

# Mathematical Model of an Electric Arc in Differential and Integral Forms With the Plasma Column Radius as a State Variable

## Author

Antoni Sawicki

## Keywords

electric arc, hybrid model, model with a radius as a state variable

## Abstract

The preliminary assumptions necessary to create a known mathematical model of an electric arc with a radius as a state variable are described. Besides the differential form, the integral form of this model is also presented. A hybrid model of an arc in the differential and integral forms has also been created. Weighting functions depending either on the current or on the resultant conductance were used. The presented mathematical models' performance in mapping the voltage-current characteristics of an electric arc in various current change ranges was examined in simulation.

**DOI: 10.12736/issn.2330-3022.2020204**

Received by the editor: 25.08.2020

Received in revised form: 23.09.2020

Accepted: 24.09.2020

Published online: 21.12.2020

## 1. Introduction

In an electric arc, many parameters of the inter-electrode matter change under changes in the current forcing. Depending on its location in the discharge area, or the impact of other external factors, these changes may be slight or very significant. It is assumed that the non-equilibrium plasma in near-electrode layers hardly changes and therefore the voltage drops on them do not depend on the current. In contrast, the temperature of the plasma, and the size of the arc column can vary greatly. Depending on the needs, mathematical descriptions of these changes may be very detailed or simplified. In detailed considerations, field models are most often used to analyse various phenomena in various sub-areas of the arc. On the other hand, the adoption of many simplifying assumptions allows the creation of one-dimensional models. Various physical quantities or fictitious quantities, such as virtual current in the Pentegov model [1], are then assumed as state variables. Inertial response to a momentary current change is a change in the average plasma temperature. The mathematical models developed with temperature as a state variable are sometimes used to simulate processes in circuits with discharge lamps [2, 3]. However, the most popular in modeling electrotechnological devices are conductance models and resistance models equivalent to them [4, 5]. They are usually drawn up in the differential form. To simulate technological

processes in some devices with poorly stable arcs (e.g. in gliding arc plasmotrons) an integral version of conductance models is useful [6]. Models with a radius as a state variable in the differential form are sometimes used to model the arc of steelmaking arc furnaces [7, 8]. Depending on the exponents of the radius power law functions, various physical properties of the plasma column are mapped [9, 10, 11].

Because of the preconditions adopted, simple mathematical models of the arc can sufficiently approximate the arc characteristics within certain ranges of changes in the forcing current. For example, the Mayr model is good for describing low-current arcs, and the Cassie model for describing the electrical properties of high-current arcs [5]. Of course, the very terms "low-current arc" or "high-current arc" are relative. They depend on the power and design of the device, its operating conditions, etc. The voltage-current characteristics of a low-current arc are usually steeply descending. In modeling such arcs the column radiation phenomenon can be ignored [12]. In contrast, the static characteristics of a high-current arc are flat or ascending.

Hybrid models are used to represent the electrical properties of arcs in a wide range of current changes [13]. They combine the low-current and high-current sub-models with an appropriate weighting function [14].

This article presents the differential and integral variants of simple and hybrid arc mathematical models, in which the plasma column radius is treated as a state variable. The simulations produced families of static and dynamic voltage-current characteristics. They indicate the possibility of using the described models to approximate data from experimental tests of arc and plasma devices operating in a wide range of changes in current and working gas pressure.

## 2. Mathematical model of an electric arc with a radius as a state variable

The input assumption in the development of an electric arc mathematical model is the energy balance. It can be denoted as energy streams:

$$p_1(t) + p_2(t) = p_3(t) \quad (1)$$

where:  $p_1$  – dissipated thermal power;  $p_2$  – thermal power stored in the arc column;  $p_3$  – supplied electric power,  $t$  – time. The dissipated power depends on the plasma temperature  $p_1(T)$ . As gas characteristics weakly depend on the temperature in the operating states of devices with high-current arcs, this relationship is ignored. The following approximation of the dependence of power dissipated on the arc column radius is assumed:

$$p_1(t) = k_1 r^n \quad (2)$$

If the ambient temperature is high, heat transfer is ineffective, and then  $p_1 = f(r) = k_1 r^0 = const$  and hence  $n = 0$ ;

If the arc is long, then  $p_1 = f(S_b)$ , where  $S_b$  – arc column lateral area. From this it follows that  $p_1 = f(r) = k_1 r^1$ , and hence  $n = 1$ ;

If the arc is short, then  $p_1 = f(S_p) = k_1 r^2$ , where  $S_p$  – cross-sectional area of the arc column (also of the electrode spot). From this, it follows that  $n = 2$ .

The power accumulated in the column is described by the relationship

$$p_2(t) = \frac{dQ}{dt} \quad (3)$$

where:  $Q$  – plasma enthalpy. This value depends on the column volume  $Q \propto V \propto r^2$ , therefore it can be denoted as  $Q = 0,5 k_2 r^2$ , and hence

$$p_2(t) = k_2 r \frac{dr}{dt} \quad (4)$$

The electrical power supplied to the arc column can be described by the relationship

$$p_3(t) = ui = r_a i^2 \quad (5)$$

where:  $r_a$  – instantaneous resistance of the arc column. The column resistance is given by the formula

$$r_a = \frac{\rho(r)l}{S(r)} \quad (6)$$

where:  $l$  – arc length;  $S$  – column cross-section area;  $\rho$  – plasma resistivity. We assume that  $l = const$ . If we accept dependencies  $S = \pi r^2$  and in its convenient form the formula for  $\rho = k_3 l^1 r^m$ , the result will be:

$$p_3(t) = \frac{k_3}{r^2} r^m i^2 = \frac{k_3}{r^{m+2}} i^2 \quad (7)$$

The general form of the mathematical model of an arc with a radius as a state variable is expressed by the nonlinear ordinary differential equation [7, 15]

$$k_1 r^n + k_2 r \frac{dr}{dt} = \frac{k_3}{r^{m+2}} i^2 \quad (8)$$

The voltage on the arc column can be calculated from the relationship

$$u = \frac{i}{g_a} = r_a i = \frac{k_3}{r^{m+2}} i \quad (9)$$

Hence the conductance can be expressed as a function of the column radius

$$g_a = \frac{r^{m+2}}{k_3} \quad (10)$$

or vice versa

$$r = (k_3 g_a)^{\frac{1}{m+2}} \quad (11)$$

In the static state ( $dr/dt = 0$ ) and then  $p_1 = p_3$ . After using the dependencies (2) and (5), the following can be formulated

$$p_1 = UI = k_1 r^n = k_3 \frac{I^2}{r^{m+2}} = p_3 = \frac{U}{I} I^2 \quad (12)$$

Hence the relation

$$\left(\frac{UI}{k_1}\right)^{m+2} \cdot \left(\frac{U}{k_3 I}\right)^n = 1 \quad (13)$$

Moreover, from equation (8) we obtain the formula for the column radius as a function of the arc current

$$R_r = \left(\frac{k_3}{k_1} I^2\right)^{\frac{1}{m+n+2}} = k_4 I^{\frac{2}{m+n+2}} \quad (14)$$

where:  $k_4 = \frac{m+n+2}{2} \sqrt[k_3/k_1]{}$ . According to theoretical considerations and experimental studies [16], an approximation  $R_r \approx kI^{2/3}$  can be used under certain physicochemical conditions in the high-current range. On the other hand, in dynamic states, reducing the current in an inertial manner not only reduces the plasma temperature but also reduces the compression forces of the column. This should increase the arc column radius  $r(i)$ , especially when the current passes through zero. This is evidenced by the experimental studies of the arc including the damping function

$n \setminus m$	$q$		
	0	1	2
0	1	1	1
1	1/3	1/2	3/5
2	0	1/5	1/3
3	-1/5	0	1/7
4	-1/3	-1/7	0
5	-3/7	-1/4	-1/9

Tab. 1. Impact of exponents of the power function (2) and (7) on the exponent  $q$  of the voltage function (15)

determination [17]. After all, it is known that this function is proportional to the arch column cross-section area [18]. Formula (11) does not describe this phenomenon exactly, because  $r \rightarrow 0$  when  $g_a \rightarrow 0$ .

Based on (9) and (12), the formula for static voltage-current characteristic has the form

$$U = \frac{k}{I^q} \tag{15}$$

where:  $q = \frac{m+2-n}{m+2+n}$ ,  $k = k_3 \left( \frac{k_3}{k_1} \right)^{\frac{-m-2}{m+n+2}}$ .

The shape of this characteristics depends on the exponents  $m$  and  $n$  of power law functions. Listed in Tab. 1 are  $q$  values depending on the exponents [15].

