Janusz MROCZKA, Damian K. SZCZUCZYŃSKI
POLITECHNIKA WROCŁAWSKA, KATEDRA METROLOGII ELEKTRONICZNEJ I FOTONICZNEJ

Wpływ modelu rozproszenia światła na jakość rozwiązań zagadnienia odwrotnego w pomiarach nefelometrycznych

Prof. dr hab. inż. Janusz MROCZKA

Kierownik Katedry Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej Politechniki Wrocławskiej. Zajmuje się metodologią obserwacji i eksperymentu, algorytmizacją problemu odwrotnego, modelowaniem matematycznym pól fizycznych, analizą spektralną i polaryzacyjną promieniowania rozproszonego, reprezentacjami czasowo-częstotliwościowymi w przetwarzaniu danych.

e-mail: janusz.mroczka@pwr.wroc.pl

Mgr inż. Damian K. SZCZUCZYŃSKI

Doktorant w Katedrze Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej Politechniki Wrocławskiej. Jest absolwentem Wydziału Elektroniki tejże uczelni. Zainteresowania naukowe obejmują: problem odwrotny w pomiarach pośrednich i numeryczne algorytmy jego rozwiązywania oraz modelowanie fizyczno-matematyczne.

e-mail: damian.szczuczynski@pwr.wroc.pl

Streszczenie

W pracy przedstawiono rezultaty badań symulacyjnych wpływu stosowanego modelu matematycznego pomiarów nefelometrycznych na jakość rozwiązań zagadnienia odwrotnego polegającego na wyznaczaniu funkcji rozkładu wielkości cząstek fazy zdyspergowanej układu dyspersyjnego na podstawie wyników pomiarów nefelometrycznych. Analizie poddane zostały dwa modele matematyczne: model oparty na ogólnej teorii Mie rozpraszania światła na cząstce sferycznej oraz znacznie prostszy model bazujący na teorii dyfrakcji Fraunhofera stanowiącej przybliżenie teorii Mie dla pewnych szczególnych warunków. Uzyskane wyniki wykazały, że rozwiązania rozważanego zagadnienia odwrotnego otrzymywane z zastosowaniem modelu Fraunhofera charakteryzują się ogólnie mniejszym błędem oraz znacznie mniejszą podatnością na niekorzystne efekty złego postawienia problemu w porównaniu z rozwiązaniami uzyskanymi w oparciu o bardziej skomplikowany model Mie, o ile spełnione są warunki stosowalności teorii Fraunhofera.

Słowa kluczowe: nefelometria, rozpraszanie światła, teoria Mie, teoria dyfrakcji Fraunhofera, zagadnienie odwrotne

Influence of light scattering model on quality of solutions of the inverse problem in nephelometric measurements

Abstract

The work presents results of the simulation research on the influence of applied mathematical model of nephelometric measurements on the quality of solutions of the inverse problem consisting in determination of the particle size distribution of the dispersed phase of the dispersed system basing on results of nephelometric measurements. Two mathematical models were analyzed: the model based on the general Mie theory of light scattering by a spherical particle and the considerably simpler model based on the Fraunhofer diffraction theory which is an approximation of the Mie theory for certain particular conditions. Obtained results demonstrated that the solutions of considered inverse problem gained by application of the Fraunhofer model are characterized by generally smaller error and significantly smaller susceptibility to harmful effects of ill-posedness of the problem comparing to solutions gained basing on more complicated Mie model as long as the conditions of applicability of the Fraunhofer theory are fulfilled.

Keywords: nephelometry, light scattering, Mie theory, Fraunhofer diffraction theory, inverse problem

