

**Dr hab. inż. Tomasz Kopecki – prof. PRz**

**Dr inż. Przemysław Mazurek**

Wydział Budowy Maszyn I Lotnictwa

Politechnika Rzeszowska im. I. Łukasiewicza

Al. Powstańców Warszawy 12

E-mail: [tkopecki@prz.edu.pl](mailto:tkopecki@prz.edu.pl)

## **NUMERYCZNE ODWZOROWANIE DEFORMACJI ZAKRYTYCZNYCH W PROCESACH OKREŚLANIA ROZKŁADÓW NAPRĘŻEŃ W ZAMKNIĘTYCH WIELOSEGMENTOWYCH CENKOŚCIENNYCH LOTNICZYCH STRUKTURACH NOŚNYCH**

**Słowa kluczowe:** powłoka, skręcanie, bifurkacja, eksperyment, struktury nośne, nieliniowa analiza numeryczna

**Keywords:** shell, torsion, bifurcation, experiment, load-bearing structures, nonlinear numerical analysis

**Streszczenie:** Opracowanie przedstawia wyniki badań związanych z problemem uzyskiwania wiarygodnych wyników nieliniowych analiz numerycznych, w ujęciu metody elementów skończonych, cienkościennych struktur nośnych poddawanych obciążeniom zakrytycznym. Zgodność wyników numerycznych symulacji z rzeczywistymi dystrybucjami naprężeń uzależniona jest od poprawnego numerycznego odwzorowania bifurkacji zachodzących w procesach zaawansowanych deformacji.

**Abstract:** The study presents the results of research on the problem of obtaining credible results of nonlinear FEM analyses of thin-walled load-bearing structures subjected to post-critical loads. The similarity of numerical simulations results and actual stress distribution states depends on the correct numerical reproduction of bifurcations that occur during advanced deformations process.

### **1. Wprowadzenie**

W nowoczesnych konstrukcjach lotniczych komponentami powszechnie stosowanymi są cienkościenne ustroje nośne. Konieczność spełnienia wymagań w zakresie poziomów przenoszonych obciążeń oraz wymóg minimalizowania masy konstrukcji powodują, że często nieuniknione staje się akceptowanie zjawisk fizycznych, które w przypadku innych rodzajów konstrukcji uważane są za niedopuszczalne. Przykładem tego typu zjawiska jest utrata stateczności powłok stanowiących pokrycia pracujące struktur lotniczych, w zakresie obciążeń dopuszczalnych podczas eksploatacji [13].

Niezbędnym etapem procesu projektowania lotniczej struktury nośnej jest zatem określanie rozkładów naprężeń w powłokach ulegających dopuszczalnym zaawansowanym deformacjom [12]. Powszechnie stosowanym narzędziem numerycznym, pozwalającym odwzorować rzeczywiste rozkłady deformacji oraz wynikające z nich rozkłady naprężeń jest nieliniowa analiza w ujęciu metody elementów skończonych. Wiarygodność otrzymywanych wyników oceniana jest w oparciu o zasadę jednoznaczności rozwiązań, w myśl której określone stanowi deformacji odpowiada jeden i tylko jeden stan naprężenia. Wykorzystanie tej zasady wymaga uzyskania rozkładów deformacji modelu numerycznego w pełni odpowiadających rzeczywistym deformacjom analizowanego ustroju.

Czynnikiem decydującym o postaci deformacji struktury jest efekt raptownej zmiany kształtu ustroju towarzyszący przekraczaniu poziomów obciążeń krytycznych [2]. Z numerycznego punktu widzenia zjawisko to interpretowane jest jako zmiana relacji pomiędzy określonymi parametrami stanu odpowiadającymi poszczególnym stopniom swobody układu a parametrem kontrolnym, związanym z obciążeniem [3]. Relacja ta, określana jako ścieżka równowagi, w przypadku zaistnienia omawianego zjawiska posiada charakter alternatywny, określany jako bifurkacja. Przyjęcie przez ustrój nowej formy deformacji odpowiada zatem przeskokowi na alternatywną gałąź ścieżki równowagi [4].

Warunkiem koniecznym uzyskania poprawnej postaci deformacji modelu numerycznego jest zatem zachowanie zgodności pomiędzy zmianami kombinacji parametrów stanu zachodzącymi w modelu numerycznym oraz odpowiadającymi im procesami w ustroju rzeczywistym. Stwierdzenie owej zgodności wymaga weryfikacji otrzymywanych wyników odpowiednim eksperymentem modelowym bądź przy pomocy danych pozyskanych podczas badań obiektu rzeczywistego [9]. Uzyskanie wiarygodnych wyników nieliniowych analiz numerycznych jest często kłopotliwe i wymaga adekwatnego doboru metod numerycznych w zależności od

rodzaju analizowanego ustroju oraz precyzyjnego określenia parametrów sterujących przebiegiem procedur [14].

Z uwagi na liczbę parametrów stanu, pełną ścieżkę równowagi należy interpretować jako hiperpowierzchnię w hiperprzestrzeni stanu, spełniającą macierzowe równanie sił rezidualnych:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \Lambda) = \mathbf{0}, \quad (1)$$

w którym  $\mathbf{u}$  jest wektorem stanu, zawierającym składowe przemieszczeń węzłów struktury odpowiadających jej aktualnej konfiguracji geometrycznej,  $\Lambda$  jest macierzą zawierającą parametry kontrolne odpowiadające aktualnemu poziomowi obciążenia, natomiast  $\mathbf{r}$  jest *wektorem rezidualnym*, zawierającym niezrównoważone składowe siły, związane z aktualnym stanem deformacji układu. Zbiór parametrów kontrolnych może być wyrażony poprzez pojedynczy parametr, będący funkcją obciążenia. Równanie (1) przyjmuje wówczas postać:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{0}, \quad (2)$$

nazywaną monoparametrycznym równaniem sił rezidualnych.

