_1 - \frac{W_{pl}}{A} n_1 & \dots & m_j - \frac{W_{pl}}{A} n_j \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\mathbf{X}_{jx1}^T = [x_1 \quad \dots \quad x_j] \quad (32)$$

$$\mathbf{B}_{8x1} = \begin{bmatrix} \sum_i m_i^P P_i + \frac{W_{pl}}{A} \sum_i n_i^P P_i \\ -\sum_i m_i^P P_i - \frac{W_{pl}}{A} \sum_i n_i^P P_i \\ -\sum_i m_i^P + \frac{W_{pl}}{A} \sum_i n_i^P P_i \\ \sum_i m_i^P P_i - \frac{W_{pl}}{A} \sum_i n_i^P P_i \\ \sum_i m_i^P P_i + \frac{W_{pl}}{A} \sum_i n_i^P P_i \\ -\sum_i m_i^P P_i - \frac{W_{pl}}{A} \sum_i n_i^P P_i \\ -\sum_i m_i^P P_i + \frac{W_{pl}}{A} \sum_i n_i^P P_i \\ \sum_i m_i^P P_i - \frac{W_{pl}}{A} \sum_i n_i^P P_i \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\sum_{j=1}^m m_{kj} x_{j\Theta} + \sum_i m_{ki}^P P_i + \frac{W_{pl}}{A} \left( - \sum_{j=1}^m n_{kj} x_{j\Theta} - \sum_i n_{ki}^P P_i \right) \leq \quad (29)$$

$$\leq W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} \left( 2,04 - 2,6 \cdot 10^{-3} \zeta \Theta_0 \right)$$

It is convenient to express the constraints (22) to (29), specified for the  $k$ -st/nd/rd/th location of the plastic hinge, in the form of the matrix:

$$\mathbf{A}_{8xj} \mathbf{X}_{jx1} + \mathbf{B}_{8x1} \leq \mathbf{C}_{8x1} \quad (30)$$

where:

$$\mathbf{A}_{8xj} = \begin{bmatrix} m_1 + \frac{W_{pl}}{A} n_1 & \dots & m_j + \frac{W_{pl}}{A} n_j \\ -m_1 - \frac{W_{pl}}{A} n_1 & \dots & -m_j - \frac{W_{pl}}{A} n_j \\ -m_1 + \frac{W_{pl}}{A} n_1 & \dots & -m_j + \frac{W_{pl}}{A} n_j \\ m_1 - \frac{W_{pl}}{A} n_1 & \dots & m_j - \frac{W_{pl}}{A} n_j \\ m_1 + \frac{W_{pl}}{A} n_1 & \dots & m_j + \frac{W_{pl}}{A} n_j \\ -m_1 - \frac{W_{pl}}{A} n_1 & \dots & -m_j - \frac{W_{pl}}{A} n_j \\ -m_1 + \frac{W_{pl}}{A} n_1 & \dots & -m_j + \frac{W_{pl}}{A} n_j \\ m_1 - \frac{W_{pl}}{A} n_1 & \dots & m_j - \frac{W_{pl}}{A} n_j \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\mathbf{X}_{jx1}^T = [x_1 \quad \dots \quad x_j] \quad (32)$$

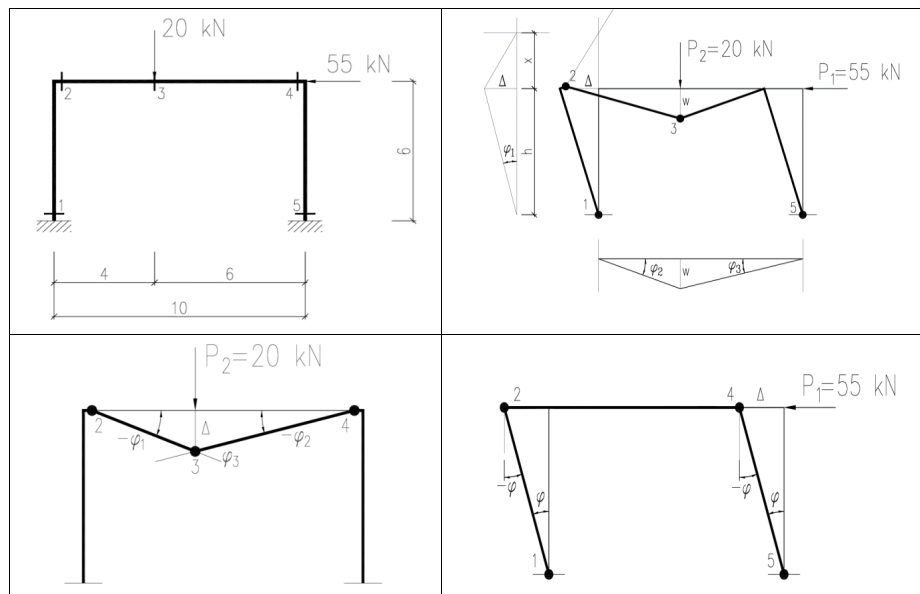
$$\mathbf{B}_{8x1} = \begin{bmatrix} \sum_i m_i^P P_i + \frac{W_{pl}}{A} \sum_i n_i^P P_i \\ -\sum_i m_i^P P_i - \frac{W_{pl}}{A} \sum_i n_i^P P_i \\ -\sum_i m_i^P + \frac{W_{pl}}{A} \sum_i n_i^P P_i \\ \sum_i m_i^P P_i - \frac{W_{pl}}{A} \sum_i n_i^P P_i \\ \sum_i m_i^P P_i + \frac{W_{pl}}{A} \sum_i n_i^P P_i \\ -\sum_i m_i^P P_i - \frac{W_{pl}}{A} \sum_i n_i^P P_i \\ -\sum_i m_i^P P_i + \frac{W_{pl}}{A} \sum_i n_i^P P_i \\ \sum_i m_i^P P_i - \frac{W_{pl}}{A} \sum_i n_i^P P_i \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$C_{8 \times 1} = \begin{bmatrix} W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} \\ W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} \\ W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} \\ W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} \\ W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} (2,04 - 2,6 \cdot 10^{-3} \zeta \Theta_0) \\ W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} (2,04 - 2,6 \cdot 10^{-3} \zeta \Theta_0) \\ W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} (2,04 - 2,6 \cdot 10^{-3} \zeta \Theta_0) \\ W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} (2,04 - 2,6 \cdot 10^{-3} \zeta \Theta_0) \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$C_{8 \times 1} = \begin{bmatrix} W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} \\ W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} \\ W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} \\ W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} \\ W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} (2,04 - 2,6 \cdot 10^{-3} \zeta \Theta_0) \\ W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} (2,04 - 2,6 \cdot 10^{-3} \zeta \Theta_0) \\ W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} (2,04 - 2,6 \cdot 10^{-3} \zeta \Theta_0) \\ W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M,fi}} (2,04 - 2,6 \cdot 10^{-3} \zeta \Theta_0) \end{bmatrix} \quad (34)$$