On the basis of simplified physical analyses in the literature [15], the cases (2) and (7) were approximated using power law functions, in which  $0 \leq m \leq 2$  and  $0 \leq n \leq 2$ . The case where  $q = 0$ , corresponds to the voltage  $U = \text{const}$ . In other cases, with  $n \leq 2$  functions are obtained, the graphs of which are similar to the hyperbolic curve. The flat characteristic corresponds to high-current arcs and the sloping curve to low-current arcs. The ascending characteristics of high-current arcs can be obtained if  $q < 0$ . This case was not considered in [15]. However, additional channels of heat dissipation from the arc column may be available [19]. Ascending static arc characteristics are observed in studies of arcs with sharpened electrodes and arcs in high-pressure gases. This may indicate increased convection in the near-electrode areas (mainly near the cathode) and an increased level of radiation from very compressed thermal plasma. The relationship of the dissipation power with the geometrical dimensions of the cylindrical column (2) may be a limitation in describing the heat dissipation methods. Measurement data approximations can lead to functions with higher exponents  $n$ , including fractional exponents. However, such large  $n$  values may hinder the physical interpretation of the mathematical model.

To create a computer macro model, the differential model (8) was transformed into

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k_3}{k_2} \frac{i^2}{r^{m+3}} - \frac{k_1}{k_2} r^{n-1} \tag{16}$$

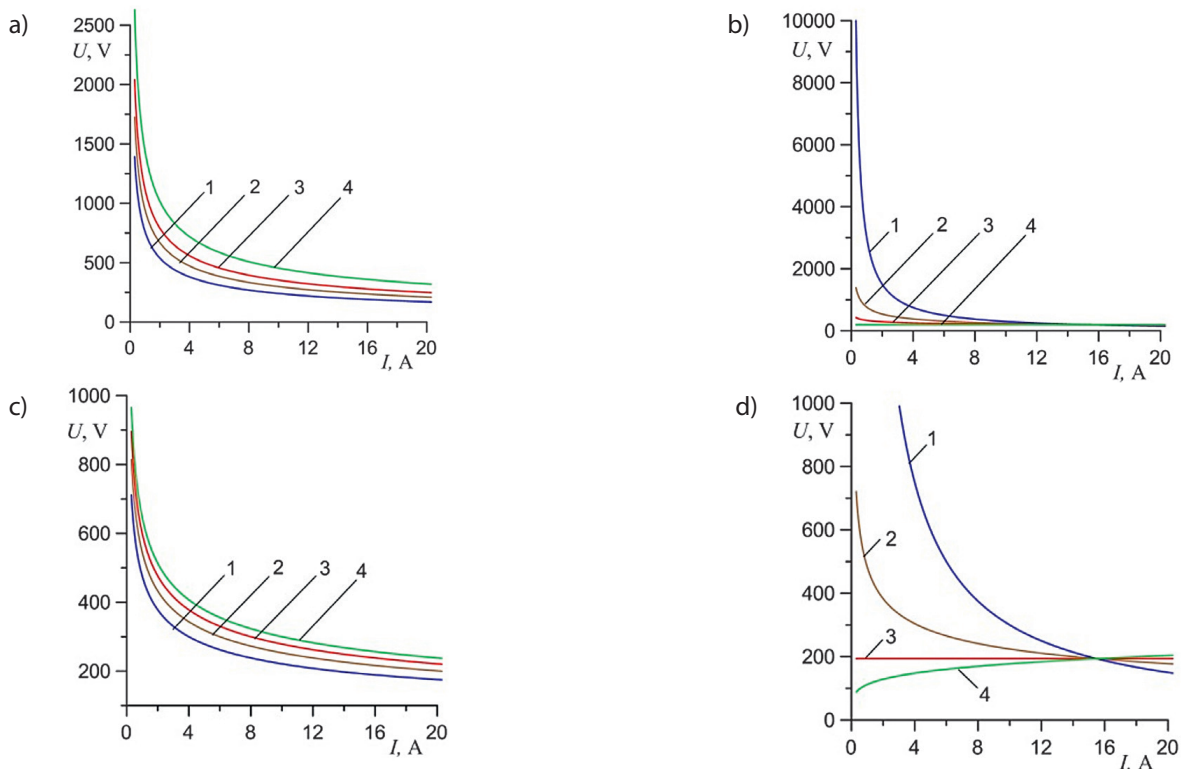


Fig. 1. Families of static voltage-current characteristics of the mathematical arc model (8) described by formula (13): a) with variable coefficient  $k_1$  ( $(k_3 = 12,5, m = 1, n = 1)$ ,  $1 - k_1 = 3000$ ,  $2 - k_1 = 4000$ ,  $3 - k_1 = 5000$ ,  $4 - k_1 = 7000$ ); b) with variable exponent  $n$  ( $(k_1 = 3000, k_3 = 12,5, m = 1)$ ,  $1 - n = 0$ ,  $2 - n = 1$ ,  $3 - n = 2$ ,  $4 - n = 3$ ); c) with variable coefficient  $k_3$  ( $(k_1 = 3000, m = 2, n = 2)$ ,  $1 - k_3 = 12$ ,  $2 - k_3 = 18$ ,  $3 - k_3 = 24$ ,  $4 - k_3 = 30$ ); d) with variable exponent  $n$  ( $(k_1 = 3000, k_3 = 12,5, m = 0)$ ,  $1 - n = 0$ ,  $2 - n = 1$ ,  $3 - n = 2$ ,  $4 - n = 3$ )

Its integration produces

$$r = \int_0^t \left( \frac{k_3}{k_2} \frac{i^2}{r^{m+3}} - \frac{k_1}{k_2} r^{n-1} \right) d\tau + r_0 \quad (17)$$

The conductivity of this model is expressed by dependence

$$g_a = \frac{r^{m+2}}{k_3} = \frac{1}{k_3} \left[ \int_0^t \left( \frac{k_3}{k_2} \frac{i^2}{r^{m+3}} - \frac{k_1}{k_2} r^{n-1} \right) d\tau + r_0 \right]^{m+2} \quad (18)$$

which is used to create a macro model with a controlled voltage source  $u = i/g_a$ .

Differential model of the arc (8) can be converted to the integral form by dividing this equation by  $k_2 r^2$  and integrating over  $t$

$$r = r_0 \exp \left[ \int_0^t \left( \frac{k_3}{k_2} \frac{i^2}{r^{m+4}} - \frac{k_1}{k_2} r^{n-2} \right) d\tau \right] \quad (19)$$

This form is sometimes more convenient in numerical calculations. The conductivity of this model can be expressed as

$$g_a = \frac{r^{m+2}}{k_3} = \frac{1}{k_3} \left[ r_0 \exp \left[ \int_0^t \left( \frac{k_3}{k_2} \frac{i^2}{r^{m+4}} - \frac{k_1}{k_2} r^{n-2} \right) d\tau \right] \right]^{m+2} \quad (20)$$

It is used in the created macro model with a controlled current source  $i = ug$ .

Fig. 1 shows families of static voltage-current characteristics of a simple mathematical arc model with the differential (8) or integral (19) form. They are described by the function (13) and correspond to various variants of the parameter set of functions approximating power changes in the energy balance equation (1). In Figures 1a, 1b and 1c they have shapes similar to the hyperbolic function. This proves their usefulness for approximating static characteristics, especially of low-current arcs. Only in the case shown in Fig. 1d, variants of the characteristics that are increasing or constant functions are possible, which is observed in high-current arcs. To show the diversity of static characteristics, a relatively small range of current changes was considered.

Fig. 1d shows that the static voltage-current characteristics intersect at one point with coordinates  $(I_x, U_x)$ . In general, with any  $k_1$  and  $k_3$  coefficients they may be derived from formulas

$$I_x = \sqrt{\frac{k_1}{k_3}} \quad (21)$$

$$U_x = \sqrt{k_1 k_3} \quad (22)$$

For data in Fig. 1d, the intersection point coordinates are (15.492 A, 193.65 V).

### 3. Hybrid model of an arc as a combination of two sub-models with radii as state variables

In the Novikov-Schellhase, Pentegov, and Mayr-Pentegov mathematical models, theoretically any function can be used to approximate physical quantity characteristics. These are not only polynomials [4, 20], but also exponential functions [21, 22]. The

use of just the simplest i.e. monotonic power law functions [9, 15] significantly limits the possibility to describe electrical properties of the arc in simulation programs by the developed macro models. A way to extend the range of applications of simplified arc mathematical models (low – and high-current) is to combine them in parallel with the activation of the respective conductance by a weighting function.