Stosowane w nowoczesnych programach prognostyczno-korekcyjne metody określania kolejnych punktów ścieżki równowagi zawierają również fazę korekcyjną, opartą na spełnieniu przez układ dodatkowego równania, nazywanego równaniem kontroli przyrostu lub równaniem więzów [5]:

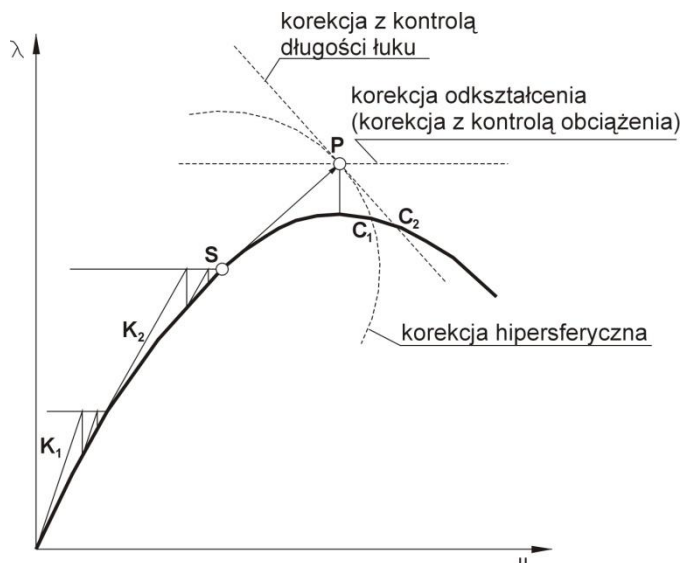
$$c(\Delta \mathbf{u}_n, \Delta \lambda_n) = 0, \quad (3)$$

gdzie przyrosty:

$$\Delta \mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n \quad \text{i} \quad \Delta \lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n \quad (4)$$

odpowiadają przejściu ze stanu  $n$  do stanu  $n+1$ .

Graficzną interpretację równania kontroli przyrostu prezentuje rys.1



Rys.1. Graficzne zestawienie różnych strategii korekcyjnych, dla reprezentatywnego układu o jednym stopniu swobody

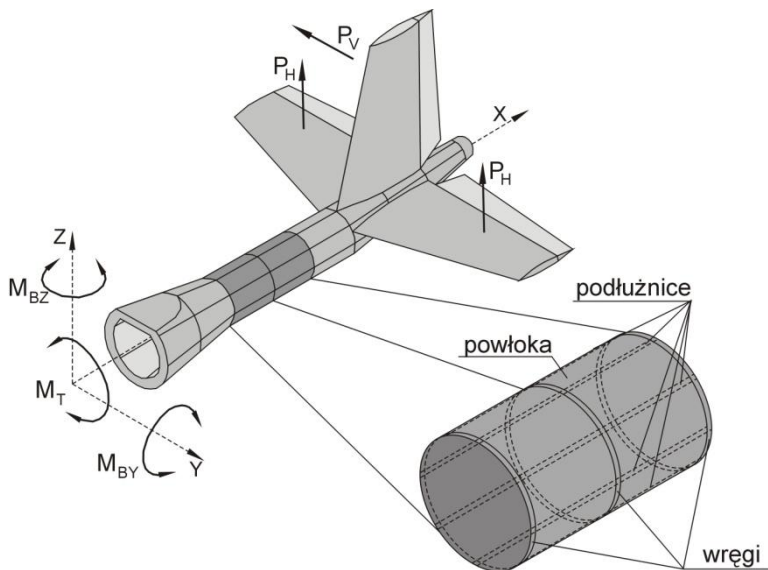
Z uwagi na dużą liczbę stopni swobody i związanych z nimi parametrów stanu, w praktyce procesy deformacji odwzorowywane są przy zastosowaniu zastępczych ścieżek równowagi, zwanych również ścieżkami reprezentatywnymi [8]. Określają one relacje pomiędzy parametrem kontrolnym, związanym z obciążeniem, a wybraną, charakterystyczną wielkością geometryczną związaną z deformacją układu.

## 2. Przedmiot i zakres badań

Bifurkacyjne zmiany postaci ustrojów nośnych, zawierających powłoki o znacznych krzywiznach, zachodzą w sposób tym bardziej gwałtowny, im większy jest stosunek kwadratu mniejszego z wymiarów obszaru powłoki ograniczonego sąsiadującymi podłużnicami oraz sąsiadującymi wręgami do wielkości lokalnego promienia jej krzywizny [6]. Szczególnie kłopotliwe w nieliniowych numerycznych odwzorowaniach są zatem ustroje półskorupowe o relatywnie niewielkim zagęszczeniu elementów szkieletu [7].