Zbiór ograniczeń stanowi zatem komplet 8 · K niezależnych nierówności, gdzie K jest liczbą lokalizacji przegubów plastycznych skojarzonych z wybranym do analizy mechanizmem ruchu. Należy zaznaczyć, że w sformułowaniu zadania pominięto stosunkowo mało znaczący wpływ interakcji M-V. Rozwiązaniem zadania programowania liniowego dla wybranego mechanizmu jest więc maksymalna wartość mnożnika  $\zeta$ , przy której spełnione są jeszcze zdefiniowane powyżej ograniczenia. Oczywiście, w celu oszacowania temperatury krytycznej miarodajnej dla całej ramy, należy najpierw wyznaczyć temperatury krytyczne odpowiadające każdemu spośród mechanizmów kinematycznie dopuszczalnych, a przez to możliwych do realizacji, a następnie porównać wszystkie

A set of constraints is, then, a set of 8 · K independent inequalities, where K is the number of plastic-hinge locations associated with the analysed movement mechanism. It is important to note that the problem has been formulated without taking into account the relatively negligible effect of the M-V interaction. Hence, the solution of the linear-programming problem for the selected mechanism is the maximum value of multiplier  $\zeta$ , which also satisfies the above-defined constraints. In order to estimate a critical temperature that is representative of the whole frame, the first thing to do is to determine the critical temperature values that correspond to each of the kinematically admissible, and thereby realisable, mechanisms, and then to compare all the resultant values, and select



Ryc. 4. Geometria, schemat statyczny i obciążenie zewnętrzne rozpatrywanej ramy (u góry z lewej) oraz potencjalnie możliwe mechanizmy jej plastycznego zniszczenia, w szczególności: mechanizm kombinowany generowany przez układ obu sił skupionych (u góry z prawej), mechanizm belkowy generowany jedynie przez siłę pionową (na dole z lewej) i mechanizm przechyłowy generowany jedynie przez siłę poziomą (na dole z prawej)

Fig. 4. Geometry, static scheme, external loads applied to the considered frame (top left) and potentially possible plastic failure mechanisms, in particular the combined mechanism generated by both the concentrated forces (top right), beam mechanism generated by the vertical force only (bottom left) and tilting mechanism generated by the horizontal force only (bottom right)

Źródło: Opracowanie własne.

Source: Own elaboration.

otrzymane wartości i wybrać najmniejszą. Będzie to równocześnie wskazanie mechanizmu miarodajnego do osiągnięcia stanu granicznego nośności ogniowej przy założeniu sztywno-plastycznego modelu zniszczenia ramy [11]. Trzeba przy tym przypomnieć, że proponowany algorytm obliczeniowy daje wiarygodne wyniki jedynie wtedy, gdy wynikowa temperatura krytyczna dla każdego rozpatrywanego mechanizmu ruchu jest niższa od wartości granicznej równej 785°C, co wynika bezpośrednio z formuły (10) i ryciny 2.

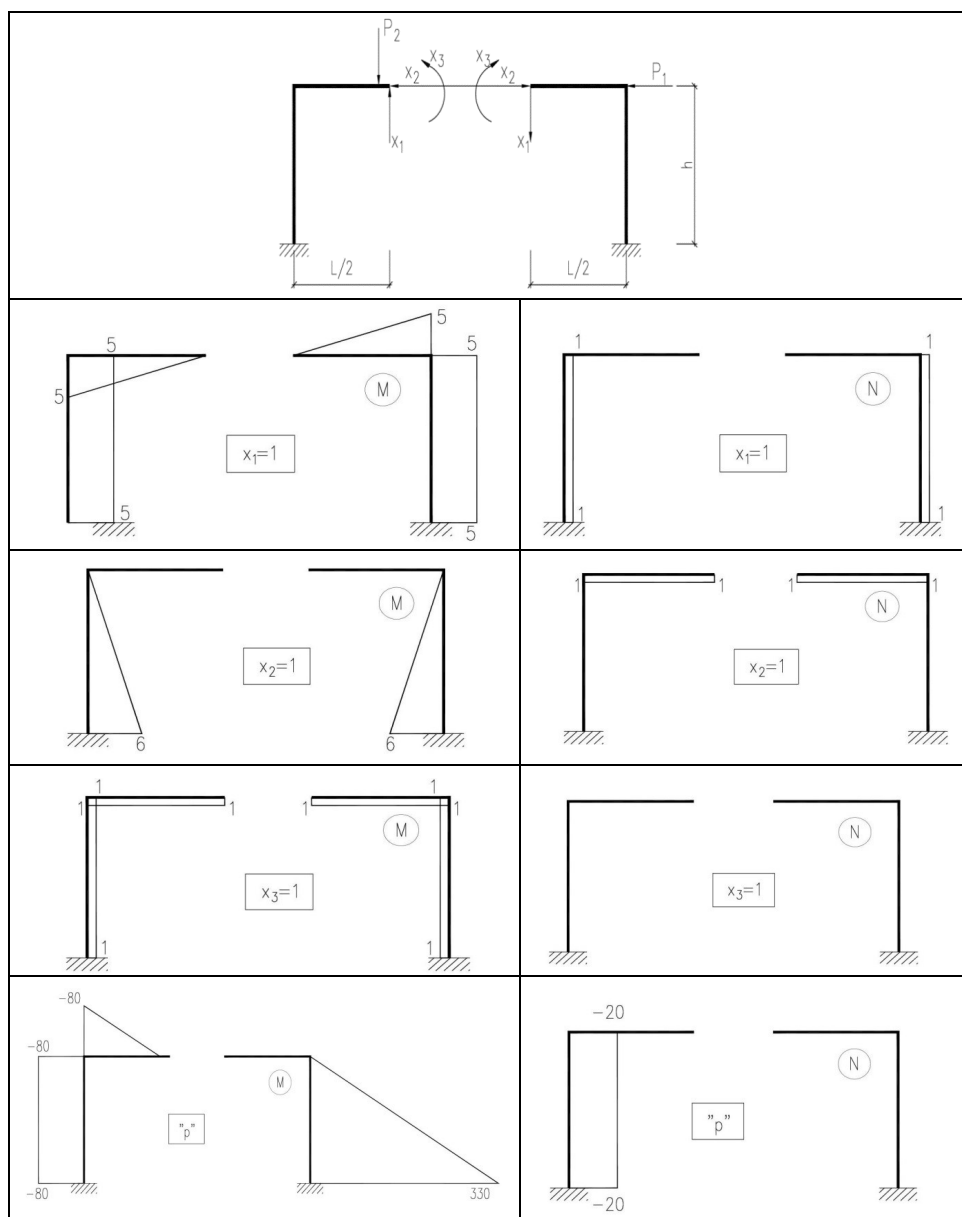
### 7. Przykład obliczeniowy

W celu ilustracji zasad stosowania proponowanego podejścia obliczeniowego rozważa się prostą ramę stalową o geometrii i schemacie statycznym pokazanych na ryc. 4. Zakłada się, że  $H = 6,0$  m i  $L = 10,0$ . Na przytoczonej rycinie zaznaczono również przyłożony do analizowanej ramy