1. Wstęp

Nefelometria jest techniką pomiarową, w której wyznacza się zależność objętościowej funkcji rozpraszania światła w układzie dyspersyjnym od kąta rozpraszania – $\beta(\theta)$ [1, 2]. Wielkość ta opisuje kierunkowy rozkład intensywności rozpraszania światła w badanym układzie. Znajomość zależności $\beta(\theta)$ umożliwia określenie funkcji rozkładu wielkości cząstek fazy zdyspergowanej $f(a)$, gdzie a oznacza promień objętości cząstki, zdefiniowany jako promień kuli o objętości równej objętości cząstki. Wyznaczanie funkcji $f(a)$ opiera się na relacji matematycznej wiążącej mierzoną zależność $\beta(\theta)$ z szukaną funkcją $f(a)$. Związek ten stanowi model matematyczny pomiarów nefelometrycznych. Zadanie polegające na określeniu przebiegu funkcji $f(a)$ na podstawie wyników pomiarów nefelometrycznych $\beta(\theta)$ jest przykładem problemu odwrotnego w pomiarach pośrednich [1, 2]. W ogólnym przypadku zagadnienie to jest niezwykle skomplikowane z uwagi na bardzo dużą złożoność modelu matematycznego pomiarów. Jednakże przyjęcie odpowiednich założeń upraszczających dotyczących zjawiska rozpraszania światła w układzie dyspersyjnym umożliwia sformułowanie modeli matematycznych posiadających ogólną postać równania całkowego Fredholma pierwszego rodzaju. Pozwala to na zastosowanie do rozwiązania rozważanego problemu odwrotnego szeregu efektywnych technik opracowanych dla tej klasy zagadnień. Szczegółowa postać modelu matematycznego pomiarów nefelometrycznych zależna jest od przyjętego modelu rozpraszania światła na pojedynczej cząstce fazy zdyspergowanej. Istnieje wiele modeli tego typu różniących się dokładnością opisu zjawiska rozpraszania światła, wprowadzanymi w tym opisie uproszczeniami, a co za tym idzie, stopniem komplikacji i zakresem stosowalności. Celem badań symulacyjnych omawianych w niniejszej pracy było określenie wpływu modelu matematycznego pomiarów nefelometrycznych na jakość rozwiązań rozpatrywanego zagadnienia odwrotnego. Badania przeprowadzone zostały dla modelu opartego na teorii rozpraszania Mie oraz na teorii dyfrakcji Fraunhofera.

2. Model matematyczny pomiarów nefelometrycznych

W pracy przyjęto następujące założenia upraszczające [1, 2]:
– ośrodek dyspersyjny jest jednorodny i izotropowy,

- fazę zdyspergowaną tworzą jednorodne i izotropowe cząstki o kształcie kulistym,
- światło padające stanowi fala płaska, monochromatyczna i niespolaryzowana,
- w układzie dyspersyjnym zachodzi sprężyste, jednokrotne i niekoherentne rozpraszanie światła.

Uwzględnienie powyższych uproszczeń umożliwia sformułowanie ogólnego modelu matematycznego pomiarów nefelometrycznych w postaci następującego równania całkowego Fredholma pierwszego rodzaju [1]:

$$\beta(\theta)=\int_0^\infty N_v \frac{1}{k^2} S_{11}(a,\theta) f(a) da, \qquad (1)$$

gdzie: N_v – liczba cząstek fazy zdyspergowanej przypadająca na jednostkę objętości układu dyspersyjnego, $k=2\pi/\lambda$ – liczba falowa, przy czym λ – długość fali światła rozpraszanego, $S_{11}(a,\theta)$ – odpowiedni element macierzy Muellera.

Szczegółową postać modelu matematycznego pomiarów nefelometrycznych determinuje funkcja $S_{11}(a,\theta)$, która zależna jest od przyjętego modelu rozpraszania światła na pojedynczej cząstce fazy zdyspergowanej. W niniejszej pracy rozważane są dwa spośród wielu stosowanych modeli tego typu – model oparty na teorii rozpraszania Mie oraz model oparty na teorii dyfrakcji Fraunhofera.

2.1. Model oparty na teorii rozpraszania Mie

Teoria rozpraszania Mie stanowi ścisły opis zjawiska rozpraszania płaskiej i monochromatycznej fali świetlnej na pojedynczej jednorodnej i izotropowej cząstce kulistej umieszczonej w jednorodnym i izotropowym ośrodku [1, 2, 3].