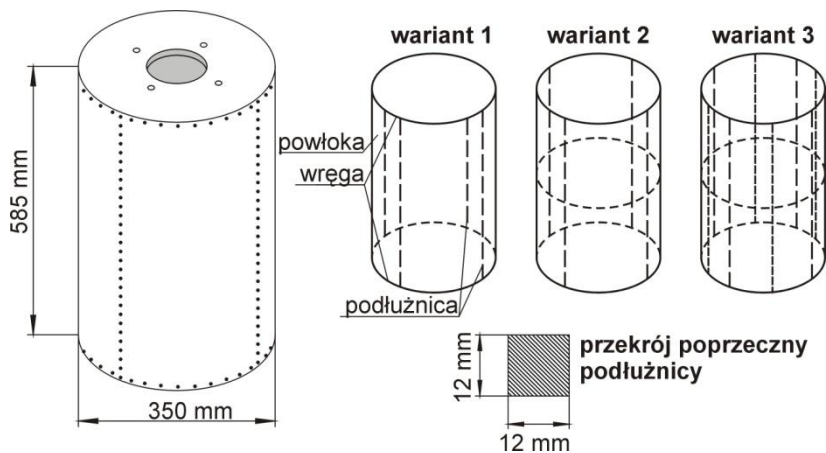
Przykładem takiej struktury jest zamknięta powłoka cylindryczna, wzmocniona wręgami i podłużnicami. Sam rodzaj struktury odpowiada

rozwiązaniom powszechnie stosowanym w technice lotniczej, np. konstrukcji belki ogonowej kadłuba samolotu (rys.2).



Rys.2. Aplikacja badanej struktury w konstrukcji płatowca

Przedmiot badań stanowiły struktury, o ogólnym schemacie przedstawionym na rys.3.



Rys.3. Schemat badanej struktury

Analizie poddano kilka ich wariantów, różniących się liczbą podłużnic oraz wręg:

Wariant pierwszy – podstawowy: szkielet złożony z dwu skrajnych wręg oraz czterech podłużnic,

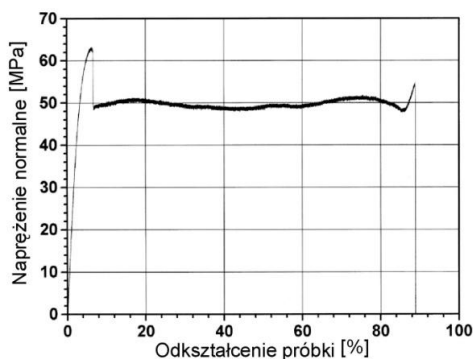
Wariant drugi: struktura o czterech podłużnicach, wzmocniona dodatkową wręgą usytuowaną w połowie długości powłoki,

Wariant trzeci: struktura wzmocniona dodatkowymi czterema podłużnicami, rozmieszczonymi równomiernie na pełnym obwodzie wręgi.

Wszystkie warianty struktury wykonane zostały z poliwęglanu, dla którego przeprowadzono próbę rozciągania oraz wyznaczono stałe materiałowe:

moduł Younga  $E=3000$  MPa oraz współczynnik Poissona  $\nu=0.36$ .

Rys.4 przedstawia charakterystykę w/w materiału odpowiadającą jednowymiarowemu rozciąganiu. Wyraźnie widoczne strefy deformacji sprężystej i niesprężystej sugerują możliwość przybliżania rzeczywistej charakterystyki materiału modelem idealnie sprężysto-plastycznym. Jednakże, z uwagi na fakt, iż dopuszczane jest wyłącznie wyboczenie lokalne struktury w zakresie sprężystym, w zastosowanych modelach numerycznych przyjęto model sprężysty materiału. Ponadto, z racji niskiej wartości modułu sprężystości (o dwa rzędy niższej w stosunku do stali) możliwe staje się prowadzenie badań eksperymentalnych operując niskimi wartościami obciążenia zewnętrznego.

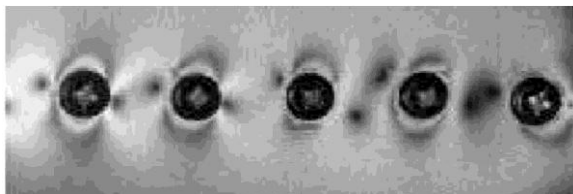


Rys. 4. Wykres rozciągania dla próbki z poliwęglanu

Wybór materiału, oprócz wspomnianego kształtu charakterystyki fizycznej uzasadnia fakt, iż materiał ten wykazuje wysoką czułość

optyczną, dzięki czemu możliwe staje się uzyskiwanie jakościowych informacji o rozkładzie izochrom [1].

Połączenia pomiędzy płaszczem i podłużnicami zrealizowano za pomocą stalowych śrub, rozmieszczonych co 20 mm. W celu uniknięcia ewentualnych wstępnych naprężeń w miejscach połączeń śrubowych, podczas montażu modelu prowadzono ciągłą obserwację pól izochrom w otoczeniu każdej z dokręcanych śrub. (rys.5).



Rys. 5. Rozkład izochrom w sąsiedztwie śrub, kontrolowany podczas montażu

### 3. Badania eksperymentalne

Pierwszy wariant szkieletu struktury składał się z minimalnej liczby ustrojów poprzecznych tj. dwóch wręg zamykających oraz czterech podłużnic. Należy podkreślić, że poddany badaniom model stanowił szczególny przypadek struktury, o celowo zminimalizowanej liczbie podłużnic. Rzeczywiste rozwiązania, odpowiadające kolejnym z badanych wariantów, oparte są zazwyczaj na zastosowaniu bardziej rozbudowanych szkieletów,

Badany ustrój poddawano skręcaniu nieswobodnemu przy wykorzystaniu stanowiska zaprezentowanego na rys.6.

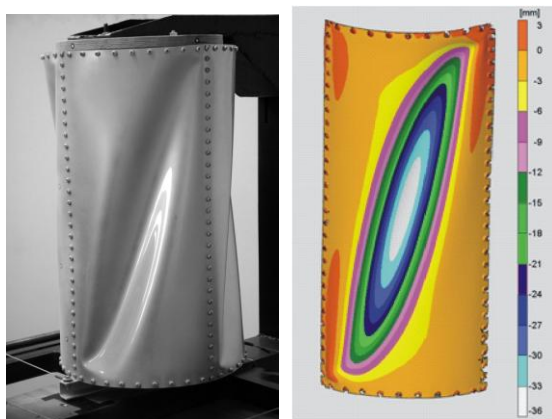


Rys. 6. Stanowisko badawcze

Zgodnie z oczekiwaniami, pojawienie się deformacji zakrytycznych przebiegało w sposób gwałtowny. Z uwagi na grawitacyjny sposób aplikacji obciążenia, pomiar relacji pomiędzy całkowitym kątem skręcenia a momentem skręcającym, przyjętej jako reprezentatywna ścieżka równowagi, odpowiadał stanom ustalonym [9] (rys.16).