Due to the shape of the voltage-current characteristics, the sub-models can be divided into low-current with conductance  $g_M$  and high-current with conductance  $g_C$ . The following sub-models correspond to (16)

$$g_M = \frac{1}{k_{3M}} \left[ \int_0^t \left( \frac{k_{3M}}{k_{2M}} \frac{i^2}{r^{m_M+3}} - \frac{k_{1M}}{k_{2M}} r^{n_M-1} \right) d\tau + r_{0M} \right]^{m_M+2}, \quad \text{if } q_M > 0 \text{ and } i < I_0 \quad (23)$$

$$g_C = \frac{1}{k_{3C}} \left[ \int_0^t \left( \frac{k_{3C}}{k_{2C}} \frac{i^2}{r^{m_C+3}} - \frac{k_{1C}}{k_{2C}} r^{n_C-1} \right) d\tau + r_{0C} \right]^{m_C+2}, \quad \text{if } q_C \leq 0 \text{ and } i \geq I_0 \quad (24)$$

where:  $I_0$  – limit current of fuzzy switching of sub-models,

$$q_M = \frac{m_M + 2 - n_M}{m_M + 2 + n_M}, q_C = \frac{m_C + 2 - n_C}{m_C + 2 + n_C}.$$

Combining low-current and high-current sub-models with weighting function produces a hybrid model

$$g_a = (g_{rez} + g_M) \varepsilon_i(i) + g_C [1 - \varepsilon(i)] \quad (25)$$

where:  $g_{rez}$  – residual conductance ( $g_{rez} > 0$ ),  $S$ ;  $\varepsilon_i(i)$  – weighting function with properties  $\varepsilon_i(0) = 1$  and  $\varepsilon_i(\infty) = 0$ . With residual conductance  $g_{rez}$  the arc's extinction when the current passes zero value is precluded.

An equivalent hybrid model can also be created using sub-models in integral forms. For this purpose, equation (19) was used to produce:

$$g_M = \frac{1}{k_{3M}} \left[ r_{0M} \exp \left[ \int_0^t \left( \frac{k_{3M}}{k_{2M}} \frac{i^2}{r^{m_M+4}} - \frac{k_{1M}}{k_{2M}} r^{n_M-2} \right) d\tau \right] \right]^{m_M+2}, \quad \text{if } q_M > 0 \text{ and } i < I_0 \quad (26)$$

$$g_C = \frac{1}{k_{3C}} \left[ r_{0C} \exp \left[ \int_0^t \left( \frac{k_{3C}}{k_{2C}} \frac{i^2}{r^{m_C+4}} - \frac{k_{1C}}{k_{2C}} r^{n_C-2} \right) d\tau \right] \right]^{m_C+2}, \quad \text{if } q_C \leq 0 \text{ and } i \geq I_0 \quad (27)$$

To create a hybrid model (21), weight function  $(i)$  dependent on the resultant current of the two sub-models connected in parallel can also be used.

Limit current  $I_0$  can be defined as the current coordinate of the point of intersection of the static characteristics (13) of the sub-models

$$U_0 = \frac{k_M}{I_0^{q_M}} = \frac{k_C}{I_0^{q_C}} \tag{28}$$

hence:

$$I_0 = \left( \frac{k_C}{k_M} \right)^{\frac{1}{q_C - q_M}} \tag{29}$$

where coefficients:  $k_M = k_{3M} \left( \frac{k_{3M}}{k_{1M}} \right)^{\frac{-m_M - 2}{m_M + n_M + 2}}$ ,  $k_C = k_{3C} \left( \frac{k_{3C}}{k_{1C}} \right)^{\frac{-m_C - 2}{m_C + n_C + 2}}$

As a weight function the following relationship may be selected:

$$\varepsilon_i(i) = \exp\left(\ln(k_i) \frac{i^2}{I_0^2}\right) \tag{30}$$

The  $k_i$  value is the ordinate of the switching point of function  $\varepsilon_i(I_0) = k_i$ , where  $0 < k_i < 1$ .

Due to the inertia of the processes in the electric arc, another weighting function may be more physically justified. Current is related to the arc conductance. In the low-current range  $g_a \propto i^2$ , and in the high-current range  $g_a \propto i$ . Therefore, sometimes in [20] weight functions are used depending on the resultant conductance in the form:

$$\varepsilon_g(g_a) = \exp\left(\ln(k_g) \frac{g_M + g_C}{G_0}\right) \tag{31}$$

The  $k_g$  value is the ordinate of the switching point of function  $\varepsilon_g(G_0) = k_g$ , where  $0 < k_g < 1$ . The magnitude of  $G_0$  can be determined using dependencies (10) and (12) describing the equal powers dissipated in the arc's sub-models:

$$G_0 = \left( \frac{k_{1C} \frac{n_M}{k_{3M}^{m_M + 2}}}{k_{1M} \frac{n_C}{k_{3C}^{m_C + 2}}} \right)^{\frac{1}{\frac{n_M}{m_M + 2} - \frac{n_C}{m_C + 2}}} \tag{32}$$

The choice of parameters of the hybrid model can be simplified by selecting a common intersection point  $(U_x, I_x)$  of two static characteristics with two identical parameters of both sub-models

$$k_1 = U_x I_x = k_{1M} = k_{1C} \tag{33}$$

$$k_3 = \frac{U_x}{I_x} = k_{3M} = k_{3C} \tag{34}$$

Then the limit current (29) is formulated as:

$$I_0 = \left[ \left( \frac{k_3}{k_1} \right)^{\frac{m_M + 2}{m_M + n_M + 2} - \frac{m_C + 2}{m_C + n_C + 2}} \right]^{\frac{1}{q_C - q_M}} \tag{35}$$

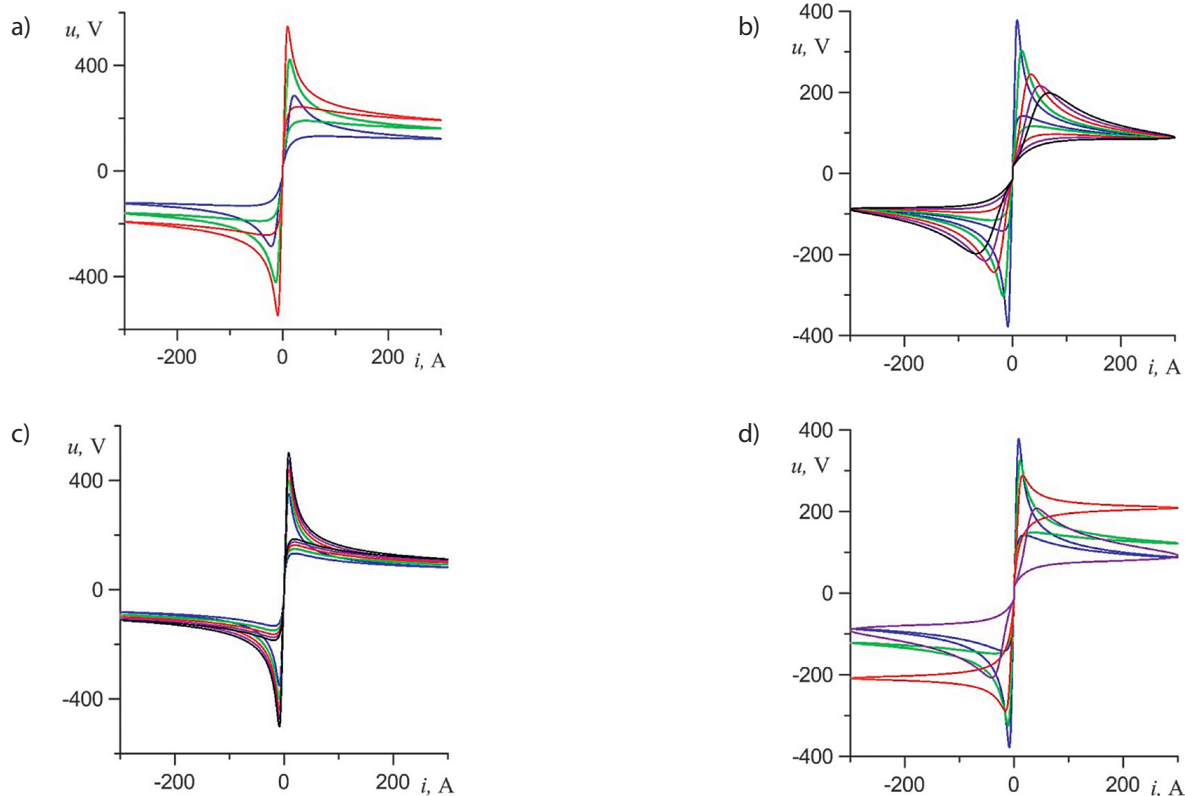


Fig. 2. Families of dynamic voltage-current characteristics of the mathematical arc model (8): a) with variable coefficient  $k_1$  ( $(k_2 = 2, k_3 = 12,5, m = 1, n = 2)$ , NB -  $k_1 = 3000$ , GR -  $k_1 = 5000$ , RE -  $k_1 = 7000$ ); b) with variable coefficient  $k_2$  ( $(k_1 = 3000, k_3 = 12,5, m = 2, n = 2)$ , NB -  $k_2 = 1$ , GR -  $k_2 = 2$ , RE -  $k_2 = 4$ , PU -  $k_2 = 6$ , BL -  $k_2 = 8$ ); c) with variable coefficient  $k_3$  ( $(k_1 = 3000, k_2 = 1, m = 2, n = 2)$ , NB -  $k_3 = 10$ , GR -  $k_3 = 15$ , RE -  $k_3 = 20$ , PU -  $k_3 = 25$ , BL -  $k_3 = 30$ ); d) with variable exponents  $m$  and  $n$  ( $(k_1 = 3000, k_2 = 1, k_3 = 12,5)$ , NB -  $(m = 2, n = 2)$ , GR -  $(m = 1, n = 2)$ , RE -  $(m = 0, n = 2)$ , PU -  $(m = 0, n = 1)$ )