Otrzymane na podstawie teorii Mie wyrażenie określające funkcję $S_{11}(a,\theta)$ występującą w modelu matematycznym pomiarów nefelometrycznych (1) ma bardzo skomplikowaną postać. W przypadku cząstek fazy zdyspergowanej o zespolonym współczynniku załamania $N_1=n_1+ik_1$ oraz ośrodka dyspersyjnego o zespolonym współczynniku załamania $N_2=n_2+ik_2$ element $S_{11}(a,\theta)$ macierzy Muellera określony jest następującymi wzorami [1, 3, 4]:

$$S_{11}(a,\theta,m)= \frac{1}{2}\left(\left|S_1(x,\theta,m)\right|^2+\left|S_2(x,\theta,m)\right|^2\right), \qquad (2)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} S_1(x,\theta,m)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}\left(a_n\pi_n+b_n\tau_n\right),\\ S_2(x,\theta,m)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}\left(a_n\tau_n+b_n\pi_n\right). \end{aligned} \qquad (3)$$

W powyższych równaniach m oznacza względny współczynnik załamania cząstki względem ośrodka zdefiniowany wzorem [1, 3, 4]:

$$m=\frac{N_1}{N_2}, \qquad (4)$$

natomiast x oznacza tzw. parametr wielkościowy (parametr Mie) określony związkiem [1, 3, 4]:

$$x=\frac{2\pi a N_2}{\lambda}. \qquad (5)$$

Równania (3) stanowią rozwinięcia funkcji $S_1(x,\theta,m)$ i $S_2(x,\theta,m)$ w nieskończone szeregi funkcji specjalnych π_n i τ_n zależnych wyłącznie od kąta rozpraszania θ zdefiniowanych następującymi wzorami [1, 3, 4]:

$$\begin{aligned} \pi_n(\cos\theta)&=\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta},\\ \tau_n(\cos\theta)&=\frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta}, \end{aligned} \qquad (6)$$

gdzie $P_n^1(\cos\theta)$ – stowarzyszona funkcja Legendre'a pierwszego rodzaju stopnia n pierwszego rzędu. Współczynnikami rozwinięć (3) są wielkości a_n i b_n zwane współczynnikami rozpraszania. Zależą one wyłącznie od parametrów x oraz m i określone są równaniami [1, 3, 4]:

$$\begin{aligned} a_n&=\frac{m\psi_n(mx)\psi_n'(x)-\psi_n(x)\psi_n'(mx)}{m\psi_n(mx)\xi_n'(x)-\xi_n(x)\psi_n'(mx)},\\ b_n&=\frac{\psi_n(mx)\psi_n'(x)-m\psi_n(x)\psi_n'(mx)}{\psi_n(mx)\xi_n'(x)-m\xi_n(x)\psi_n'(mx)}, \end{aligned} \qquad (7)$$

w których funkcje $\psi_n(\rho)$ i $\xi_n(\rho)$ oznaczają funkcje Riccatiego-Bessela.

W badaniach wartości funkcji $S_{11}(a,\theta)$ oraz wielkości pośrednich obliczane były w sposób numeryczny przy zastosowaniu procedury Bohrena i Huffmana [1, 3].

2.2. Model oparty na teorii dyfrakcji Fraunhofera

Teoria dyfrakcji Fraunhofera przedstawia przybliżony opis zjawiska rozpraszania płaskiej, monochromatycznej i niespolaryzowanej fali świetlnej na pojedynczej jednorodnej i izotropowej cząstce kulistej umieszczonej w jednorodnym i izotropowym ośrodku [1, 2, 3, 4]. Może być ona traktowana jako przybliżenie teorii Mie dla szczególnego przypadku cząstek rozpraszających charakteryzujących się [1, 4, 5]:

- rozmiarami znacznie większymi od długości fali światła rozpraszanego,
- całkowitym brakiem przezroczystości lub znikomą przezroczystością.

Wymienione postulaty w sposób formalny wyrazić można za pomocą warunków [1, 4]:

$$x \gg 1, \qquad |m-1| \gg 1. \qquad (8)$$

Otrzymane na podstawie teorii Fraunhofera wyrażenie określające funkcję $S_{11}(a,\theta)$ ma postać bardzo prostą w porównaniu z analogicznym wyrażeniem wyprowadzonym na podstawie teorii Mie [1]:

$$S_{11}(a,\theta)=\left|x\frac{(1+\cos\theta)}{2}\frac{J_1(x\sin\theta)}{\sin\theta}\right|^2, \qquad (9)$$

gdzie $J_1(\rho)$ – funkcja Bessela pierwszego rodzaju rzędu pierwszego.

3. Zagadnienie odwrotne

Wyznaczanie funkcji $f(a)$ na podstawie zależności $\beta(\theta)$ w oparciu o model matematyczny pomiarów nefelometrycznych stanowi przykład zagadnienia odwrotnego w pomiarach pośrednich. Można wykazać, że problem ten jest źle postawiony, przez co jego rozwiązanie wymaga stosowania specjalnych technik matematycznych zwanych algorytmami inwersyjnymi wykorzystujących wiedzę o postaci funkcji $f(a)$ posiadaną *a priori* [6].