Przy takim sposobie prowadzenia pomiarów, reprezentatywna charakterystyka nie odzwierciedla punktów bifurkacji w sposób jawny, jednak należy zwrócić uwagę na występowanie jej poziomego odcinka. Odpowiada on fazie eksperymentu, w której doszło do gwałtownej zmiany stanu struktury, przy jednoczesnym stałym poziomie obciążenia. Charakter przebiegu ścieżki równowagi odpowiada niestatecznemu typowi utraty stateczności charakterystycznemu dla struktur powłokowych.

Z uwagi na symetrię, zdeformowany ustrój posiadał cztery charakterystyczne bruzdy, we wszystkich segmentach pokrycia (rys7). Podczas eksperymentu dokonano rejestracji geometrii powierzchni z wykorzystaniem metody *mory projekcyjnej*. Do tego celu wykorzystano urządzenie rejestrujące – skaner Atos niemieckiej firmy GOM Optical Measuring Techniques.



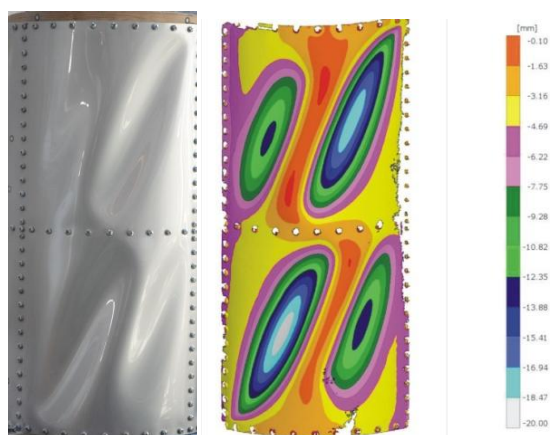
Rys.7. Zaawansowana deformacja zakrytyczna badanego ustroju (po lewej) oraz rozkład warstwicy odzwierciedlający wielkość deformacji wykonany metodą mory projekcyjnej (po prawej) – wariant I



W związku ze znacznymi rozmiarami segmentów pokrycia ulegających wyboczeniu, utrata stateczności wiązała się w tym przypadku ze skokowym, znacznym przyrostem całkowitego kąta skręcenia struktury. Jak wspomniano wcześniej, tego rodzaju właściwość uniemożliwia zastosowanie tego rozwiązania w rzeczywistych strukturach lotniczych [13]. Jednakże analizy podobnych przypadków szczególnych pozwalają na dopracowanie metod tworzenia modeli obliczeniowych w ujęciu MES i posiadają wysoką wartość poznawczą.

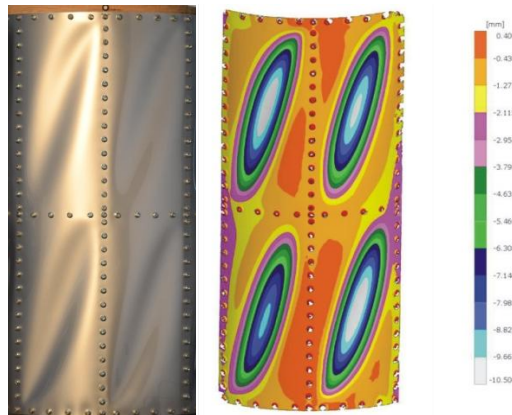
W kolejnym kroku eksperymentowi poddano strukturę wzmocnioną dodatkową wręgą (rys.3, wariant2). Zmiana proporcji wymiarów segmentów pokrycia limitowanych składowymi szkieletu struktury nie spowodowała znaczącej zmiany wartości obciążenia krytycznego. Utrata stateczności miała jednak w tym przypadku charakter znacznie bardziej łagodny, przejawiający się brakiem dużego przeskoku na ścieżce równowagi, przedstawionej na rys. 17. Stwierdzono również znaczący spadek wartości całkowitego kąta skręcenia, w odniesieniu do wariantu pierwszego. Zastosowane rozwiązanie wydaje się zatem znacznie bardziej przydatne z praktycznego punktu widzenia. Brak gwałtownych przyrostów deformacji struktury nie stwarza zagrożenia utraty przez statek powietrzny niezbędnych właściwości aerodynamicznych (np. pogorszenia się skuteczności usterzenia).

Rys.8 prezentuje rozkład deformacji w pojedynczym segmencie pokrycia badanej struktury oraz dystrybucję przemieszczeń określoną za pomocą skanera optycznego.



Rys. 8. Zaawansowana deformacja zakrytyczna badanego ustroju (po lewej) oraz rozkład warstwic odzwierciedlający wielkość deformacji wykonany metodą mory projekcyjnej (po prawej) – wariant2

W ostatnim wariancie badanej struktury zastosowano dodatkowe podłużnice (rys.3 wariant3). Rozkład deformacji zakrytycznych przedstawiony na rys. 9 oraz ścieżka równowagi na rys. 18 pozwalają stwierdzić, że obserwowane zjawisko miało w tym przypadku charakter znacząco odmienny niż w dwóch poprzednich. Przede wszystkim, utrata stateczności pokrycia nastąpiła przy znacznie niższym poziomie obciążenia. Wynika to ze zmiany proporcji pomiędzy wymiarami segmentów pokrycia, a promieniem ich krzywizny [6]. Obniżenie wartości obciążenia krytycznego nie oznacza jednak zmniejszenia walorów użytkowych struktury. Należy bowiem zwrócić uwagę na znaczący przyrost jej sztywności skrętnej. Utrata stateczności powoduje zatem powstawanie defektów geometrycznych kadłuba, skutkujących lokalnym zwiększeniem współczynnika oporu, jednakże większa sztywność gwarantuje zachowanie zasadniczych własności aerodynamicznych statku powietrznego.