Whereas the limit conductance (32) is described by the formula:

$$G_0 = \left( k_3^{\frac{n_M}{m_M+2} - \frac{n_C}{m_C+2}} \right)^{\frac{1}{\frac{n_M}{m_M+2} - \frac{n_C}{m_C+2}}} = k_3 \quad (36)$$

Parameters  $k_{2M}$  and  $k_{2C}$  – are related to the suppression of dynamic process changes in the low-current and high-current ranges, therefore, according to experimental results [17] they should be different in the hybrid model ( $k_{2M} > k_{2C}$ ). Then, exponents,  $m_M$  and  $n_M$  shall be selected of declining characteristics in the low-current range, and exponents  $m_C$  and  $n_C$  of flat or rising characteristics in the high-current range.

#### 4. Results of simulation tests of electric arc models

To obtain the dynamic characteristics of an arc, a computer macro model was created of the circuit made up of a sinusoidal current source with 300 A amplitude and 50 Hz frequency connected to the electric arc model described by equation (16) or (19). A non-linear element representing the assumed sum of the near-electrode voltage drops  $U_{AK} = 15$  V was included in the arc circuit. The

sum only shifts the column characteristics without disturbing their shape. Then the processes were simulated and changes over time in the current and resultant arc voltage were recorded. Fig. 2 shows families of dynamic voltage-current characteristics corresponding to various variants of the set of parameters of functions approximating the power changes in the energy balance equation (1). In order not to obscure the drawings, the digital marking of curves has been abandoned. Their descriptions use abbreviated color markings: navy blue – NB, green – GR, red – RE, purple – PU, black – BL.

To demonstrate the possibility of using the model to approximate the increasing voltage-current characteristics, processes in the circuit were simulated with an arc model with appropriate parameter values. The obtained families of characteristics are shown in Fig. 3. Such curve shapes can be useful in building hybrid models for wide forcing current amplitude ranges.

By the parallel combination of two mathematical arc models, different or similar but with different parameters and additionally activated by weighting function (30), hybrid models can be created. This was done using sub-models in the differential form (23) and (24) and the integral form (26) and (27). Hybrid

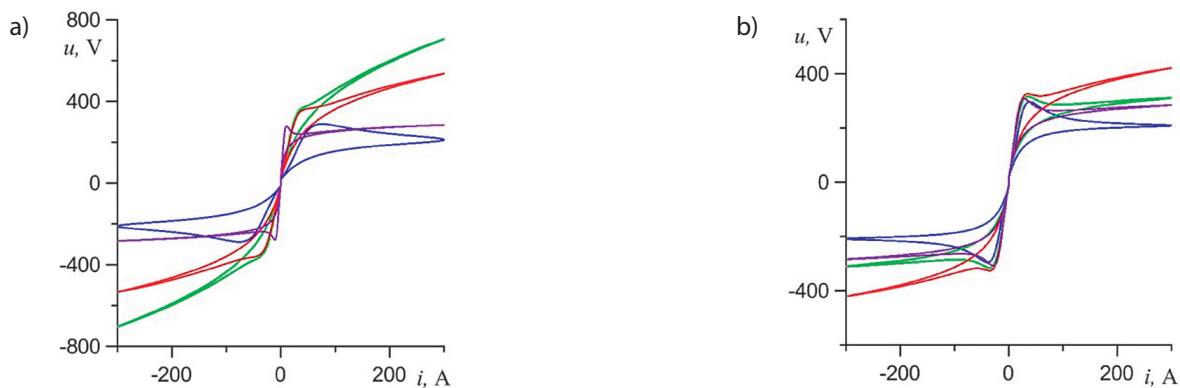


Fig. 3. Families of dynamic voltage-current characteristics of the mathematical arc model (8) with variable exponents  $m$  and  $n$ , ( $k_1 = 3000, k_2 = 5, k_3 = 12,5$ ): a) NB – ( $m = 0, n = 2$ ), GR – ( $m = 0, n = 3$ ), RE – ( $m = 0, n = 4$ ), PU – ( $m = 0, n = 5$ ); b) NB – ( $m = 1, n = 3$ ), GR – ( $m = 1, n = 4$ ), RE – ( $m = 1, n = 5$ ), PU – ( $m = 2, n = 5$ )

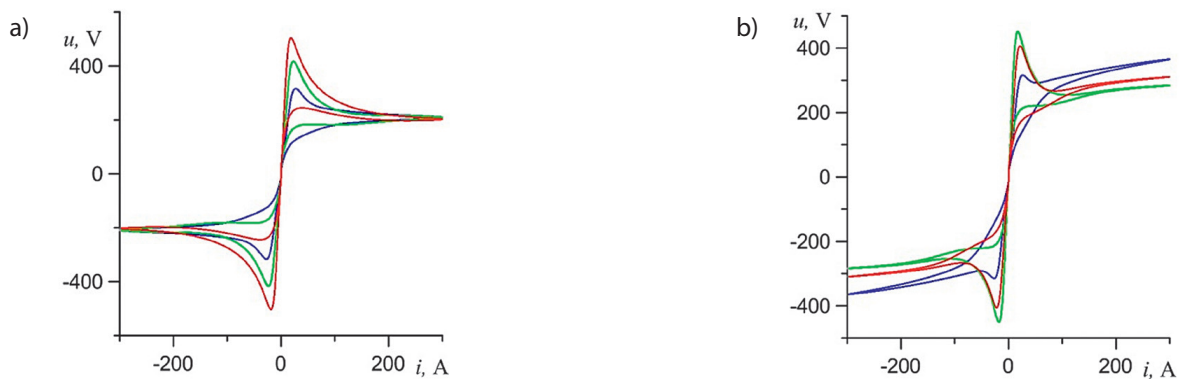


Fig. 4. Families of dynamic voltage-current characteristics of the hybrid mathematical arc model (19)-(23) ( $k_{2M} = 4, m_M = 2, n_M = 2, k_{1C} = 3000, k_{2C} = 2, k_{3C} = 12,5, k_I = 0,5, g_{rez} = 1 \cdot 10^{-2}$  S): a) with preset coefficients: NB – ( $k_{1M} = 4000, k_{3M} = 20, m_C = 0, n_C = 2$ ), GR – ( $k_{1M} = 5000, k_{3M} = 30, m_C = 0, n_C = 2$ ), RE – ( $k_{1M} = 7000, k_{3M} = 30, m_C = 0, n_C = 2$ ); b) with preset coefficient  $k_{1M}$  and variable exponents: NB – ( $k_{1M} = 4000, k_{3M} = 20, m_C = 0, n_C = 3$ ), GR – ( $k_{1M} = 5000, k_{3M} = 30, m_C = 1, n_C = 4$ ), RE – ( $k_{1M} = 7000, k_{3M} = 20, m_C = 2, n_C = 5$ )