W badaniach omawianych w niniejszej pracy stosowane były wyłącznie metody numeryczne. Techniki te poszukują rozwiązania zdyskretyzowanej postaci równania całkowego Fredholma pierwszego rodzaju uzyskiwanej przez zastosowanie całkowania numerycznego metodą prostokątów w skończonym przedziale $(a_{\min}, a_{\max})$ [1, 4, 6]:

$$\boldsymbol{\beta}=\mathbf{Kf}, \qquad (10)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta} &= [\beta(\theta_1)\ \ \beta(\theta_2)\ \ \cdots\ \ \beta(\theta_m)]^T,\\
\mathbf{f} &= [f(a_1)\ \ f(a_2)\ \ \cdots\ \ f(a_n)]^T,\\
(\mathbf{K})_{ij} &= N_v\frac{1}{k^2}S_{11}(a_j,\theta_i)\Delta a,\\
a_i &= (i-\tfrac{1}{2})\Delta a,\\
\Delta a &= \frac{a_{\max}-a_{\min}}{n}.
\end{aligned} \qquad (11)$$

Złe postawienie problemu odwrotnego przejawia się w tym przypadku słabym uwarunkowaniem numerycznym macierzy $\mathbf{K}$ [1, 6].

Do rozwiązywania rozważanego problemu odwrotnego sformułowanego w postaci dyskretnej za pomocą równania (10) zastosowane zostały następujące liniowe techniki inwersyjne [1, 6]:

- metoda Twomey'a-Phillipsa z minimalizacją pięciu różnych miar braku gładkości poszukiwanego rozwiązania: kwadratu normy euklidesowej wektora $\mathbf{f}$, sumy kwadratów kolejnych różnic pierwszego, drugiego i trzeciego rzędu wektora $\mathbf{f}$, kwadratu normy euklidesowej różnicy wektora rozwiązania $\mathbf{f}$ oraz wektora apriorycznie przyjętego rozwiązania próbnego $\mathbf{p}$,
- metoda filtrowanej dekompozycji SVD z dwoma różnymi schematami filtracji wartości osobliwych: z zerowaniem najmniejszych wartości osobliwych, z regularyzacją Tichonowa.

4. Badania symulacyjne

Badania przebiegały w dwóch etapach. Faza pierwsza obejmowała wygenerowanie danych pomiarowych w toku symulacji pomiarów nefelometrycznych realizowanej dla następujących warunków:

- ciągu wartości promienia cząstek opisanego wielkościami: $a_{\min}=0{,}1\mu\mathrm{m}$, $a_{\max}=1{,}0\mu\mathrm{m}$, $n=200$,
- ciągu wartości kąta rozpraszania opisanego wielkościami: $m=181$, $\theta_i=(i-1)\cdot 1^\circ$ dla $i=1,\ldots,m$,
- liczby cząstek fazy zdyspergowanej w jednostce objętości układu dyspersyjnego $N_v=10^{15}\,\mathrm{m}^{-3}$,
- długości fali $\lambda=0{,}6328\mu\mathrm{m}$,
- zespolonego współczynnika załamania cząstek fazy zdyspergowanej: $N_1=1{,}55+i0{,}0$,
- zespolonego współczynnika załamania ośrodka dyspersyjnego: $N_2=1{,}0+i0{,}0$,
- testowej funkcji rozkładu wielkości cząstek fazy zdyspergowanej danej wzorem:

$$\begin{aligned}
&f_{test}(a)=\\
&0{,}33 f_{norm}(a, 0{,}45\mu\mathrm{m}, 0{,}15\mu\mathrm{m})+\\
&+0{,}17 f_{norm}(a, 0{,}6\mu\mathrm{m}, 0{,}1\mu\mathrm{m})+\\
&+0{,}5 f_{lognorm}(a, 0{,}1, 0{,}5),
\end{aligned} \qquad (12)$$

gdzie $f_{norm}(a,\mu_{norm},\sigma_{norm})$ – funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego zmiennej a o wartości oczekiwanej μ_{norm} oraz odchyleniu standardowym σ_{norm}, $f_{lognorm}(a,\mu_{lognorm},\sigma_{lognorm})$ – funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu lognormalnego zmiennej a o parametrach $\mu_{lognorm}$ oraz $\sigma_{lognorm}$. Dyskretną reprezentację funkcji $f_{test}(a)$ stanowił wektor $\mathbf{f}_{test}$.