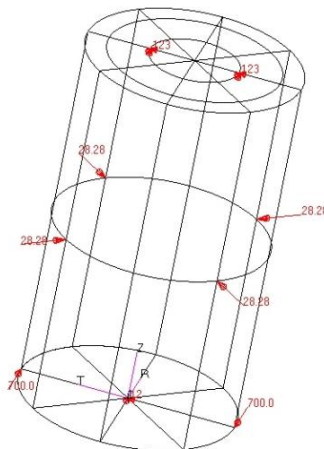


Rys. 9. Zaawansowana deformacja zakrytyczna badanego ustroju (po lewej) oraz rozkład warstwic odzwierciedlający wielkość deformacji wykonany metodą mory projekcyjnej (po prawej) – wariant3

#### 4. Analiza numeryczna w ujęciu MES

Pierwszy z wariantów badanej struktury należał do najbardziej kłopotliwych z punktu widzenia nieliniowej symulacji numerycznej w ujęciu MES. Szereg testów przeprowadzonych przy użyciu oprogramowania MSC MARC wykazał bezradność jego procedur wobec problemu, w zakresie określania właściwego powybozeniowego stanu struktury. Cechą charakterystyczną zastosowanych w nich algorytmów jest brak zdolności odwzorowania symetrii zjawiska. Przy wyidealizowanej geometrycznej formie modelu, awansowanie nowej postaci ustroju po przekroczeniu krytycznej wartości obciążenia zachodzi tylko w jednym z segmentów, pomimo na pozór poprawnej, symetrycznej inicjacji utraty stateczności [11]. Dowodzi to niedoskonałości algorytmów wyboru właściwych wariantów ścieżki równowagi, w przypadku pojawiania się zmian kombinacji parametrów stanu w kilku niezależnych ich podzbiorach [8].

Sytuację poprawiło dopiero wprowadzenie imperfekcji powłoki, poprzez aplikację sił normalnych do powłoki, w centralnych punktach poszczególnych segmentów pokrycia (rys.10). Wartości sił we wszystkich przypadkach odpowiadały ich maksymalnym wartościom aplikowanym podczas eksperymentu.

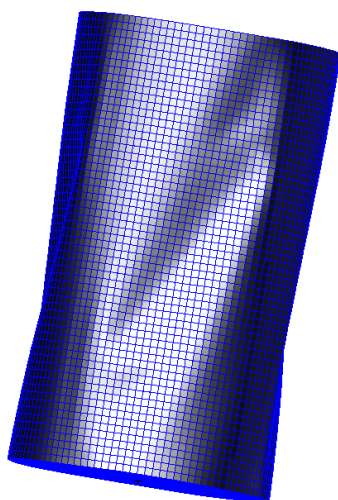


Rys.10. Model geometryczny ustroju wykonany w środowisku MSC PATRAN z warunkami brzegowymi i obciążeniem [N]

Nawet jednak w przypadku zastosowania tego rodzaju wymuszenia zmiany postaci, uzyskanie rezultatów w pełni odpowiadających wynikom

eksperymentu okazało się bardzo kłopotliwe. Przy założeniu wykorzystania elementów powłokowych o liniowych funkcjach kształtu, kluczowym czynnikiem okazała się właściwa gęstość siatki, przy czym nadmierne jej zagęszczenie powodowało uzyskiwanie błędnych postaci deformacji zakrytycznych [14] (rys.11).

Lepszy wynik, w przypadku modelowania podłużnic elementami belkowymi, uzyskano przy zastosowaniu siatki elementów skończonych o stosunkowo małej gęstości. Dowodzi to słuszności tezy, wielokrotnie udowodnionej w wielu opracowaniach, w myśl której zmniejszenie ogólnej liczby stopni swobody, odpowiadającej liczbie parametrów stanu, w przypadku procedur nieliniowych stosowanych w dostępnych oprogramowaniach komercyjnych często przynosi korzyści znacznie przewyższające niedostatki opisu matematycznego, wynikające ze zmniejszenia liczby elementów [5].



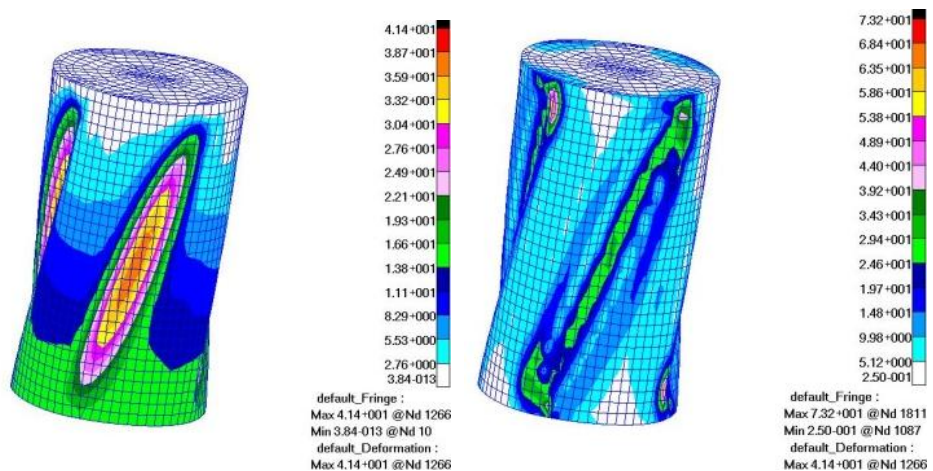
Rys. 11. Błędna postać deformacji, uzyskana przy zbyt dużej liczbie elementów

