

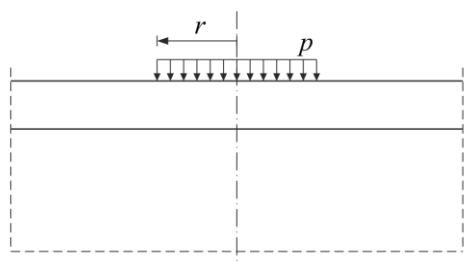
ANALIZA PORÓWNAWCZA STATYKI UKŁADU WARSTWA-PÓŁPRZESTRZEŃ ZA POMOCĄ METOD ANALITYCZNYCH I MES

Streszczenie

W artykule przedstawiono różne sposoby modelowania układu składającego się z warstwy sprężystej spoczywającej na półprzestrzeni sprężystej, zakładając dwa rodzaje kontaktu pomiędzy tymi elementami – idealne połączenie oraz swobodny kontakt (brak połączenia). Do wyznaczania stanu przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia przy obciążeniu statycznym zastosowano metody analityczne i numeryczne (MES). Zwrócono uwagę na wpływ braku połączenia w układzie.

WSTĘP

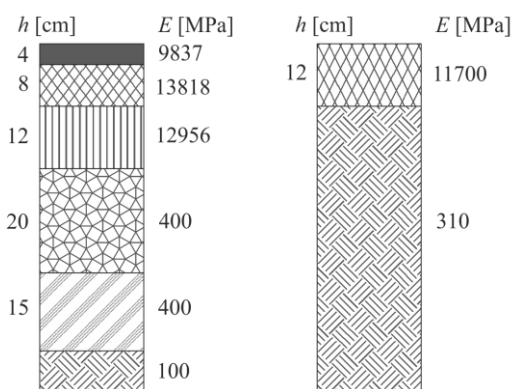
Celem pracy jest weryfikacja różnych dostępnych metod (w powszechnie dostępnych programach obliczeń inżynierskich) rozwiązania zagadnienia statyki nieskończonej w kierunkach poziomych warstwy sprężystej swobodnie spoczywającej na półprzestrzeni sprężystej pod stałym obciążeniem rozłożonym na powierzchni kołowej (rysunek 1). Zagadnienie to jest istotne między innymi dla projektantów nawierzchni drogowych, przy uwzględnianiu w projektowaniu możliwości braku połączenia pomiędzy warstwami asfaltowymi w konstrukcji nawierzchni.



Rys. 1. Rozpatrywany układ warstwa-półprzestrzeń.

1. ZAŁOŻENIA I DANE

Rozważmy układ składający się z liniowo-sprężystej warstwy i liniowo-sprężystej półprzestrzeni jako uproszczony model układu warstw konstrukcji nawierzchni drogowej KR5. Obydwa układy wraz z parametrami geometrycznymi i materiałowymi przedstawiono na rysunku 2.



Rys. 2. Układ warstw konstrukcji nawierzchni drogowej KR5 i konstrukcji zastępczej.

Takie znaczące uproszczenie przyjęto, aby możliwe było uzyskanie rozwiązania analitycznego rozważanego zagadnienia. Górną warstwę wydzielono jedynie z warstwy ścieralnej i wiążącej, gdyż utrata szczepności jest najbardziej niekorzystna dla konstrukcji nawierzchni, jeśli występuje pomiędzy warstwą wiążącą i podbudową asfaltową (zgodnie z [7]). Grubość górnej warstwy zastępczej jest równa sumie grubości warstwy ścieralnej i wiążącej konstrukcji KR5 ($h = h_1 + h_2 = 4 \text{ cm} + 8 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$), natomiast moduł sprężystości wyznaczono z przyrównania sztywności na zginanie połączonych warstw ścieralnej i wiążącej [5], wg wzorów:

$$E = \frac{E_1 [(h_1 + h_0)^3 - h_0^3] + E_2 [(h_2 - h_0)^3 + h_0^3]}{(h_1 + h_2)^3} \quad (1)$$

gdzie:

$$h_0 = \frac{1}{2} \frac{E_2 h_2^2 - E_1 h_1^2}{E_2 h_2 + E_1 h_1} \quad (2)$$

Moduł sprężystości półprzestrzeni zastępczej przyjęto o takiej wartości, aby ugięcia konstrukcji podstawowej i uproszczonej warstw były sobie równe. Współczynnik Poissona przyjęto jednako-wo dla warstwy i półprzestrzeni, równy $\nu = 0,3$.