Symulacje prowadzone były na podstawie dwóch badanych modeli matematycznych pomiarów nefelometrycznych:

- modelu opartego na teorii rozpraszania Mie,
- modelu opartego na teorii dyfrakcji Fraunhofera.

Uzyskane w wyniku symulacji wektory danych pomiarowych $\boldsymbol{\beta}$ poddawano następnie zakłóceniu przez sztucznie generowany addytywny stacjonarny i nieskorelowany szum gaussowski reprezentowany przez wektor $\boldsymbol{\varepsilon}$, którego elementy stanowią nieskorelowane zmienne losowe o rozkładzie normalnym z zerową wartością oczekiwaną i jednakowym odchyleniem standardowym $\sigma_\varepsilon=1\%\cdot\max(\boldsymbol{\beta})$.

Ostateczny rezultat przeprowadzonych symulacji pomiarów nefelometrycznych stanowiły cztery wektory symulowanych danych pomiarowych $\boldsymbol{\beta}$ odpowiadające funkcji rozkładu $f_{test}(a)$: nie zakłócony szumem wektor uzyskany na podstawie modelu Mie oraz ten sam wektor poddany zakłóceniu szumem i nie zakłócony szumem wektor uzyskany na podstawie modelu Fraunhofera oraz ten sam wektor poddany zakłóceniu szumem.

Druga faza badań obejmowała rozwiązywanie rozważanego zagadnienia odwrotnego – wyznaczanie z zastosowaniem każdej z wymienionych wcześniej technik inwersyjnych wektora $\mathbf{f}_{rekons}$ stanowiącego dyskretną reprezentację rekonstruowanej funkcji rozkładu $f_{rekons}(a)$ na podstawie każdego z czterech wektorów wyników symulowanych pomiarów nefelometrycznych $\boldsymbol{\beta}$ otrzymanych w pierwszym etapie badań. W procesie odwrotnym dla każdego wektora $\boldsymbol{\beta}$ stosowany był ten sam model matematyczny pomiarów nefelometrycznych, co używany przy generacji tego wektora w ramach symulacji. Uzyskiwany wektor $\mathbf{f}_{rekons}$ reprezentował wartości funkcji $f_{rekons}(a)$ w dokładnie tych samych punktach, w których wektor $\mathbf{f}_{test}$ reprezentował wartości funkcji $f_{test}(a)$.

Za miarę dokładności rozwiązania problemu odwrotnego przyjęto wielkość [1]:

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(f_{rekons,i} - f_{test,i}\right)^2} . \qquad (13)$$

Tab. 1. Zestawienie wartości parametru Δ charakteryzującego dokładność rozwiązań zagadnienia odwrotnego otrzymanych w oparciu o dwa badane modele matematyczne dla wyników symulowanych pomiarów nefelometrycznych obciążonych różnym błędem względnym przy zastosowaniu omówionych procedur inwersyjnych

Tab. 2. Comparison of the values of the Δ parameter characterizing the accuracy of the solutions of the inverse problem obtained on the basis of two mathematical models under studies for the results of simulated nephelometric measurements affected by various relative errors using discussed inverse procedures

Model mat., błąd wzgl.[1] / Procedura inwersyjna	Mie, $p = 0\%$	Mie, $p = 1\%$	Fraunhofer, $p = 0\%$	Fraunhofer, $p = 1\%$
Twom.-Phill., norm.	0,068938	0,34742	0,011602	0,11868
Twom.-Phill., I rz.	0,074651	0,18218	0,065687	0,14748
Twom.-Phill., II rz.	0,010262	0,13346	0,021501	0,15706
Twom.-Phill., III rz.	0,00043019	0,20925	0,0096068	0,21619
Twom.-Phill., aprior.[2]	0,065849	0,33624	0,0028791	0,11492
SVD, zerow.	0,046616	0,33921	0,0050756	0,10086
SVD, Tichon.	0,046542	0,34742	0,0052155	0,11313
średnia	0,044755	0,27074	0,017367	0,138331

[1] Błąd względny p danych pomiarowych $\boldsymbol{\beta}$ zdefiniowany jest jako wielkość: $p = (\sigma_\varepsilon / \max(\boldsymbol{\beta}))\cdot 100\%$.