the lowest one. This will, at the same time, indicate the mechanism that is representative of the fire resistance limit state being reached assuming the rigid-plastic model of the frame failure [11]. It is important here to recall that the proposed computational algorithm gives representative results only when the resultant critical temperature for each considered movement mechanism is lower than the limit value of 785°C, as directly inferable from the formula (10) and Figure 2.

### 7. Sample computation

To illustrate how the proposed computational approach is applied, a simple steel frame is considered with a geometry and static scheme as shown in Figure 4. It is assumed that  $H = 6,0$  m and  $L = 10,0$ . The Figure also shows the arrangement of external loads applied to the analysed frame, with the loads' being specified by two concentrated forces – the



Ryc. 5. Przyjęty do analizy zastępczy statycznie wyznaczalny schemat statyczny oraz wykresy momentów zginających (z lewej) i sił podłużnych (z prawej), pochodzących kolejno: od sił hiperstatycznych o wartości jednostkowej i od obciążenia zewnętrznego  
 Fig. 5. The substitute statically determinate static scheme assumed for the analysis and diagrams of bending moments (on the left) and longitudinal forces (on the right), due to unit hyperstatic forces and external loads, respectively

Źródło: Opracowanie własne.  
 Source: Own elaboration.

układ obciążeń zewnętrznych specyfikowany poprzez dwie skupione siły, odpowiednio poziomą o wartości  $P_1 = 55,0$  kN i pionową o wartości  $P_2 = 20,0$  kN. Pokazano także potencjalne przekroje krytyczne z lokalizacją oznaczoną kolejnymi cyframi arabskimi (od 1 do 5). W przekrojach tych (i tylko w tych) w czasie pożaru mogą aktywować się przeguby plastyczne. Zarówno słupy, jak i rygle ramy wykonano z dwuteownika *IPE 300*, dla którego plastyczna nośność przekroju określona dla warunków podstawowej sytuacji projektowej wynosi  $M_{pl} = 146,50$  kNm (przy czym:  $W_{pl} = 628$  mm<sup>3</sup>,  $A = 53,80$  mm<sup>2</sup> ( $W_{pl}/A = 0,012$ )). Łatwo wykazać, że rama bezpiecznie przetrze przyłożone obciążenia w podstawowej sytuacji projektowej (bez uwzględniania wpływu pożaru).

Celem niniejszego przykładu jest wyznaczenie mechanizmu krytycznego ze względu na oddziaływanie pożarowe oraz towarzyszącej temu mechanizmowi temperatury krytycznej badanej ramy. Zakłada się, że pożar w strefie pożarowej mieszczącej analizowaną ramę uległ wcześniejszemu rozgorzeniu, a więc osiągnął status pożaru rozwiniętego, co skutkuje wyrównaną i monotonicznie rosnącą temperaturą gazów spalinowych. Zadanie zostanie rozwiązane przy pomocy dwóch jakościowo różnych podejść obliczeniowych, co umożliwi weryfikację uzyskanych wyników.

Pierwszym z rozpatrywanych algorytmów jest ten, opisany w szczególności w niniejszej pracy, w którym zastosowano klasyczne reguły programowania liniowego. Na ryc. 5 zaprezentowano zastosowany w obliczeniach zastępczy schemat statyczny oraz sposób wyznaczania wartości sił hiperstatycznych. Przykładowo, dla mechanizmu belkowego (przeguby plastyczne indukowane w punktach 2, 3 i 4) otrzymano następujące ograniczenia:

- specyfikowane dla punktu 2:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 5 \cdot x_1 + 0 + 0 - 0.012 \cdot x_2 + x_3 + 0 \\ -5 \cdot x_1 - 0 - 0 + 0.012 \cdot x_2 - x_3 - 0 \\ -5 \cdot x_1 + 0 - 0 - 0.012 \cdot x_2 - x_3 + 0 \\ 5 \cdot x_1 - 0 + 0 + 0.012 \cdot x_2 + x_3 - 0 \\ 5 \cdot x_1 + 0 + 0 - 0.012 \cdot x_2 + x_3 + 0 \\ -5 \cdot x_1 - 0 - 0 + 0.012 \cdot x_2 - x_3 - 0 \\ -5 \cdot x_1 + 0 - 0 - 0.012 \cdot x_2 - x_3 + 0 \\ 5 \cdot x_1 - 0 + 0 + 0.012 \cdot x_2 + x_3 - 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \cdot x_1 - 0.012 \cdot x_2 + x_3 \\ -5 \cdot x_1 + 0.012 \cdot x_2 - x_3 \\ -5 \cdot x_1 - 0.012 \cdot x_2 - x_3 \\ 5 \cdot x_1 + 0.012 \cdot x_2 + x_3 \\ 5 \cdot x_1 - 0.012 \cdot x_2 + x_3 \\ -5 \cdot x_1 + 0.012 \cdot x_2 - x_3 \\ -5 \cdot x_1 - 0.012 \cdot x_2 - x_3 \\ 5 \cdot x_1 + 0.012 \cdot x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -80 \\ 80 \\ 80 \\ -80 \\ -80 \\ 80 \\ 80 \\ -80 \end{bmatrix}$$

horizontal force of  $P_1 = 55,0$  kN and the vertical force of  $P_2 = 20,0$  kN, respectively. It also shows critical cross-sections, with their locations marked with Arabic numerals (1 to 5). Plastic hinges can form in these (and only these) cross-sections during the fire. Both the beams and columns of this frame are made of the *IPE 300* I-beam, for which the cross-sectional plastic bending resistance, as defined for the persistent design situation conditions, is  $M_{pl} = 146,50$  kNm (with:  $W_{pl} = 628$  mm<sup>3</sup>,  $A = 53,80$  mm<sup>2</sup>, ( $W_{pl}/A = 0,012$ )). It is easy to demonstrate that the frame safely transfers the applied loads in the persistent design situation (without taking the fire into account).