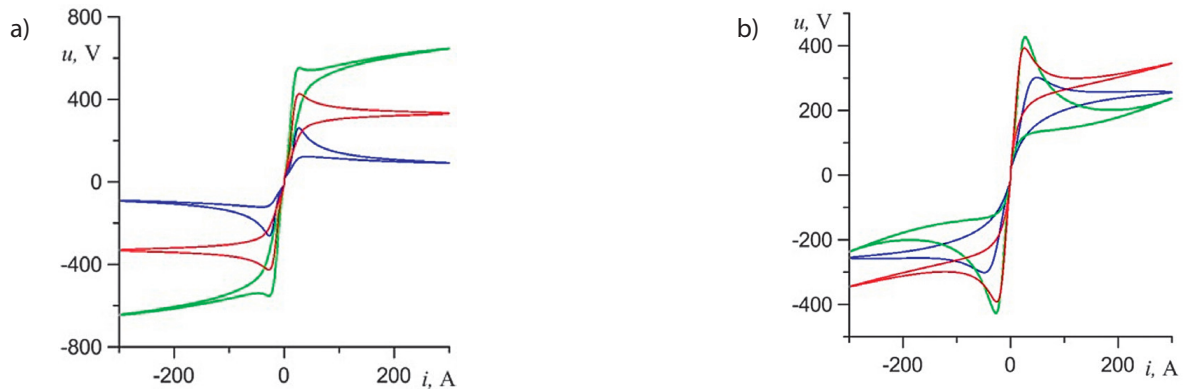


Fig. 5. Families of dynamic voltage-current characteristics of the hybrid mathematical arc model (23) and (24), ( $g_{rez} = 1 \cdot 10^{-2} S$ ): a) ( $k_i = 0,5$ ) under assumptions (25) and (29) and with preset coefficients: NB – ( $k_{1M} = k_{1C} = 3000, k_{2M} = 5, k_{2C} = 2, k_{3M} = k_{3C} = 15, m_M = 1, n_M = 2, m_C = 2, n_C = 2$ ), GR – ( $k_{1M} = k_{1C} = 5000, k_{2M} = 5, k_{2C} = 2, k_{3M} = k_{3C} = 20, m_M = 1, n_M = 2, m_C = 0, n_C = 2$ ), RE – ( $k_{1M} = k_{1C} = 7000, k_{2M} = 6, k_{2C} = 4, k_{3M} = k_{3C} = 25, m_M = 1, n_M = 2, m_C = 1, n_C = 4$ ); b) under assumptions (31) and (32) and with preset coefficients: NB – ( $k_{1M} = k_{1C} = 4000, k_{2M} = 5, k_{2C} = 2, k_{3M} = k_{3C} = 15, m_M = 1, n_M = 2, m_C = 0, n_C = 2, k_g = 0,3$ ), GR – ( $k_{1M} = k_{1C} = 6000, k_{2M} = 6, k_{2C} = 2, k_{3M} = k_{3C} = 15, m_M = 2, n_M = 3, m_C = 0, n_C = 3, k_g = 0,6$ ), RE – ( $k_{1M} = k_{1C} = 8000, k_{2M} = 6, k_{2C} = 2, k_{3M} = k_{3C} = 15, m_M = 2, n_M = 1, m_C = 1, n_C = 4, k_g = 0,7$ )

macro models were included in the same AC circuit as before. After selecting appropriate parameters, the families of dynamic voltage-current characteristics were obtained, shown in Fig. 4. They show that it is possible to obtain various curve shapes in the high-current ranges (flat or ascending). Such an extension of the models' approximation capabilities can be useful for accurate mapping of the characteristics of high-current arcs with ascending characteristics.

Similar simulation studies were performed using the hybrid model (26) and (27) and with the assumption of equal parameters  $k_{1M} = k_{1C}$  and  $k_{3M} = k_{3C}$ . Fig. 5a shows the case of dynamic characteristics using weighting function  $\varepsilon_i(i)$ . Whereas Fig. 5b shows characteristics of the hybrid model in which weighting function  $\varepsilon_g(g)$  was used. The shapes of the characteristics of both families indicate great possibilities of approximating the results of experimental studies with the use of hybrid models.

## 5. Conclusions

1. Since the assumed approximations of power balance components are given in the form of power law functions, the existing model of electric arc using its radius as a state variable is suitable for an accurate representation of static voltage-current characteristics only if this dependence is a monotonic function. Therefore only a part of the dynamic voltage-current characteristics is correctly described (either the descending part or the flat part).
2. The combination of the mathematical sub-models of an electric arc with radii as state variables with different parameters into a hybrid model can enable accurate mapping of static voltage-current characteristics with the form of even a non-monotonic function, and thus dynamic voltage-current characteristics of arcs with different shapes. This makes the accurate approximation of the characteristics with two sections: descending and flat, or flat and ascending, or descending and ascending possible.

3. The simplified variant of the hybrid model with the sub-models' two parameters equal also shows great possibilities of mapping the dynamic voltage-current arc characteristics.
4. The differential and integral forms of the mathematical models of an electric arc with a radius as a state variable make it possible to create various arc macro models using controlled voltage or current sources, and thus to obtain various performance of simulation programs in terms of stability and duration of numerical calculations.

## REFERENCES

1. Pentegov I.V., Sydorets V.N., Comparative analysis of models of dynamic welding arc, *The Paton Welding Journal*, No. 12, 2015, pp. 45–48.
2. Lin D., Ron Hui S.Y., Chua L.O., Gas discharge lamps are volatile memristors, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Regular Papers*, Vol. 61, No. 7, 2014, pp. 2066–2073.
3. Shvartsas M., Ben-Yaakov S., A SPICE compatible model of high intensity discharge lamps, 30<sup>th</sup> Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference, Record. (Cat. No.99CH36321), pp. 1037–1042. (DOI:10.1109/PESC.1999.785639).
4. Sawicki A., Classic and Modified Mathematical models of an Electric Arc, *Biuletyn Instytutu Spawalnictwa*, No. 4, 2019, pp. 67–73. (DOI: 10.17729/ebis.2019.4/7).
5. Sawicki A., Haltof M., Spectral and integral methods of determining parameters in selected electric arc models with a forced sinusoid current circuit, *Archives of Electrical Engineering*, Vol. 65, No. 1, 2016, pp. 87–103. (DOI: 10.1515/aee-2016-0007).
6. Janowski T., Jaroszyński L., Stryczewska H.D., Modification of the Mayr's electric arc model for gliding arc analysis, XXVI International Conference on Phenomena in Ionized Gases, Nagoya, Japan 2001/7/17, pp. 341–342 (2001).

7. Awagan G.R., Thosar A.G., Mathematical Modeling of Electric Arc Furnace to Study the Flicker, *International Journal of Scientific & Engineering Research*, Vol. 7, Issue 5, 2016, pp. 684–695.
8. Grabowski D., Walczak J., Klimas M., Electric arc furnace power quality analysis based on a stochastic arc model, Conference: 2018 IEEE International Conference on Environment and Electrical Engineering and 2018 IEEE Industrial and Commercial Power Systems Europe (IEEEIC/I&CPS Europe) (DOI: 10.1109/IEEEIC.2018.8494547).
9. Grabowski D., Walczak J., Deterministic model of electric arc furnace – a closed form solution, *COMPEL – The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, Vol. 32, No. 4, 2013, pp. 1428–1436.
10. Grabowski D., Walczak J., Analysis of deterministic model of electric arc furnace. 10<sup>th</sup> International Conference on Environment and Electrical Engineering, Rome, Italy, 8–11 May 2011 (DOI: 10.1109/IEEEIC.2011.5874805).
11. Grabowski D., Selected applications of stochastic approach in circuit theory. Monograph, WPŚI, Gliwice 2015.
12. Phillips R.L., Theory of the non-stationary arc column, *British Journal of Applied Physics*, Vol. 18, No. 1, 2002, pp. 65–78.
13. King-Jet Tseng, Yaoming Wang D., Mahinda Vilathgamuwa, An experimentally verified hybrid Cassie-Mayr electric arc model for power electronics simulations, *IEEE Transactions on Power Electronics*, Vol. 12, No. 3, 1997, pp. 429–436.
14. Sawicki A., Funkcje wagowe w modelach hybrydowych łuku elektrycznego [Weighting functions in hybrid models of electric arc], *Śląskie Wiadomości Elektryczne*, No. 5 (104), 2012, pp. 15–19.
15. Acha E., Semlyen A., Rajakovic N., A harmonic domain computational package for nonlinear problems and its application to electric arcs, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 5, Issue: 3, 1990, pp. 1390–1397 (DOI: 10.1109/61.57981).
16. Kopersak V.M., The theory of welding processes-1, KPI, Kiev (2011). [in Ukrainian].
17. Kalasek V., Measurements of time constants on cascade d.c. arc in nitrogen, TH-Report 71-E18, Eindhoven, 1971, pp. 1–30.
18. Voronin A.A., Improving the efficiency of contact-extinguishing systems of high-current switching devices with an extending arc, Abstract of thesis, Samara (2009) [in Russian].
19. Katsaounis A., Heat flow and arc efficiency at high pressures in argon and helium tungsten arcs, *Welding Research Supplement I*, September 1993, pp. 447–454.
20. Sawicki A., Improvements of Hybrid Models of the Electric Arc of Variable Geometrical Parameters, 2018 Conference on Electrotechnology: Processes, Models, Control and Computer Science (EPMCCS) (IEEE Xplore Digital Library, DOI: 10.1109/EPMCCS.2018.8596459).
21. Marciniak L., Implementacje modeli łuku ziemnozwarciowego w programach PSCAD i Matlab/Simulink [Implementation of arc earth-fault models in PSCAD and Matlab/Simulink], *Przegląd Elektrotechniczny*, No. 9a, 2012, pp. 126–129.
22. Marciniak L., Model of the arc earth-fault for medium voltage networks, *Central European Journal of Engineering*, No. 1(2), pp. 168–173 (DOI: 10.2478/s13531-011-0020-y).