Dla opisanego układu warstwa-półprzestrzeń przeprowadzono analizę statyczną przy obciążeniu ciśnieniem równomiernie rozłożonym na powierzchni kołowej, o wypadkowej $P = 50 \text{ kN}$ (połowa obliczeniowego obciążenia osi równego 100 kN) i intensywności $p = 850 \text{ kPa}$ (promień obciążenia $r = \sqrt{(P/\pi p)} = 0,1368 \text{ m}$) za pomocą trzech różnych metod:

- metodą analityczną, z wykorzystaniem transformacji całkowych, opisaną w pracy [3]
- metodą analityczną zastosowaną w programie BISSAR [2]
- metodą numeryczną MES przy wykorzystaniu programu ABAQUS [1],

zakładając idealne połączenie albo brak połączenia warstwy i półprzestrzeni.

Porównano stan przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia, a w szczególności zwrócono uwagę na następujące wielkości:

1. u_z – maksymalne ugięcie na powierzchni górnej układu,
2. u_{x1} – przemieszczenie poziome na spodzie warstwy w odległości 30 cm od osi symetrii,
3. u_{x2} – przemieszczenie poziome na górnej powierzchni półprzestrzeni w odległości 30 cm od osi symetrii,
4. Δu_x – wzajemne przemieszczenie na styku warstwa-półprzestrzeń w odległości 30 cm od osi symetrii.

5. σ_{xx1} – maksymalne naprężenie w kierunku poziomym na spodzie warstwy,
6. ε_{xx1} – maksymalne odkształcenie w kierunku poziomym na spodzie warstwy,
7. ε_{xx2} – maksymalne odkształcenie w kierunku poziomym na górnej powierzchni półprzestrzeni,
8. ε_{zz2} – maksymalne odkształcenie w kierunku pionowym na górnej powierzchni półprzestrzeni.

Wielkości te wybrano ze względu na zasadnicze znaczenie w projektowaniu nawierzchni drogowych (szczególnie odkształcenia) oraz aby uwidocznili wpływ braku połączenia w układzie. Przemieszczenie poziome odczytywano w odległości 30 cm od osi symetrii zadania, gdyż jest to przewidywane miejsce występowania wartości maksymalnej tego przemieszczenia.

2. OBLICZENIA I WYNIKI

2.1. Opis metod

Dzięki uprzejmości jednego z autorów pracy [3] wyznaczono stan przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w układzie za pomocą metod analitycznych opisanych w tej pracy.

W modelu skończenie elementowym układu uwzględniono ośiową symetrię zadania. Wielkość modelowanego obszaru, warunki brzegowe oraz rodzaj i podział na elementy skończone przyjęto według wcześniejszych doświadczeń [6]. Przy braku połączenia warstwy i półprzestrzeni zamodelowano kontakt w kierunku normalnym „surface to surface” [1].

W programie BISAR [2] za połączenie warstw odpowiedzialny jest współczynnik „AK” (standard shear spring compliance), charakteryzujący nieskończenie ciekłą warstwę szepiającą. Przyjęto, że wzajemne przemieszczenie poziome na styku warstw jest proporcjonalne do naprężenia stycznego i współczynnika AK, który definiujemy. Zamiennie można zdefiniować współczynnik „ALK” (reduced shear spring compliance); zależność pomiędzy tymi współczynnikami jest następująca:

$$AK = ALK \frac{1 + \nu}{E} \quad (3)$$

W podręczniku programu [2] podano, że przyjęcie współczynnika $ALK=100r$ (r - promień obciążenia), jest bliskie pełnemu braku połączenia pomiędzy warstwami, jednak zawsze zalecane jest przeprowadzenie stosownej analizy.