This example is performed to define the mechanism that is critical due to the effect of fire and to evaluate the critical temperature of the analysed frame that accompanies this mechanism. It is assumed that the fire in the fire zone of which the analysed frame is part flashed over earlier, so it reached the status of a fully developed fire, thus resulting in an equal and monotonically rising exhaust-gas temperature. The problem will be solved using two qualitatively different computational approaches so that the results can be verified.

The first considered algorithm, described in detail by this article, is the one which uses the classical principles of linear programming. Figure 5 illustrates the substitute static diagram used in the computations and also shows how the hyperstatic forces are defined. For instance, the following constraints have been obtained for the beam mechanism (plastic hinges induced in points 2, 3 and 4):

- specified for point 2:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 5 \cdot x_1 + 0 + 0 - 0.012 \cdot x_2 + x_3 + 0 \\ -5 \cdot x_1 - 0 - 0 + 0.012 \cdot x_2 - x_3 - 0 \\ -5 \cdot x_1 + 0 - 0 - 0.012 \cdot x_2 - x_3 + 0 \\ 5 \cdot x_1 - 0 + 0 + 0.012 \cdot x_2 + x_3 - 0 \\ 5 \cdot x_1 + 0 + 0 - 0.012 \cdot x_2 + x_3 + 0 \\ -5 \cdot x_1 - 0 - 0 + 0.012 \cdot x_2 - x_3 - 0 \\ -5 \cdot x_1 + 0 - 0 - 0.012 \cdot x_2 - x_3 + 0 \\ 5 \cdot x_1 - 0 + 0 + 0.012 \cdot x_2 + x_3 - 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \cdot x_1 - 0.012 \cdot x_2 + x_3 \\ -5 \cdot x_1 + 0.012 \cdot x_2 - x_3 \\ -5 \cdot x_1 - 0.012 \cdot x_2 - x_3 \\ 5 \cdot x_1 + 0.012 \cdot x_2 + x_3 \\ 5 \cdot x_1 - 0.012 \cdot x_2 + x_3 \\ -5 \cdot x_1 + 0.012 \cdot x_2 - x_3 \\ -5 \cdot x_1 - 0.012 \cdot x_2 - x_3 \\ 5 \cdot x_1 + 0.012 \cdot x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -80 \\ 80 \\ 80 \\ -80 \\ -80 \\ 80 \\ 80 \\ -80 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_2 &= \begin{bmatrix} 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 147.58 \\ 147.58 \\ 147.58 \\ 147.58 \\ 301.063 - 0.384\theta \\ 301.063 - 0.384\theta \\ 301.063 - 0.384\theta \\ 301.063 - 0.384\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 147.58 \\ 147.58 \\ 147.58 \\ 147.58 \\ 301.063 - 0.384\theta \\ 301.063 - 0.384\theta \\ 301.063 - 0.384\theta \\ 301.063 - 0.384\theta \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

- specyfikowane dla punktu 3:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} x_1 + 0 + 0 - 0.012 \cdot x_2 + x_3 + 0 \\ -x_1 - 0 - 0 + 0.012 \cdot x_2 - x_3 - 0 \\ -x_1 + 0 - 0 - 0.012 \cdot x_2 - x_3 + 0 \\ x_1 - 0 + 0 + 0.012 \cdot x_2 + x_3 - 0 \\ x_1 + 0 + 0 - 0.012 \cdot x_2 + x_3 + 0 \\ -x_1 - 0 - 0 + 0.012 \cdot x_2 - x_3 - 0 \\ -x_1 + 0 - 0 - 0.012 \cdot x_2 - x_3 + 0 \\ x_1 - 0 + 0 + 0.012 \cdot x_2 + x_3 - 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} x_1 - 0.012 \cdot x_2 + x_3 \\ -x_1 + 0.012 \cdot x_2 - x_3 \\ -x_1 - 0.012 \cdot x_2 - x_3 \\ x_1 + 0.012 \cdot x_2 + x_3 \\ x_1 - 0.012 \cdot x_2 + x_3 \\ -x_1 + 0.012 \cdot x_2 - x_3 \\ -x_1 - 0.012 \cdot x_2 - x_3 \\ x_1 + 0.012 \cdot x_2 + x_3 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{B}_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

- specified for point 3:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} x_1 + 0 + 0 - 0.012 \cdot x_2 + x_3 + 0 \\ -x_1 - 0 - 0 + 0.012 \cdot x_2 - x_3 - 0 \\ -x_1 + 0 - 0 - 0.012 \cdot x_2 - x_3 + 0 \\ x_1 - 0 + 0 + 0.012 \cdot x_2 + x_3 - 0 \\ x_1 + 0 + 0 - 0.012 \cdot x_2 + x_3 + 0 \\ -x_1 - 0 - 0 + 0.012 \cdot x_2 - x_3 - 0 \\ -x_1 + 0 - 0 - 0.012 \cdot x_2 - x_3 + 0 \\ x_1 - 0 + 0 + 0.012 \cdot x_2 + x_3 - 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} x_1 - 0.012 \cdot x_2 + x_3 \\ -x_1 + 0.012 \cdot x_2 - x_3 \\ -x_1 - 0.012 \cdot x_2 - x_3 \\ x_1 + 0.012 \cdot x_2 + x_3 \\ x_1 - 0.012 \cdot x_2 + x_3 \\ -x_1 + 0.012 \cdot x_2 - x_3 \\ -x_1 - 0.012 \cdot x_2 - x_3 \\ x_1 + 0.012 \cdot x_2 + x_3 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{B}_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_3 &= \begin{bmatrix} 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 147.58 \\ 147.58 \\ 147.58 \\ 147.58 \\ 301.063 - 0.384\theta \\ 301.063 - 0.384\theta \\ 301.063 - 0.384\theta \\ 301.063 - 0.384\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 147.58 \\ 147.58 \\ 147.58 \\ 147.58 \\ 301.063 - 0.384\theta \\ 301.063 - 0.384\theta \\ 301.063 - 0.384\theta \\ 301.063 - 0.384\theta \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