Najlepszy wynik uzyskano dopiero po całkowitej zmianie koncepcji modelu MES, po zastosowaniu innego niż poprzednio rodzaju elementów skończonych reprezentujących podłużnice. (elementy powłokowe grubościennne zamiast zalecanych belkowych). Jakkolwiek tego rodzaju rozwiązanie jest znacznie mniej poprawne z matematycznego punktu widzenia, w przypadku relatywnie niskiej wartości całkowitego kąta

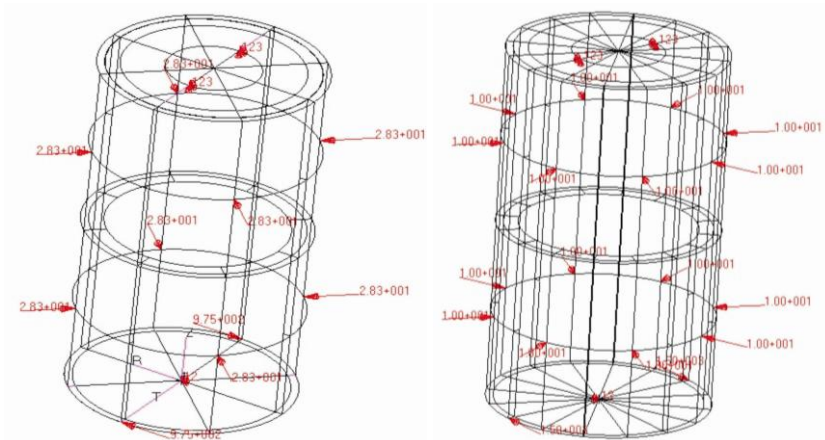
skręcenia okazało się znacznie bardziej efektywne. Wyniki analizy tej wersji modelu, uzyskane przy zastosowaniu prognostycznej metody siecznych oraz strategii korekcyjnej kontroli obciążenia (korekcji odkształcenia) [10] (rys.1) zaprezentowano na rys.12.

Strategia korekcji odkształcenia okazała się szczególnie efektywna w przypadku znaczącej, gwałtownej zmiany formy deformacji, gdy reprezentatywna ścieżka równowagi posiada bardzo długi „odcinek poziomy”.

Modelowanie podłużnic elementami powłokowymi grubościennymi (thick-shell) okazało się efektywne również w przypadku kolejnych wersji modelu. W celu uzyskania symetrii deformacji, we wszystkich przypadkach uwzględniano wymuszenia pełniące rolę imperfekcji, w postaci sił o niewielkich wartościach, normalnych do powłoki, aplikowanych w centralnych punktach odpowiednich segmentów. Sposób modelowania struktur w wariantach 2 i 3 prezentuje rys.13.



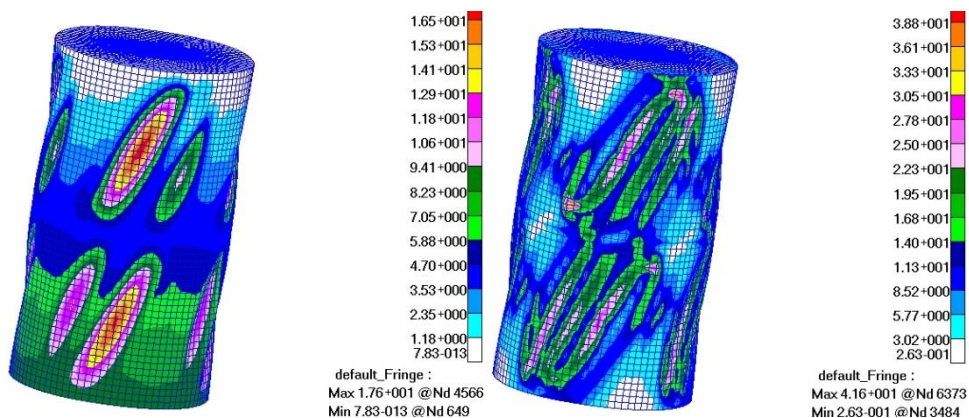
Rys.12. Rozkład przemieszczeń (po lewej) i naprężenia zredukowanego wg hipotezy Hubera-Misesa (po prawej) dla 100% obciążenia maksymalnego (podłużnice modelowane bilinearnymi powłokowymi elementami grubościennymi)



Rys.13. Modele geometryczne 2-go (po lewej) i 3-go (po prawej) wariantów struktury wykreowane w środowisku MSC PATRAN, z warunkami brzegowymi i [N]

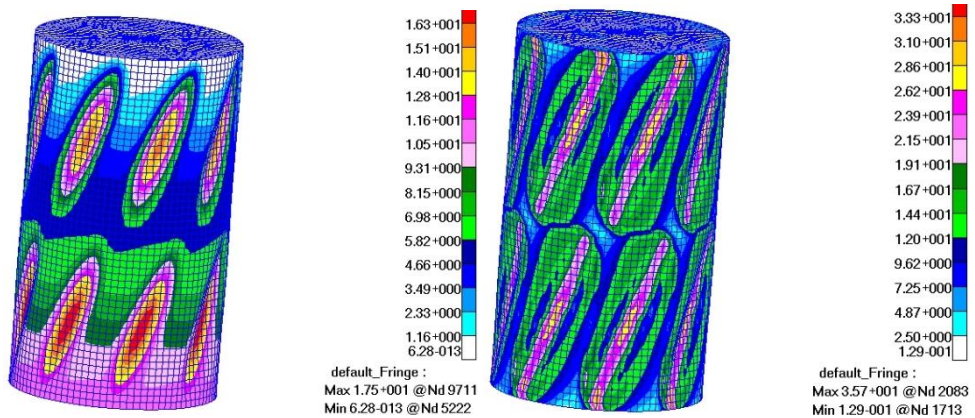
Wyniki nieliniowych analiz numerycznych w ujęciu MES przedstawionych powyżej wariantów struktury, dla modeli z podłużnicami modelowanymi elementami trick-shell, prezentują rys. 14 i 15.