[2] Jako aprioryczny początkowy rozkład wielkości cząstek przyjęto funkcję stałą $f(a) = 1\mu\mathrm{m}^{-1}\mathrm{m}^{-3}$ reprezentowaną przez n-elementowy wektor $\mathbf{p} = [1 \;\; 1 \;\; \cdots \;\; 1]^T \mu\mathrm{m}^{-1}\mathrm{m}^{-3}$.

5. Wyniki badań symulacyjnych

Wyniki badań symulacyjnych prezentuje tab. 1. Z danych zestawionych w tabeli wynika, że funkcje rozkładu $f_{rekons}(a)$ odtworzone w oparciu o model Fraunhofera charakteryzują się ogólnie mniejszym odchyleniem mierzonym wartością Δ od rzeczywistej – testowej funkcji rozkładu $f_{test}(a)$ w porównaniu z funkcjami odtworzonymi w oparciu o model Mie. Potwierdzeniem tego uogólnienia są wartości Δ uśrednione dla poszczególnych stosowanych technik inwersyjnych. Średni błąd Δ rekonstrukcji funkcji $f(a)$ na podstawie danych niedotkniętych wpływem zakłóceń w przypadku zastosowania modelu Fraunhofera jest ponad 2,5 razy mniejszy niż w przypadku zastosowania modelu Mie. Dla danych poddanych działaniu zakłóceń średni błąd rekonstrukcji przeprowadzanej w oparciu o model Fraunhofera jest blisko 2 razy mniejszy od błędu charakteryzującego rekonstrukcję przy wykorzystaniu modelu Mie.

6. Podsumowanie i wnioski

W referacie przedstawione zostały rezultaty badań symulacyjnych wpływu stosowanego modelu matematycznego pomiarów nefelometrycznych na jakość rozwiązań zagadnienia odwrotnego polegającego na odtwarzaniu funkcji rozkładu wielkości cząstek fazy zdyspergowanej układu dyspersyjnego na podstawie wyników pomiarów nefelometrycznych. Przedmiotem rozważań były dwa modele matematyczne: model ścisły oparty na ogólnej teorii Mie rozpraszania światła na cząstce sferycznej oraz model przybliżony bazujący na teorii dyfrakcji Fraunhofera. Uzyskane wyniki wykazały, że rozwiązania rozważanego zagadnienia odwrotnego – wyniki rekonstrukcji funkcji rozkładu otrzymywane z zastosowaniem modelu Fraunhofera charakteryzują się ogólnie mniejszym błędem wskazującym na znacznie mniejszą podatność na niekorzystne efekty złego postawienia problemu w porównaniu z rozwiązaniami uzyskanymi w oparciu o bardziej skomplikowany model Mie, o ile spełnione są warunki stosowalności teorii Fraunhofera.

Otrzymane rezultaty uzasadniają stosowanie modelu Fraunhofera, który ze względu na prostotę oraz brak zależności od współczynników załamania jest bardziej pożądany z metrologicznego punktu widzenia [1, 2].

7. Literatura

[1] Szczuczyński D. K.: Problem odwrotny w analizie wielkości cząstek układów dyspersyjnych z wykorzystaniem światła rozproszonego. Praca dyplomowa magisterska. Politechnika Wrocławska, Wydział Elektroniki. Wrocław 2006.

[2] Mroczka J.: Metrologiczne problemy wykorzystywania światła rozproszonego do badań rozkładu wielkości cząstek w roztworach dyspersyjnych. Warszawa 1990.

[3] Bohren C. F., Huffman D. R.: Absorption and scattering of light by small particles. Wiley-Interscience, New York 1983.

[4] Jones A. R.: Light scattering for particle characterization. Progr. Energy Combust. Sci., 25 (1992), pp. 1-53.

[5] Xu R.: Particle characterization: Light scattering methods. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London 2000.

[6] Kandlikar M., Ramachandran G.: Inverse Methods for Analysing Aerosol Spectrometer Measurements: A Critical Review. J. Aerosol Sci., 1999, Vol. 30, No. 4, pp. 413-437.

Artykuł recenzowany