2.2. Idealne połączenie

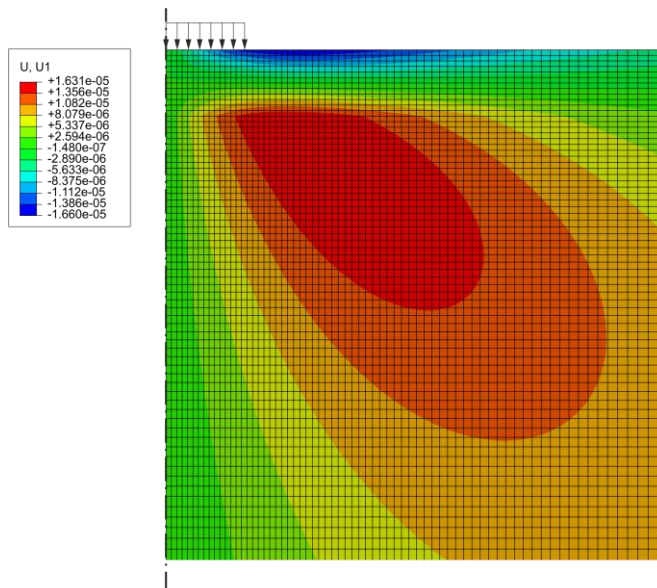
Przy założeniu idealnego połączenia warstwy i półprzestrzeni wyniki uzyskane za pomocą wszystkich metod (stan przemieszczenia, naprężenia i odkształcenia) były niemal identyczne. Świadczy to o przyjęciu poprawnych parametrów modeli. Otrzymane wyniki wraz z procentowymi różnicami w stosunku do rozwiązania analitycznego zamieszczono w tabelach 1 i 2. Ponadto wykres warstwowy przemieszczenia poziomego w układzie pokazano na rysunku 3.

Tab. 1. Wartości wybranych składowych przemieszczenia przy idealnym połączeniu warstwy i półprzestrzeni

Lp.	Metoda / program	u_z [mm]	u_{x1} [mm]	u_{z2} [mm]	Δu_x [mm]
1.	analitycznie	0,2217	0,01483	0,01483	0,0
	różnica [%]	-	-	-	-
2.	BISAR	0,2217	0,01483	0,01483	0,0
	różnica [%]	0,0	0,0	0,0	0,0
4.	ABAQUS	0,2217	0,01490	0,01490	0,0
	różnica [%]	0,0	0,5	0,5	0,0

Tab. 2. Wartości wybranych składowych odkształcenia i naprężenia przy idealnym połączeniu warstwy i półprzestrzeni

Lp.	Metoda / program	σ_{xx1} [MPa]	ε_{xx1} [10^{-6}]	ε_{xx2} [10^{-6}]	ε_{zz2} [10^{-6}]
1.	analitycznie	2,121	131,1	131,1	-504,2
	różnica [%]	-	-	-	-
2.	BISAR	2,120	131,0	131,0	-504,1
	różnica [%]	0,0	0,1	0,1	0,0
4.	ABAQUS	2,124	131,3	131,3	-504,4
	różnica [%]	0,1	0,2	0,2	0,0



Rys. 3. Przemieszczenie w kierunku poziomym u_x w układzie warstwa-półprzestrzeń przy pełnym połączeniu.

2.3. Brak połączenia

W tablicach 3 i 4 zamieszczono wyniki uzyskane za pomocą trzech metod przy braku połączenia w układzie warstwa-półprzestrzeń. W programie BISAR przyjęto dwa różne wartości współczynnika ALK. Na rysunku 4 przedstawiono wykres warstwowy przemieszczenia poziomego w układzie.

Tab. 3. Wartości wybranych składowych stanu przemieszczenia przy swobodnym kontakcie warstwy i półprzestrzeni

Lp.	Metoda / program	u_z [mm]	u_{x1} [mm]	u_{z2} [mm]	Δu_x [mm]
1.	analitycznie	0,2499	0,01852	-0,02239	0,04091
	różnica [%]	-	-	-	-
2.	BISAR*	0,2328	0,0166	-0,00338	0,0199
	różnica [%]	6,8	10,6	84,9	51,3
3.	BISAR**	0,2498	0,01851	-0,02229	0,04080
	różnica [%]	0,0	0,1	0,4	0,3
4.	ABAQUS	0,2505	0,01890	-0,02245	0,04135
	różnica [%]	0,2	2,1	0,3	1,1