Zestawienia reprezentatywnych ścieżek równowagi przedstawiono na rys. 16-18.





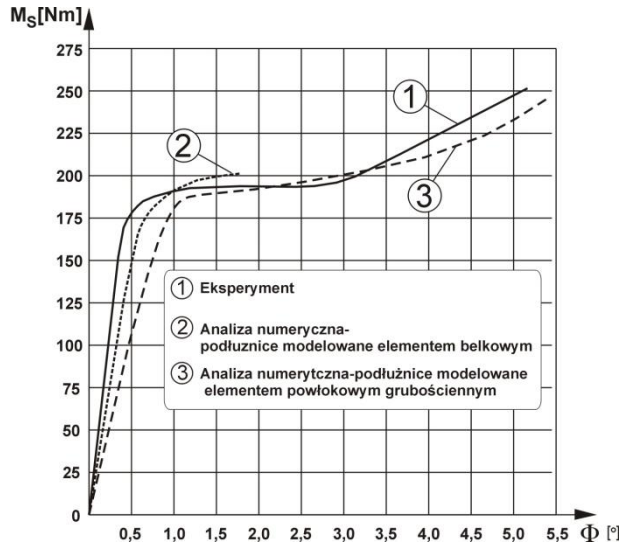
Rys.14. Rozkład przemieszczeń (po lewej) i naprężenia zredukowanego wg hipotezy Hubera-Misesa (po prawej) dla 100% obciążenia maksymalnego – wariant2



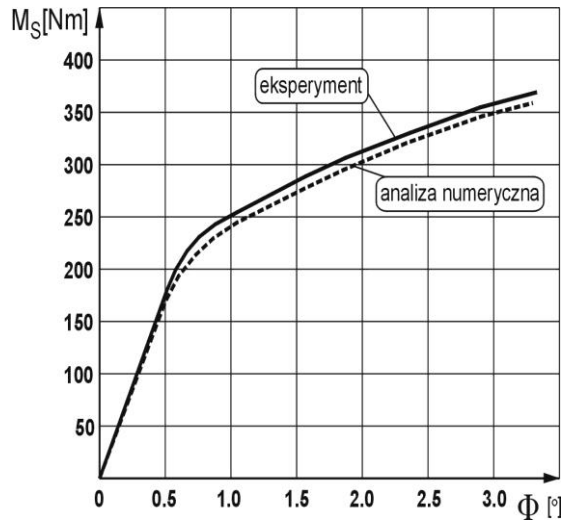
Rys.15. Rozkład przemieszczeń (po lewej) i naprężenia zredukowanego wg hipotezy Hubera-Misesa (po prawej) dla 100% obciążenia maksymalnego – wariant3

Uzyskane na drodze numerycznej rozkłady deformacji wykazały zadowalającą zgodność z przedstawionymi powyżej wynikami eksperymentu, zarówno jakościową, jak i ilościową. Przebiegi reprezentatywnych ścieżek równowagi charakteryzują się znacznie lepszą zgodnością z charakterystykami eksperymentalnymi niż w przypadku wariantu 1. W zakresie podkrytycznym zgodność ta jest niemal idealna. Dla obciążeń maksymalnych natomiast, błąd odwzorowania całkowitego kąta skręcenia struktury nie przekracza 10%. Pozwala to wnioskować, że przyjęty sposób modelowania oraz dobór procedur numerycznych okazały się zadowalające.

Bardziej łagodny charakter przebiegu ścieżki równowagi, w porównaniu z 1 wariantem struktury, pozwala na większą swobodę w doborze nieliniowych procedur numerycznych, np. zastosowanie metody Newtona-Raphsona oraz strategii korekcyjnej „kontrola długości łuku” bądź korekcji hipersferycznej Crisfielda [8].

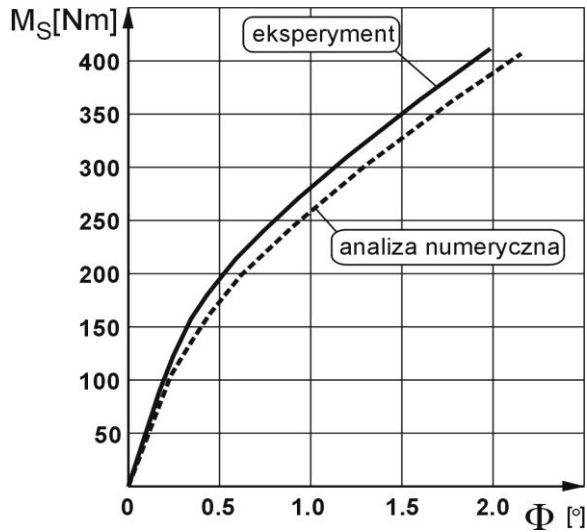


Rys. 16. Zestawienie reprezentatywnych ścieżek równowagi – wariant1



Rys. 17. Zestawienie reprezentatywnych ścieżek równowagi – wariant2





Rys.18. Zestawienie reprezentatywnych ścieżek równowagi – wariant3

### 3. Podsumowanie

Przedstawione wyniki badań dowodzą, że dzięki użyciu nowoczesnych narzędzi obliczeniowych możliwa jest szczegółowa analiza wielkości i gradientów naprężeń w przypadku cienkościennych struktur podlegających złożonym deformacjom zakrytycznym. Pozwala to na dopracowanie konstrukcji na wczesnym etapie projektowania i tym samym zwiększenia jej niezawodności oraz trwałości eksploatacyjnej. Aby jednak uzyskane wyniki można było uznać za wiarygodne, konieczne jest poprawne odwzorowanie zmian zachodzących w rzeczywistej hiperprzestrzeni stanu.