- specyfikowane dla punktu 4:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_4 &= \begin{bmatrix} 0+0+0-0.012 \cdot x_2 + x_3 + 0 \\ 0-0-0+0.012 \cdot x_2 - x_3 - 0 \\ 0+0-0-0.012 \cdot x_2 - x_3 + 0 \\ 0-0+0+0.012 \cdot x_2 + x_3 - 0 \\ 0+0+0-0.012 \cdot x_2 + x_3 + 0 \\ 0-0-0+0.012 \cdot x_2 - x_3 - 0 \\ 0+0-0-0.012 \cdot x_2 - x_3 + 0 \\ 0-0+0+0.012 \cdot x_2 + x_3 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.012 \cdot x_2 + x_3 \\ 0.012 \cdot x_2 - x_3 \\ -0.012 \cdot x_2 - x_3 \\ 0.012 \cdot x_2 + x_3 \\ -0.012 \cdot x_2 + x_3 \\ 0.012 \cdot x_2 - x_3 \\ -0.012 \cdot x_2 - x_3 \\ 0.012 \cdot x_2 + x_3 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{B}_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

- specified for point 4:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_4 &= \begin{bmatrix} 0+0+0-0.012 \cdot x_2 + x_3 + 0 \\ 0-0-0+0.012 \cdot x_2 - x_3 - 0 \\ 0+0-0-0.012 \cdot x_2 - x_3 + 0 \\ 0-0+0+0.012 \cdot x_2 + x_3 - 0 \\ 0+0+0-0.012 \cdot x_2 + x_3 + 0 \\ 0-0-0+0.012 \cdot x_2 - x_3 - 0 \\ 0+0-0-0.012 \cdot x_2 - x_3 + 0 \\ 0-0+0+0.012 \cdot x_2 + x_3 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.012 \cdot x_2 + x_3 \\ 0.012 \cdot x_2 - x_3 \\ -0.012 \cdot x_2 - x_3 \\ 0.012 \cdot x_2 + x_3 \\ -0.012 \cdot x_2 + x_3 \\ 0.012 \cdot x_2 - x_3 \\ -0.012 \cdot x_2 - x_3 \\ 0.012 \cdot x_2 + x_3 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{B}_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_4 &= \begin{bmatrix} 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \end{bmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 147.58 \\ 147.58 \\ 147.58 \\ 147.58 \\ 301.063 - 0.384\theta \\ 301.063 - 0.384\theta \\ 301.063 - 0.384\theta \\ 301.063 - 0.384\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 147.58 \\ 147.58 \\ 147.58 \\ 147.58 \\ 301.063 - 0.384\theta \\ 301.063 - 0.384\theta \\ 301.063 - 0.384\theta \\ 301.063 - 0.384\theta \end{bmatrix}$$

Analiza mechanizmu przechyłowego (przeguby w punktach 1, 2, 4 i 5) daje odpowiednio:

- ograniczenia specyfikowane dla punktu 1

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 \cdot x_1 + 0.012 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 0 + x_3 + 0 \\ -5 \cdot x_1 - 0.012 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - 0 - x_3 - 0 \\ -5 \cdot x_1 + 0.012 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 + 0 - x_3 + 0 \\ 5 \cdot x_1 - 0.012 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 - 0 + x_3 - 0 \\ 5 \cdot x_1 + 0.012 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 0 + x_3 + 0 \\ -5 \cdot x_1 - 0.012 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - 0 - x_3 - 0 \\ -5 \cdot x_1 + 0.012 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 + 0 - x_3 + 0 \\ 5 \cdot x_1 - 0.012 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 - 0 + x_3 - 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5.012 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + x_3 \\ -5.012 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - x_3 \\ -4.988 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - x_3 \\ 4.988 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + x_3 \\ 5.012 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + x_3 \\ -5.012 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - x_3 \\ -4.988 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - x_3 \\ 4.988 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -80 - 0.012 \cdot 20 \\ 80 + 0.012 \cdot 20 \\ 80 - 0.012 \cdot 20 \\ -80 + 0.012 \cdot 20 \\ -80 - 0.012 \cdot 20 \\ 80 + 0.012 \cdot 20 \\ 80 - 0.012 \cdot 20 \\ -80 + 0.012 \cdot 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -80.24 \\ 80.24 \\ 79.76 \\ -79.76 \\ -80.24 \\ 80.24 \\ 79.76 \\ -79.76 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \end{bmatrix} =$$

An analysis of the tilting mechanism (hinges in points 1, 2, 4 and 5) yields (respectively):

- constraints specified for point 1:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 \cdot x_1 + 0.012 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 0 + x_3 + 0 \\ -5 \cdot x_1 - 0.012 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - 0 - x_3 - 0 \\ -5 \cdot x_1 + 0.012 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 + 0 - x_3 + 0 \\ 5 \cdot x_1 - 0.012 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 - 0 + x_3 - 0 \\ 5 \cdot x_1 + 0.012 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 0 + x_3 + 0 \\ -5 \cdot x_1 - 0.012 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - 0 - x_3 - 0 \\ -5 \cdot x_1 + 0.012 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 + 0 - x_3 + 0 \\ 5 \cdot x_1 - 0.012 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 - 0 + x_3 - 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5.012 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + x_3 \\ -5.012 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - x_3 \\ -4.988 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - x_3 \\ 4.988 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + x_3 \\ 5.012 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + x_3 \\ -5.012 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - x_3 \\ -4.988 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - x_3 \\ 4.988 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -80 - 0.012 \cdot 20 \\ 80 + 0.012 \cdot 20 \\ 80 - 0.012 \cdot 20 \\ -80 + 0.012 \cdot 20 \\ -80 - 0.012 \cdot 20 \\ 80 + 0.012 \cdot 20 \\ 80 - 0.012 \cdot 20 \\ -80 + 0.012 \cdot 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -80.24 \\ 80.24 \\ 79.76 \\ -79.76 \\ -80.24 \\ 80.24 \\ 79.76 \\ -79.76 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \\ 628 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^3 \cdot (2.04 - 2.6 \cdot 10^{-3} \theta) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 147.58 \\ 147.58 \\ 147.58 \\ 147.58 \\ 301.063 - 0.384\theta \\ 301.063 - 0.384\theta \\ 301.063 - 0.384\theta \\ 301.063 - 0.384\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 147.58 \\ 147.58 \\ 147.58 \\ 147.58 \\ 301.063 - 0.384\theta \\ 301.063 - 0.384\theta \\ 301.063 - 0.384\theta \\ 301.063 - 0.384\theta \end{bmatrix}$$

- ograniczenia specyfikowane dla punktów 2 i 4 są analogiczne jak przy mechanizmie belkowym,
- ograniczenia specyfikowane dla punktu 5:

- constrains specified for points 2 and 4 correspond to the beam-mechanism constraints;
- constrains specified for point 5:

$$\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} -5 \cdot x_1 - 0.012 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 0 + x_3 + 0 \\ 5 \cdot x_1 + 0.012 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - 0 - x_3 - 0 \\ 5 \cdot x_1 - 0.012 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 + 0 - x_3 + 0 \\ -5 \cdot x_1 + 0.012 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 - 0 + x_3 - 0 \\ -5 \cdot x_1 - 0.012 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 0 + x_3 + 0 \\ 5 \cdot x_1 + 0.012 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - 0 - x_3 - 0 \\ 5 \cdot x_1 - 0.012 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 + 0 - x_3 + 0 \\ -5 \cdot x_1 + 0.012 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 - 0 + x_3 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \cdot x_1 - 0.012 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 0 + x_3 + 0 \\ 5 \cdot x_1 + 0.012 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - 0 - x_3 - 0 \\ 5 \cdot x_1 - 0.012 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 + 0 - x_3 + 0 \\ -5 \cdot x_1 + 0.012 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 - 0 + x_3 - 0 \\ -5 \cdot x_1 - 0.012 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 0 + x_3 + 0 \\ 5 \cdot x_1 + 0.012 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - 0 - x_3 - 0 \\ 5 \cdot x_1 - 0.012 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 + 0 - x_3 + 0 \\ -5 \cdot x_1 + 0.012 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 - 0 + x_3 - 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -5.012 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + x_3 \\ 5.012 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - x_3 \\ 4.988 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - x_3 \\ -4.988 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + x_3 \\ -5.012 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + x_3 \\ 5.012 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - x_3 \\ 4.988 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - x_3 \\ -4.988 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.012 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + x_3 \\ 5.012 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - x_3 \\ 4.988 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - x_3 \\ -4.988 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + x_3 \\ -5.012 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + x_3 \\ 5.012 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - x_3 \\ 4.988 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - x_3 \\ -4.988 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} 330 \\ -330 \\ -330 \\ 330 \\ 330 \\ -330 \\ -330 \\ 330 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} 330 \\ -330 \\ -330 \\ 330 \\ 330 \\ -330 \\ -330 \\ 330 \end{bmatrix}$$

Kolejnym analizowanym sposobem plastycznego zniszczenia ramy był mechanizm kombinowany (przeguby w punktach 1, 2, 3 i 5). Ograniczenia odpowiadające poszczególnym punktom krytycznym są analogiczne do tych przytoczonych powyżej.

Rozwiązanie powyższych układów nierówności uzyskano dzięki wykorzystaniu środowiska obliczeniowego „Solver”, stanowiącego integralną część programu „Microsoft Excel”. Otrzymano następujące wyniki:

- dla mechanizmu belkowego – temperatura krytyczna na poziomie  $\theta_{a,cr} = 763^\circ\text{C}$ ,

Another analysed way in which the frame can fail is the combined mechanism (hinges in points 1, 2, 3 and 5). The constraints corresponding to individual critical points correspond to the constraints mentioned above.

The solution to these systems of equations has been provided by the “Solver” add-in program available in Microsoft Excel. This yielded the following results

- for the beam mechanism – a critical temperature of  $\theta_{a,cr} = 763^\circ\text{C}$ ,

- dla mechanizmu przechyłowego – temperatura krytyczna na poziomie  $\Theta_{a,cr} = 674^\circ\text{C}$ ,
- dla mechanizmu kombinowanego – temperatura krytyczna na poziomie  $\Theta_{a,cr} = 705^\circ\text{C}$ .

Powyższe wyniki pozwalają na wybór mechanizmu przechyłowego jako tego, który jest miarodajny dla rozpatrywanej ramy, a uzyskana dla niego wartość temperatury może być interpretowana jako poszukiwana temperatura krytyczna.

Oczywiście analogiczny wynik co do wyboru mechanizmu krytycznego można otrzymać znacznie szybciej, stosując klasyczne podejście kinematyczne. Należy jednak zauważyć, że uzyskane tą drogą oszacowania temperatury krytycznej będą ilościowo różne. Dostajemy bowiem (patrz ryc. 4):

- dla mechanizmu belkowego:

$$\varphi_1 = \frac{\Delta}{4} \Rightarrow \Delta = 4\varphi_1 \quad \varphi_2 = \frac{\Delta}{6} = \frac{4\varphi_1}{6}$$

$$\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{4\varphi_1}{6} = \frac{5}{3}\varphi_1$$

co daje:  $(-M_2\varphi_1 + M_3\varphi_3 - M_4\varphi_2)k_{y,\Theta} = P_2\Delta$   
 stąd:  $k_{y,\Theta} = 0.163 \Rightarrow \Theta = 756^\circ\text{C}$

- dla mechanizmu przechyłowego:

$$\varphi = \frac{\Delta}{6} \Rightarrow \Delta = 6\varphi$$

co daje:  $(M_1\varphi - M_2\varphi + M_4\varphi - M_5\varphi)k_{y,\Theta} = P_1\Delta$   
 stąd:  $k_{y,\Theta} = 0.559 \Rightarrow \Theta = 571^\circ\text{C}$

- dla mechanizmu kombinowanego:

$$\varphi_1 = \frac{\Delta}{h} \Rightarrow \Delta = 6\varphi_1 \quad \varphi_2 = \frac{\Delta}{x} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{3}{2}\varphi_1 \quad \varphi_3 = \frac{w}{0.6L} \Rightarrow \varphi_3 = \varphi_1 \quad \varphi_1 = \varphi$$

co daje:  $\left(M_1\varphi - \frac{5}{2}M_2\varphi + \frac{5}{2}M_3\varphi - M_5\varphi\right)k_{y,\Theta} = P_1\Delta + P_2w$   
 stąd:  $k_{y,\Theta} = 0.436 \Rightarrow \Theta = 614^\circ\text{C}$