## Antoni Sawicki

Association of Polish Electrical Engineers, Częstochowa Branch

e-mail: sawicki.a7@gmail.com

Graduated from the Faculty of Electrical Engineering at Czestochowa University of Technology (1977). Defended his doctoral (1988) and later habilitation (2000) theses at Moscow Energy Institute. Author and co-author of over 300 scientific publications, including 7 monographs and 2 textbooks. Has participated in over 50 national and international conferences. Also, a member of numerous scientific committees. Has also got 17 patents to his credit. Was the manager and a contractor of 5 research grants. Since 1998 a member of the Presidium of the Polish Electrotechnological Committee. Was a correspondent member of the Russian Academy of Electrical Sciences (2012–2015), and since 2016 has been a full member. Worked 42 years at the Częstochowa University of Technology. He was the head of a unit, director of an institute, head of a department. His scientific achievements include publications in the field of dynamics of nonlinear systems and arc and plasma heating.



This is a supporting translation of the original text published in this issue of "Acta Energetica" on pages 57–64. When referring to the article please refer to the original text.

PL

## Model matematyczny łuku elektrycznego w postaciach różniczkowej i całkowej z promieniem kolumny plazmowej jako zmienną stanu

### Autor

Antoni Sawicki

### Słowa kluczowe

łuk elektryczny, model hybrydowy, model z promieniem jako zmienną stanu

### Streszczenie

Opisano założenia wstępne niezbędne do utworzenia znanego modelu matematycznego łuku elektrycznego o promieniu jako zmiennej stanu. Oprócz postaci różniczkowej zaprezentowano także postać całkową tego modelu. Utworzono także model hybrydowy łuku w postaciach różniczkowej i całkowej. Zastosowano funkcje wagowe zależne albo od natężenia prądu, albo od wypadkowej konduktancji. W sposób symulacyjny zbadano efektywność stosowania zaprezentowanych modeli matematycznych do odwzorowania charakterystyk napięciowo-prądowych łuku elektrycznego w różnych zakresach zmian wartości prądu.

Data wpływu do redakcji: 25.08.2020

Data wpływu do redakcji po recenzjach: 23.09.2020

Data akceptacji artykułu: 24.09.2020

Data publikacji online: 21.12.2020

### 1. Wstęp

W łuku elektrycznym pod wpływem zmian wymuszenia prądowego zmienia się wiele parametrów materii międzyelektrodowej. W zależności od jej lokalizacji w obszarze wyładowania bądź działania jeszcze innych czynników zewnętrznych zmiany te mogą być niewielkie lub bardzo znaczące. Przyjmuje się, że plazma nierównowagowa w warstwach przyelektrodowych prawie się nie zmienia i dlatego spadki napięć na nich nie zależą od natężenia prądu. Natomiast temperatura plazmy i rozmiary kolumny łukowej mogą ulegać dużym zmianom. W zależności od potrzeb opisy matematyczne tych zmian mogą być bardzo szczegółowe lub uproszczone. W rozważaniach szczegółowych najczęściej wykorzystuje się modele polowe, analizując różne zjawiska w różnych podobszarach łuku. Natomiast przyjęcie wielu założeń upraszczających umożliwia utworzenie modeli jednowymiarowych. Jako zmienne stanu przyjmowane są wtedy różne wielkości fizyczne lub wielkości fikcyjne, jak np. prąd wirtualny w modelu Pentegowa [1]. Inercyjną odpowiedzią na chwilowe zmiany prądu są zmiany średniej temperatury plazmy. Tworzone modele matematyczne

z temperaturą jako zmienną stanu niekiedy wykorzystuje się do symulowania procesów w obwodach z lampami wyładowczymi [2, 3]. Największe rozpowszechnienie w modelowaniu urządzeń elektrotechnologicznych mają jednak modele konduktancyjne i ekwiwalentne w stosunku do nich modele rezystancyjne [4, 5]. Zwykle są one zapisywane w postaci różniczkowej. W symulowaniu procesów technologicznych w niektórych urządzeniach ze słabo stabilnymi łukami (np. w plazmotronach *gliding arc*) przydają się modele konduktancyjne w wersji całkowej [6]. Do modelowania łuku stalowniczych pieców łukowych niekiedy wykorzystuje się modele o promieniu jako zmiennej stanu w postaci różniczkowej [7, 8]. W zależności od wartości wykładników funkcji potęgowych promienia odwzorowywane są różne właściwości fizyczne kolumny plazmowej [9, 10, 11].

Ze względu na przyjęte założenia wstępne proste modele matematyczne łuku mogą wystarczająco dobrze aproksymować charakterystyki łuków w określonych zakresach zmian prądu wymuszającego. Tak na przykład model Mayra jest przydatny do opisu łuku słaboprądowego, a model Cassiego do opisu właściwości elektrycznych łuku silnoprądowego [5].

Oczywiście same pojęcia „łuk słaboprądowy” lub „łuk silnoprądowy” są względne. Zależą one od mocy i konstrukcji urządzenia, warunków jego pracy itd. Charakterystyki napięciowo-prądowe statyczne łuku słaboprądowego są zwykle stromo opadające. W modelowaniu takich łuków można pomijać zjawisko promieniowania kolumny [12]. Natomiast charakterystyki statyczne łuku silnoprądowego są płaskie lub wznoszące.

Do odwzorowania właściwości elektrycznych łuków w szerokim zakresie zmian prądu stosowane są modele hybrydowe [13]. Kojarzą one podmodele słaboprądowy i silnoprądowy za pomocą odpowiedniej funkcji wagowej [14].

W niniejszym artykule zaprezentowano warianty różniczkowe i całkowe prostych i hybrydowych modeli matematycznych łuku, w których jako zmienną stanu potraktowano promień kolumny plazmowej. W wyniku przeprowadzonych symulacji otrzymano rodziny charakterystyk napięciowo-prądowych statycznych i dynamicznych. Wskazują one na możliwości wykorzystania opisanych modeli do aproksymowania danych pochodzących z badań eksperymentalnych urządzeń łukowych i plazmowych, pracujących w szerokich

This is a supporting translation of the original text published in this issue of "Acta Energetica" on pages 57–64. When referring to the article please refer to the original text.

PL

zakresach zmian prądu i ciśnienia gazu roboczego.

## 2. Model matematyczny łuku elektrycznego o promieniu jako zmiennej stanu

Założeniem wejściowym do opracowania modeli matematycznych łuku elektrycznego jest bilans energii. Można go zapisać w postaci strumieni energii:

$$p_1(t) + p_2(t) = p_3(t) \quad (1)$$

gdzie:  $p_1$  – moc cieplna rozproszona;  $p_2$  – moc cieplna zmagazynowana w kolumnie łuku;  $p_3$  – moc elektryczna dostarczona,  $t$  – czas. Moc rozproszona zależy od temperatury plazmy  $p_1(T)$ . Ponieważ w stanach pracy urządzeń z łukami silnoprądowymi charakterystyki gazów słabo zależą od temperatury, to ta zależność jest pomijana. Przyjmuje się następującą aproksymację zależności mocy rozpraszanej od promienia kolumny łuku:

$$p_1(t) = k_1 r^n \quad (2)$$

Jeśli temperatura otoczenia jest wysoka, to przekazywanie ciepła jest mało efektywne, a wtedy  $p_1 = f(r) = k_1 r^0 = \text{const}$  i stąd  $n = 0$ ;

Jeżeli łuk jest długi, to  $p_1 = f(S_b)$ , gdzie  $S_b$  – pole powierzchni bocznej kolumny łuku. Z tego wynika, że  $p_1 = f(r) = k_1 r^1$ , a stąd  $n = 1$ ;

Jeżeli łuk jest krótki, to  $p_1 = f(S_p) = k_1 r^2$ , gdzie  $S_p$  – pole powierzchni przekroju kolumny łuku (także płamy elektrodowej). Z tego wynika, że  $n = 2$ .

Moc gromadzoną w kolumnie opisuje zależność

$$p_2(t) = \frac{dQ}{dt} \quad (3)$$

gdzie:  $Q$  – entalpia plazmy. Wielkość ta zależy od objętości kolumny  $Q \propto V \propto r^2$ , dlatego można ją zapisać  $Q = 0,5 k_2 r^2$ , a stąd

$$p_2(t) = k_2 r \frac{dr}{dt} \quad (4)$$

Moc elektryczną dostarczaną do kolumny łuku można opisać zależnością

$$p_3(t) = ui = r_a i^2 \quad (5)$$

gdzie:  $r_a$  – rezystancja chwilowa kolumny łuku.