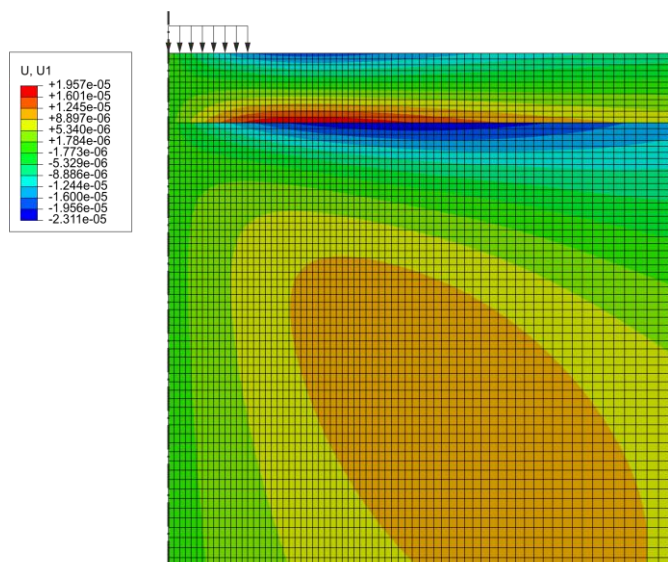
*) wyniki uzyskane przy współczynniku $ALK=100r$

**) wyniki uzyskane przy współczynniku $ALK=500000r$

Tab. 4. Kluczowe wartości składowych stanu odkształcenia i naprężenia układu przy swobodnym kontakcie warstwy i półprzestrzeni

Lp.	Metoda / program	σ_{xx1} [MPa]	ε_{xx1} [10^{-6}]	ε_{xx2} [10^{-6}]	ε_{zz2} [10^{-6}]
1.	analitycznie	2,475	152,0	-128,6	-257,2
	różnica [%]	-	-	-	-
2.	BISAR*	2,3190	142,70	-26,4	-350,3
	różnica [%]	6,3	6,1	79,5	36,2
3.	BISAR**	2,4700	151,9	-128,1	-257,6
	różnica [%]	0,2	0,1	0,4	0,2
4.	ABAQUS	2,490	152,9	-127,8	-260,5
	różnica [%]	0,6	0,6	0,6	1,3

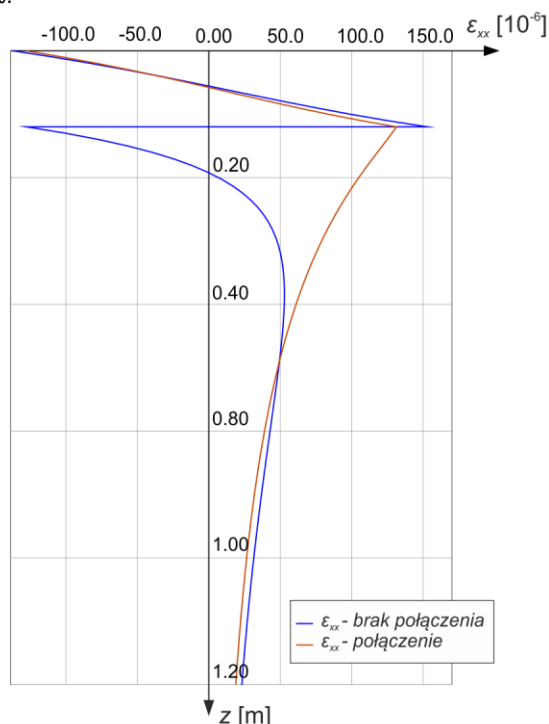
*) **) jak wyżej



Rys. 4. Przemieszczenie w kierunku poziomym u_x w układzie warstwa-półprzestrzeń przy swobodnym kontakcie.

3. WNIOSKI

Utrata połączenia ma bardzo duży wpływ na charakter deformacji układu. Na rysunku 5 przedstawiono wykresy odkształcenia poziomego ϵ_{xx} wzdłuż osi symetrii przy pełnym połączeniu i przy swobodnym kontakcie warstwy z półprzestrzenią. Maksymalne odkształcenie poziome na spodzie (bardzo ważne w nawierzchniach drogowych podatnych) wzrosło przy utracie połączenia o 16%.