## 8. Uwagi końcowe

Przedstawiony powyżej algorytm szacowania temperatury krytycznej ramy stalowej oparty na technice programowania liniowego łączy w sobie klasyczne podejścia statyczne i kinematyczne teorii nośności granicznej. Z jednej strony związana z podejściem kinematycznym analiza poszczególnych kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów ruchu sama w sobie prowadzi do oszacowań tej nośności na ogół lokowanych po stronie niebezpiecznej względem jej wartości rzeczywistej (czyli inaczej mówiąc zawyżonych). Oznacza to, że wyznaczona na podstawie tego typu procedury temperatura krytyczna ustroju nośnego, odpowiadająca takiej zawyżonej nośności, będzie wartością zaniżoną, którą trzeba traktować jedynie jako dolną akceptowalną granicę jej przybliżenia. Z drugiej strony bazujące na podejściu statycznym obliczenia uwzględniające rezerwę nośności ustroju wynikającą z redystrybucji momentów zginających dają w stosunku do szacowanej nośności granicznej rozwiązania co prawda interpretowane jako te, które są zawsze bezpieczne, ale za to często ilościowo niedoszacowane. A zatem, wyliczona na ich podstawie temperatura krytyczna badanej ramy powinna zostać potraktowana raczej jako graniczne górne oszacowanie poszukiwanej wartości. W prezentowanym algorytmie ograniczenia specyfikuje się z wykorzystaniem twierdzeń klasycznego podejścia statycznego. Z tego podejścia wynika również sama zasada maksymalizacji mnożnika  $\zeta$ . Wyboru temperatury miarodajnej dokonuje się jednak dopiero po porównaniu wszystkich rozwiązań, z których każde dotyczy innego, kinematycznie możliwego mechanizmu

- for the tilting mechanism – a critical temperature of  $\Theta_{a,cr} = 674^\circ\text{C}$ ,
- for the combined mechanism – a critical temperature of  $\Theta_{a,cr} = 705^\circ\text{C}$ .

Based on these results, the tilting mechanism can be chosen as being representative of the considered frame and the temperature value established for it can be interpreted as the critical temperature sought.

A corresponding result with regard to the choice of the critical mechanism can be arrived at much faster by using the classical kinematic approach. It is important to note, however, that the critical-temperature estimates so obtained will be qualitatively different. Accordingly, the result (see Figure 4)

- for the beam mechanism is:

$$\varphi_1 = \frac{\Delta}{4} \Rightarrow \Delta = 4\varphi_1 \quad \varphi_2 = \frac{\Delta}{6} = \frac{4\varphi_1}{6}$$

$$\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{4\varphi_1}{6} = \frac{5}{3}\varphi_1$$

resulting in:  $(-M_2\varphi_1 + M_3\varphi_3 - M_4\varphi_2)k_{y,\Theta} = P_2\Delta$   
 thus:  $k_{y,\Theta} = 0.163 \Rightarrow \Theta = 756^\circ\text{C}$

- for the tilting mechanism:

$$\varphi = \frac{\Delta}{6} \Rightarrow \Delta = 6\varphi$$

resulting in:  $(M_1\varphi - M_2\varphi + M_4\varphi - M_5\varphi)k_{y,\Theta} = P_1\Delta$   
 thus:  $k_{y,\Theta} = 0.559 \Rightarrow \Theta = 571^\circ\text{C}$

- for the combined mechanism:

$$\varphi_1 = \frac{\Delta}{h} \Rightarrow \Delta = 6\varphi_1 \quad \varphi_2 = \frac{\Delta}{x} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{3}{2}\varphi_1 \quad \varphi_3 = \frac{w}{0.6L} \Rightarrow \varphi_3 = \varphi_1 \quad \varphi_1 = \varphi$$

resulting in:  $\left(M_1\varphi - \frac{5}{2}M_2\varphi + \frac{5}{2}M_3\varphi - M_5\varphi\right)k_{y,\Theta} = P_1\Delta + P_2w$   
 thus:  $k_{y,\Theta} = 0.436 \Rightarrow \Theta = 614^\circ\text{C}$

## 8. Concluding remarks

The above-discussed linear-programming based algorithm for the estimation of the steel-frame critical temperature combines the classical static and kinematic approaches of the plastic limit load theory. On the one hand, the kinematic-approach related analysis of individual kinematically admissible movement mechanisms in and of itself leads to estimates of this load usually located on the dangerous side in relation to its actual value (in other words, it leads to overestimates). This means that the critical temperature of the load bearing structure defined through this procedure, corresponding to such an overestimated load, will be an underestimated value, which should be considered as the lower acceptable limit of its approximation. On the other hand, the static-approach based computations that factor in the reserve of load bearing capacity of the structure resulting from bending-moment redistribution provide solutions for the limit load to be estimated which, while interpreted as the ones that are always safe, are often quantitatively underestimated. By extension, the critical temperature of the analysed frame established on the basis of such computations should instead be considered as the upper limit estimate of the value sought. For the proposed algorithm, constraints are specified using the rules of the classical static approach. Consequent to this approach is also the principle of the maximisation of multiplier  $\zeta$ . A representative temperature is not selected, however, until all the solutions have been compared, with each solution relating to a different, kinematically possible movement mechanism.

ruchu. Wybór temperatury minimalnej spośród wszystkich wartości zgromadzonych w pierwszym etapie obliczeń stanowi formalne wykorzystanie twierdzeń podejścia kinematycznego.

Należy zauważyć, że obydwa podejścia przytoczone w przykładzie obliczeniowym wskazały jako miarodajny taki sam, czyli przechyłowy, mechanizm plastycznego zniszczenia ramy. Z zastosowania formalizmu programowania liniowego wynika jednak temperatura krytyczna oszacowana na poziomie  $\Theta_{a,cr} = 674^{\circ}\text{C}$ , z podejścia czysto kinematycznego natomiast temperatura znacznie niższa, czyli  $\Theta_{a,cr} = 571^{\circ}\text{C}$ . W świetle uwag przytoczonych powyżej pierwsze z tych oszacowań jest zdaniem autorów bardziej wiarygodne, drugie natomiast powinno zostać opatrzone ilościowym kwantyfikatorem „co najmniej”.

Rekomendowana w tym artykule procedura obliczeniowa jest jakościowo różna od analogicznej procedury bazującej na formalizmie programowania liniowego i zaproponowanej przez Králik i Vargę [12]. W pracy tych autorów w celu oszacowania odporności ogniowej ramy stalowej rozwiązuje się bowiem osobno zadania sformułowane dla podejścia statycznego i kinematycznego, a następnie określa przedział wartości, wewnątrz którego spodziewana jest lokalizacja faktycznej odporności rozpatrywanego ustroju. W algorytmie zaproponowanym w niniejszym artykule, prowadzącym do oszacowania dla badanej ramy jednoznacznie do niej odniesionej temperatury krytycznej, oba podejścia zostały włączone do jednej wspólnej procedury, co czyni ją w rozumieniu autorów łatwiejszą w zastosowaniu i czytelniejszą w interpretacji.