Zasadniczą konkluzją, do której prowadzą przedstawione wyniki jest absolutna konieczność stosowania weryfikacji eksperymentalnych w odniesieniu do nieliniowych analiz numerycznych w ujęciu MES tego rodzaju struktur. Nawet bowiem przypadki, w których poprawność otrzymywanych wyników wydaje się bezdyskusyjna, w istocie mogą być obciążone błędami, wynikającymi z bardzo ograniczonej niezawodności procedur numerycznych stosowanych w programach komercyjnych.

Wyniki badań przedstawionych wariantów zamkniętej cienkościennej struktury walcowej, stanowiącej reprezentatywny przykład rozwiązania często stosowanego w lotnictwie mogą być traktowane jako konstrukcyjny wzorzec, w rozumieniu jakościowym, ponieważ sam charakter deformacji

zakrytycznych przy zachowaniu geometrycznych proporcji i stosunków sztywności pomiędzy elementami struktury nie ulegnie zmianie przy zastosowaniu innych materiałów izotropowych oraz zmienionych wartości obciążeń. Potwierdziły to testy numeryczne realizowane przy użyciu przedstawionych modeli.

Na podstawie związanych z przedstawionymi strukturami, często wielokrotnie powtarzanych nieliniowych analiz numerycznych, sformułować można również ogólne zalecenie maksymalnego możliwego ograniczania rozmiarów zadania. Dążenie do zwiększania dokładności obliczeń poprzez zagęszczanie siatki elementów skończonych, z powodzeniem stosowane w analizach liniowych, w przypadku analizy nieliniowej może okazać się nieefektywne i prowadzić do uzyskania błędnych rezultatów bądź braku zbieżności obliczeń.

Szczegółowa analiza przedstawionych wyników badań pozwala na sformułowanie zaleceń konstrukcyjnych pozwalających dobrać najbardziej korzystną liczbę elementów szkieletu struktury oraz sposób ich rozmieszczenia. Jak wykazano, zwiększenie liczby podłużnic oraz zastosowanie dodatkowych wręg, skutkujące zmniejszeniem wymiarów segmentów pokrycia, prowadzi do usztywnienia struktury. Należy jednak pamiętać, że wiąże się to również ze zwiększeniem masy struktury. Porównanie reprezentatywnych ścieżek równowagi dla wariantów pierwszego i drugiego oraz drugiego i trzeciego pozwala przypuszczać, że zastosowanie kolejnych podłużnic bądź dodatkowych wręg nie musi przynieść wymiernych korzyści w postaci odpowiedniego przyrostu sztywności struktury odniesionego do przyrostu jej masy. Szczegółowe określenie tej zależności wymaga przeprowadzenia przygotowywanych obecnie dodatkowych doświadczeń, przy zastosowaniu modeli o zwiększonych wymiarach i stosownego stanowiska badawczego.

## **Literatura**

1. Aben H. Integrated photoelasticity. Mc Graw-Hill Book Co., London, UK, 1979
2. Andrianov J., Awrejcewicz J., Manewitch L.I. Asymptotical Mechanics of thin-walled structures. Springer, Berlin, Germany, 2004

3. Andrianov J., Verbonol V. M., Awrejcewicz J. Buckling analysis of discretely stringer-stiffened cylindrical shells, *International Journal of Mechanical Sciences*, 48, 1505-1515, 2006
4. Arbocz J. Post-buckling behavior of structures. Numerical techniques for more complicated structures. *Lecture Notes In Physics*, 228, USA, 1985
5. Bathe K.J. *Finite element procedures*, Prentice Hall, USA, 1996
6. Brzoska Z. *Statics and stability of bar and thin-walled structures*. PWN, Warszawa, Poland, 1965
7. Doyle J.F. *Nonlinear analysis of thin-walled structures*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2001
8. Felippa C. A. *Procedures for computer analysis of large nonlinear structural system in large engineering systems*. ed. by A. Wexler, Pergamon Press, London, UK, 1976
9. Kopecki T. *Advanced deformation states in thin-walled load-bearing structure design work*. Publishing House of Rzeszów University of Technology, Rzeszów, Poland, 2010
10. Marcinowski J. *Nonlinear stability of elastic shells*. Publishing House of Technical University of Wrocław, Poland, 1999
11. Mohri F., Azrar L., Potier-Ferry M. (2002). Lateral post buckling analysis of thin-walled open section beams. *Thin-Walled Structures*, 40:1013-1036, USA, 2002
12. Niu M. C. *Airframe structural design*. Conmilit Press Ltd., Hong Kong, 1988
13. Rakowski G., Kacprzyk Z. (2005). *Finite elements method in structure mechanics*. Publishing House of Technical University of Warszawa, Poland, 2005
14. Ramm E. *The Riks/Wempner Approach – An extension of the displacement control method in nonlinear analysis*. Pineridge Press, Swensea, UK, 1987