Rys. 5. Wykres składowej odkształcenia w kierunku poziomym ϵ_{xx} po grubości układu (z – współrzędna wzdłuż osi symetrii).

Przedstawione wyniki świadczą o poprawnym odwzorowaniu zachowania się układu zarówno przy warunkach idealnego połączenia, jak i przy braku połączenia pomiędzy warstwą a półprzestrzenią. Zamodelowanie swobodnego kontaktu jest znacznie bardziej kłopotliwe niż idealnego połączenia. W programie BISAR uzyskano zadowalającą zgodność z rozwiązaniem analitycznym

dopiero po głębszej analizie. W rozwiązaniu metodą elementów skończonych niepokojącą może wydawać się różnica na poziomie 2,1%, która dotyczy przemieszczenia poziomego na spodzie warstwy w pewnej odległości od osi obciążenia. Należy jednak zwrócić uwagę, że maksymalna wartość przemieszczenia poziomego w układzie jest ponad 20-krotnie mniejsza od maksymalnej wartości przemieszczenia pionowego. Zatem błąd przemieszczenia poziomego w odniesieniu do wartości przemieszczenia pionowego będzie wynosił 0,2%.

PODSUMOWANIE

Najbardziej użyteczny z punktu widzenia możliwości obliczeniowych model MES (przy użyciu programu ABAQUS), w zastosowaniu do analizy warstwowych półprzestrzeni sprężystej, został pomyślnie „podwójnie” zweryfikowany – za pomocą metody analitycznej i metody zastosowanej w programie BISAR. Będzie możliwe wykorzystanie MES w analizie nawierzchni drogowych przy różnych warunkach połączeń między warstwowymi.

BIBLIOGRAFIA

1. ABAQUS Analysis User's Manual, Ver. 6.8, 2008
2. BISAR 3.0. User Manual. Shell International Oil Products B.V, BBG, Hague, May 1998
3. Jemioło S., Szwed A., Zagadnienia statyki sprężystych półprzestrzeni warstwowych. Seria Monografie Zakładu Wytrzymałości Materiałów, Teorii Sprężystości i Plastyczności, t. 2, OW PW, Warszawa 2013
4. Judycki J., Jaskuła P., Witkowski W., Modelowanie teoretyczne wpływu szczepności międzywarstwowej na zachowanie nawierzchni asfaltowych. Raport z drugiego etapu, Gdańsk 2012
5. Nagórski R. i in., Mechanika Nawierzchni Drogowych w Zarysie. Redakcja naukowa - R. Nagórski, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2014
6. Nagórski R., Nagórska M., Weryfikacja modeli skończenie elementowych w analizie statycznej konstrukcji nawierzchni drogowych podatnych. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo, z. 157, OW PW, Warszawa 2014
7. Michalczyk R., Wpływ szczepności międzywarstwowej na trwałość zmęczeniową nawierzchni podatnych. Rozdział VI w monografii „Teoretyczne podstawy budownictwa”, t. 3. „Konstrukcje inżynierskie”, pod redakcją Stanisława Jemioła i Marcina Gajewskiego, OW PW, Warszawa 2013, s. 93-102

COMPARATIVE ANALYSIS OF STATICS OF LAYER-HALFSPACE SYSTEM USING ANALYTICAL METHODS AND FEM

Abstract

Paper discussed the various ways of modeling the elastic layer-halfspace system, assuming two types of contact between these elements - the perfect bonding and free contact (no connection). To determine the state of displacement, strain and stress under the static load analytical and numerical methods (FEM) were applied. Attention has been paid to the impact of the lack of bonding in the system.

Autorzy:

mgr inż. Magdalena Złotowska – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, Instytut Dróg i Mostów, Zakład Mechaniki Teoretycznej i Mechaniki Nawierzchni Komunikacyjnych, m.zlotowska@il.pw.edu.pl

prof. dr hab. inż. Roman Nagórski – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, Instytut Dróg i Mostów, Zakład Mechaniki Teoretycznej i Mechaniki Nawierzchni Komunikacyjnych, r.nagorski@il.pw.edu.pl