## Literatura / Literature

- [1] Maślak M., *Temperatura krytyczna konstrukcji stalowej*, „Ochrona Przeciwpożarowa” 2014, (48)2, 2-7.
- [2] Maślak M., Tkaczyk A., *Fire resistance of simple steel frame – kinematic approach to evaluation*, w: *Proceedings of the 6<sup>th</sup> European Conference on Steel and Composite Structures “Eurosteel 2011”*, L. Dunai, M. Iványi, K. Jármai, N. Kovács, L. Gergely Vigh (eds.), Budapest, Hungary, August 31 – September 2, 2011, Vol. B, 1497-1502.
- [3] Maślak M., Tkaczyk A., *Oszacowanie nośności granicznej ramy stalowej w pożarze rozwiniętym*, „Inżynieria i Budownictwo” 2012, 3, 160-163.
- [4] Maślak M., Tkaczyk A., *Critical temperature of pitched-roof steel frame. Semi-graphic approach to evaluation for fire conditions*, w: *Proceedings of the 7<sup>th</sup> European Conference on Steel and Composite Structures “Eurosteel 2014”*, R. Landolfo, F.M. Mazzolani (eds.), Napoli, September 10-12, 2014, 821-822, 6.
- [5] Maślak M., Tkaczyk A., *A semi-graphic approach to the fire resistance assessment of a gable steel frame*, „Czasopismo Techniczne” 2014, 6B, 67-82.
- [6] Grabowski W., *Programowanie matematyczne*, Państwowe Wydawnictwa Ekonomiczne, Warszawa 1982.
- [7] Maślak M., Pazdanowski M., Tkaczyk A., *Fire resistance evaluation of a sway frame load-bearing structure using the linear programming*, w: *Recent progress in steel and composite structures*, *Proceedings of the 13<sup>th</sup> International Conference on Metal Structures (ICMS 2016)*, M. Giżejowski, A. Kozłowski, J. Marcinowski, J. Ziółko (eds.), Zielona Góra, 15-17.06.2016, Taylor & Francis Group, abstract 138-139, paper CD 323-330.
- [8] Aribert J.M., Kruppa J., *Détermination par programmation linéaire de champs de températures critiques dans des structures soumises a un incendie*, „Construction Métallique” 1978, 1, 3-16.
- [9] PN-EN 1993-1-2. Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-2: Reguły ogólne – Obliczanie konstrukcji z uwagi na warunki pożarowe.
- [10] PN-EN 1991-1-2. Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje. Część 1-2: Oddziaływania ogólne – Oddziaływania na konstrukcje w warunkach pożaru.
- [11] Maślak M., Tkaczyk A., *Identyfikacja krytycznego kinematycznego mechanizmu zniszczenia plastycznego ogarniętej pożarem stalowej ramy portalowej*, „Inżynieria i Budownictwo”, 2015, 2, 103-107.
- [12] Králik J., Varga T., *Deterministic and probability analysis of fire resistance of a steel portal frame with tapered members*, w: *Safety and Reliability for Managing Risk, Proceedings of the 15<sup>th</sup> European Safety and Reliability Conference “ESREL 2006”*, C. Guedes Soares, E. Zio (eds.), Estoril, Portugal, September 18-22, 2006, CRC Press.

Artykuł został przetłumaczony ze środków MNiSW w ramach zadania:

Stworzenie anglojęzycznych wersji oryginalnych artykułów naukowych wydawanych w kwartalniku „BiTP. Bezpieczeństwo i Technika Pożarnicza - typ zadania: stworzenie anglojęzycznych wersji wydawanych publikacji finansowane w ramach umowy 935/P-DUN/2016 ze środków Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego przeznaczonych na działalność upowszechniającą naukę.



Ministerstwo Nauki  
i Szkolnictwa Wyższego

\* \* \*

**dr hab. inż. Mariusz Maślak, prof. PK** – profesor nadzwyczajny w Katedrze Konstrukcji Metalowych na Wydziale Inżynierii Lądowej Politechniki Krakowskiej. Zajmuje się kształtowaniem, utrzymaniem i weryfikacją stanu bezpieczeństwa różnego typu stalowych ustrojów nośnych ze szczególnym uwzględnieniem zachowania się tego typu konstrukcji w warunkach ekspozycji ogniowej. Członek International Association for Fire Safety Science (IAFSS). Z ramienia Polski członek Technical Committee 3 (TC3): “Fire Safety” przy European Convention for Constructional Steelwork (ECCS), a także członek Komitetu Technicznego CEN TC 250/SC3: „Evolution Group Eurocode 3, Part 1-2”. W latach 2010-2014 członek Komitetu Zarządzającego Międzynarodowego Projektu Badawczego COST TU0904 „Integrated Fire Engineering and Response”. Od roku 2014 członek Komitetu Zarządzającego Międzynarodowego Projektu Badawczego COST TU1402 „Quantifying the Value of Structural Health Monitoring”. Kierownik grantu badawczego własnego N N506 243938 „Miary bezpieczeństwa i ich wzajemne relacje w wyjątkowej sytuacji projektowej pożaru rozwiniętego” (również w latach 2010-2014).

**Maślak Mariusz, Ph.D., D.Sc.Eng, prof. CUT** – associate Professor at the Chair of Metal Structures of the Faculty of Civil Engineering, Cracow University of Technology. His focus areas are the development, maintenance and verification of the safety of various types of steel load bearing structures, including in particular the behaviour of such structures when exposed to fire. A member of the International Association for Fire Safety Science (IAFSS). A member of the Technical Committee 3 (TCS): “Fire Safety” of the European Convention for Constructional Steelwork (ECCS) representing Poland, and also a member of the Technical Committee CEN TC 250/SC3: “Evolution Group Eurocode 3, Part 1-2”. Between 2010 and 2014 he was a member of the Managing Committee of the International Research Project COST TU0904 “Integrated Fire Engineering and Response”. A member of the Managing Committee of the International Research Project COST TU1402 “Quantifying the Value of Structural Health Monitoring”. Manager of the project N N506 243938 funded by the Polish Ministry of Science and Higher Education called “Measures of safety and their interrelations in an accidental situation of a fully developed fire” (including between 2010 and 2014).

**mgr inż. Anna Tkaczyk** – uprawniony projektant budowlany. Absolwentka studiów doktoranckich prowadzonych w Politechnice Świętokrzyskiej. Prowadzi własne biuro budowlane Bauko S.C. Obecnie pracuje nad rozprawą doktorską *Nośność graniczna stalowych ustrojów ramowych w pożarze rozwiniętym – oszacowanie metodą kinematyczną*.

**Anna Tkaczyk, M.Sc.Eng.** – licensed construction designer. Graduated from a doctoral programme at the Kielce University of Technology. She runs her own construction studio Bauko S.C. Currently, she is working on her doctoral dissertation on *The plastic limit load of steel frame structures in a fully developed fire – a kinematic-method estimation*.