Rezystancję kolumny określa wzór

$$r_a = \frac{\rho(r)l}{S(r)} \quad (6)$$

gdzie:  $l$  – długość łuku;  $S$  – pole przekroju kolumny;  $\rho$  – rezystywność plazmy. Zakładamy, że  $l = \text{const}$ . Jeśli przyjąć zależności  $S = \pi r^2$  i w wygodnej postaci wzór na  $\rho = \pi k_3 l^{-1} r^{-m}$ , to otrzymamy

$$p_3(t) = \frac{k_3 / r^m}{r^2} i^2 = \frac{k_3}{r^{m+2}} i^2 \quad (7)$$

Ogólną postać modelu matematycznego łuku z promieniem jako zmienną stanu wyraża równanie różniczkowe zwyczajne nieliniowe [7, 15]

$$k_1 r^n + k_2 r \frac{dr}{dt} = \frac{k_3}{r^{m+2}} i^2 \quad (8)$$

Wartość napięcia na kolumnie łuku można obliczyć z zależności

$$u = \frac{i}{g_a} = r_a i = \frac{k_3}{r^{m+2}} i \quad (9)$$

Stąd konduktancję można wyrazić jako funkcję promienia kolumny

$$g_a = \frac{r^{m+2}}{k_3} \quad (10)$$

lub odwrotnie

$$r = (k_3 g_a)^{\frac{1}{m+2}} \quad (11)$$

W stanie statycznym ( $dr/dt = 0$ ) i wtedy  $p_1 = p_3$ . Po wykorzystaniu zależności (2) i (5) można zapisać

$$p_1 = UI = k_1 r^n = k_3 \frac{I^2}{r^{m+2}} = p_3 = \frac{U}{I} I^2 \quad (12)$$

Stąd wynika zależność

$$\left(\frac{UI}{k_1}\right)^{m+2} \cdot \left(\frac{U}{k_3 I}\right)^n = 1 \quad (13)$$

Ponadto z równania (8) otrzymujemy wzór na promień kolumny w funkcji prądu łuku

$$R_r = \left(\frac{k_3}{k_1} I^2\right)^{\frac{1}{m+n+2}} = k_4 I^{\frac{2}{m+n+2}} \quad (14)$$

gdzie:  $k_4 = \frac{m+n+2}{2} \sqrt{k_3/k_1}$ . Według rozważań teoretycznych i badań eksperymentalnych [16] w określonych warunkach fizyko-chemicznych w zakresie silnoprądowym można stosować aproksymację  $R_r \approx kI^{2/3}$ . Natomiast w stanach dynamicznych zmniejszanie wartości natężenia prądu prowadzi w sposób inercyjny nie tylko do obniżenia

temperatury plazmy, ale jednocześnie do zmniejszenia sił ściskających kolumnę. Skutkiem tego powinno być zwiększenie promienia kolumny łuku  $r(i)$ , szczególnie w chwili przejścia prądu przez wartość zerową. Świadczą o tym badania eksperymentalne łuku obejmujące wyznaczanie funkcji tłumienia [17]. Wiadomo przecież, że funkcja ta bywa proporcjonalna do pola przekroju kolumny łuku [18]. Wzór (11) nie opisuje dokładnie tego zjawiska, gdyż  $r \rightarrow 0$  gdy  $g_a \rightarrow 0$ .

Na podstawie (9) i (12) wzór na charakterystykę napięciowo-prądową statyczną ma postać

$$U = \frac{k}{I^q} \quad (15)$$

$$\text{gdzie: } q = \frac{m+2-n}{m+2+n}, k = k_3 \left(\frac{k_3}{k_1}\right)^{\frac{-m-2}{m+2}}$$

Kształt tej charakterystyki zależy od wykładników  $m$  i  $n$  funkcji potęgowej. W tab. 1 zamieszczono wartości parametru  $q$  w zależności od wartości wykładników potęgowych [15].

Na podstawie uproszczonych analiz fizycznych w literaturze [15] rozpatrywano przypadki aproksymacji (2) i (7) za pomocą funkcji potęgowych, w których  $0 \leq m \leq 2$  i  $0 \leq n \leq 2$ . Przypadek, w którym  $q = 0$ , odpowiada napięciu  $U = \text{const}$ . W pozostałych przypadkach z  $n \leq 2$  otrzymuje się funkcje, których wykresy są podobne do krzywej hiperbolicznej. Płaska charakterystyka odpowiada łukom silnoprądowym, a opadająca łukom słaboprądowym. Charakterystykę wznoszącą łuków silnoprądowych można otrzymać, jeśli  $q < 0$ . Taki przypadek nie był rozpatrywany w [15]. Możliwe są jednak dodatkowe kanały rozpraszania ciepła z kolumny łuku [19]. Wznoszące się charakterystyki

n\m	Wartość q		
	0	1	2
0	1	1	1
1	1/3	1/2	3/5
2	0	1/5	1/3
3	-1/5	0	1/7
4	-1/3	-1/7	0
5	-3/7	-1/4	-1/9

Tab. 1. Wpływ wartości wykładników potęgowych funkcji mocy (2) i (7) na wartości wykładnika potęgowego  $q$  funkcji napięcia (15)

This is a supporting translation of the original text published in this issue of "Acta Energetica" on pages 57–64. When referring to the article please refer to the original text.

PL

statyczne łuku obserwowane są w badaniach łuków z zaostrozonymi elektrodami i łuków w gazach o wysokim ciśnieniu. Świadczyć to może o podwyższonej konwekcji w obszarach przyelektrodowych (głównie w obszarze przykatodowym) i o zwiększonym poziomie radiacji bardzo ściśniętej plazmy termicznej. Związek mocy dyssypacji z rozmiarami geometrycznymi kolumny cylindrycznej (2) może stanowić ograniczenie w opisie sposobów dyssypacji ciepła. Aproxymacje danych pomiarowych mogą prowadzić do funkcji o wyższych wykładnikach  $n$ , w tym również o wykładnikach ułamkowych. Jednak takie duże wartości  $n$  mogą utrudniać fizyczną interpretację modelu matematycznego.

W celu utworzenia makromodelu komputerowego przekształcono model różniczkowy (8) do postaci

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k_3}{k_2} \frac{i^2}{r^{m+3}} - \frac{k_1}{k_2} r^{n-1} \quad (16)$$

Po jego scałkowaniu otrzymujemy

$$r = \int_0^t \left( \frac{k_3}{k_2} \frac{i^2}{r^{m+3}} - \frac{k_1}{k_2} r^{n-1} \right) d\tau + r_0 \quad (17)$$

Konduktancję tego modelu wyraża zależność

$$g_a = \frac{r^{m+2}}{k_3} = \frac{1}{k_3} \left[ \int_0^t \left( \frac{k_3}{k_2} \frac{i^2}{r^{m+3}} - \frac{k_1}{k_2} r^{n-1} \right) d\tau + r_0 \right]^{m+2} \quad (18)$$

którą wykorzystuje się w utworzeniu makromodelu ze sterowanym źródłem napięciowym  $u = i/g_a$ .

Model różniczkowy łuku (8) można przekształcić do postaci całkowej, dzieląc to równanie przez  $k_2 r^2$  i całkując po  $t$

$$r = r_0 \exp \left[ \int_0^t \left( \frac{k_3}{k_2} \frac{i^2}{r^{m+4}} - \frac{k_1}{k_2} r^{n-2} \right) d\tau \right] \quad (19)$$

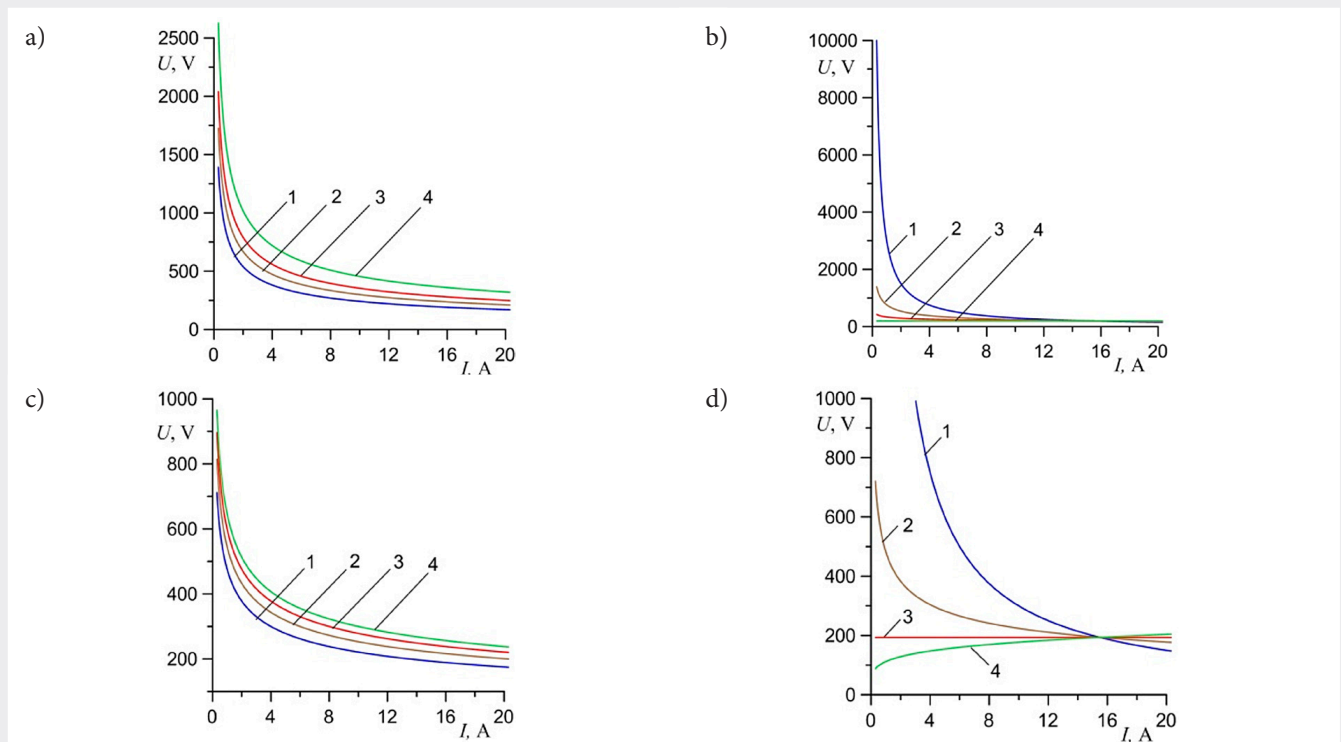
Taka postać jest niekiedy wygodniejsza w obliczeniach numerycznych. Konduktancję tego modelu można wyrazić zależnością

$$g_a = \frac{r^{m+2}}{k_3} = \frac{1}{k_3} \left[ r_0 \exp \left[ \int_0^t \left( \frac{k_3}{k_2} \frac{i^2}{r^{m+4}} - \frac{k_1}{k_2} r^{n-2} \right) d\tau \right] \right]^{m+2} \quad (20)$$

Wykorzystuje się ją w tworzonym makromodelu ze sterowanym źródłem prądowym  $i = ug$ .

Na rys. 1 pokazano rodziny charakterystyk napięciowo-prądowych statycznych prostego modelu matematycznego łuku o postaci różniczkowej (8) lub całkowej (19). Opisane są one funkcją (13) i odpowiadają różnym wariantom zbioru parametrów funkcji aproksymujących zmiany mocy w równaniu bilansu energetycznego (1). Na rysunkach 1a, 1b i 1c mają one kształty zbliżone do funkcji hiperbolicznej. Świadczy to o ich przydatności do aproksymowania charakterystyk statycznych, szczególnie łuków słaboprądowych. Tylko w przypadku przedstawionym na rys. 1d możliwe są warianty charakterystyk będących funkcjami narastającymi lub stałymi, co jest obserwowane w łukach silnoprądowych. Ze względu na dążenie do pokazania zróżnicowania charakterystyk statycznych rozpatrzono stosunkowo mały zakres zmian wartości prądu.

Na rys. 1d widać, że charakterystyki napięciowo-prądowe statyczne przecinają się w jednym punkcie o współrzędnych  $(I_x, U_x)$ . W ogólnym przypadku



Rys. 1. Rodziny charakterystyk napięciowo-prądowych statycznych modelu matematycznego łuku (8) opisane wzorem (13): a) ze zmiennym współczynnikiem  $k_1$  ( $(k_3 = 12,5, m = 1, n = 1)$ , 1 -  $k_1 = 3000$ , 2 -  $k_1 = 4000$ , 3 -  $k_1 = 5000$ , 4 -  $k_1 = 7000$ ); b) ze zmiennym wykładnikiem  $n$  ( $(k_1 = 3000, k_3 = 12,5, m = 1)$ , 1 -  $n = 0$ , 2 -  $n = 1$ , 3 -  $n = 2$ , 4 -  $n = 3$ ); c) ze zmiennym współczynnikiem  $k_3$  ( $(k_1 = 3000, m = 2, n = 2)$ , 1 -  $k_3 = 12$ , 2 -  $k_3 = 18$ , 3 -  $k_3 = 24$ , 4 -  $k_3 = 30$ ); d) ze zmiennym wykładnikiem  $n$  ( $(k_1 = 3000, k_3 = 12,5, m = 0)$ , 1 -  $n = 0$ , 2 -  $n = 1$ , 3 -  $n = 2$ , 4 -  $n = 3$ )

This is a supporting translation of the original text published in this issue of "Acta Energetica" on pages 57–64. When referring to the article please refer to the original text.

PL

z dowolnymi współczynnikami  $k_1$  i  $k_3$  można je określić ze wzorów

$$I_x = \sqrt{\frac{k_1}{k_3}} \quad (21)$$

$$U_x = \sqrt{k_1 k_3} \quad (22)$$

Dla danych na rys. 1d współrzędne punktu przecięcia wynoszą (15,492 A, 193,65 V).

### 3. Model hybrydowy łuku jako skojarzenie dwóch podmodeli z promieniami jako zmiennymi stanu

W modelach matematycznych Nowikowa-Schellhase, Pentegowa i Mayra-Pentegowa do aproksymowania charakterystyk wielkości fizycznych teoretycznie można zastosować dowolne funkcje. Nie tylko są to wielomiany [4, 20], ale i funkcje wykładnicze [21, 22]. Wykorzystanie tylko najprostszych funkcji potęgowych [9, 15], a więc monotonicznych, znacznie ogranicza możliwości odwzorowania właściwości elektrycznych łuku przez tworzone makromodele w programach symulacyjnych. Sposób rozszerzenia zakresów zastosowań uproszczonych modeli matematycznych łuku (słabo – i silnoproudowych) polega na ich łączeniu równoległym z aktywacją odpowiedniej konduktancji za pomocą funkcji wagowej.

Ze względu na kształt charakterystyk napięciowo-prądowych podmodele można podzielić na słaboproudowy z konduktancją  $g_M$  i silnoproudowy z konduktancją  $g_C$ . Zależności (16) odpowiadają podmodele

$$g_M = \frac{1}{k_{3M}} \left[ \int_0^i \left( \frac{k_{3M}}{k_{2M}} \frac{i^2}{r^{m_M+3}} - \frac{k_{1M}}{k_{2M}} r^{n_M-1} \right) d\tau + r_{0M} \right]^{m_M+2} \quad (23)$$

jeśli  $q_M > 0$  i  $i < I_0$

$$g_C = \frac{1}{k_{3C}} \left[ \int_0^i \left( \frac{k_{3C}}{k_{2C}} \frac{i^2}{r^{m_C+3}} - \frac{k_{1C}}{k_{2C}} r^{n_C-1} \right) d\tau + r_{0C} \right]^{m_C+2} \quad (24)$$

jeśli  $q_C \leq 0$  i  $i \geq I_0$

gdzie:  $I_0$  – prąd graniczny rozmytego przełączania podmodeli,

$$q_M = \frac{m_M + 2 - n_M}{m_M + 2 + n_M}$$

$$q_C = \frac{m_C + 2 - n_C}{m_C + 2 + n_C}$$

Skojarzenie podmodeli słaboproudowego i silnoproudowego z wykorzystaniem funkcji wagowej  $\varepsilon_i$  tworzy model hybrydowy

$$g_a = (g_{rez} + g_M) \varepsilon_i(i) + g_C [1 - \varepsilon(i)] \quad (25)$$

gdzie:  $g_{rez}$  – konduktancja resztkowa ( $g_{rez} > 0$ ), S;  $\varepsilon_i(i)$  – funkcja wagowa o właściwościach  $\varepsilon_i(0) = 1$  i  $\varepsilon_i(\infty) = 0$ . Zastosowanie konduktancji resztkowej  $g_{rez}$  wyklucza zgaśnięcie łuku podczas przechodzenia prądu przez wartość zerową.

Równoważny model hybrydowy można utworzyć także z użyciem podmodeli w postaciach całkowych. W tym celu wykorzystano zależność (19), otrzymując

$$g_M = \frac{1}{k_{3M}} \left[ r_{0M} \exp \left[ \int_0^i \left( \frac{k_{3M}}{k_{2M}} \frac{i^2}{r^{m_M+4}} - \frac{k_{1M}}{k_{2M}} r^{n_M-2} \right) d\tau \right] \right]^{m_M+2} \quad (26)$$

jeśli  $q_M > 0$  i  $i < I_0$

$$g_C = \frac{1}{k_{3C}} \left[ r_{0C} \exp \left[ \int_0^i \left( \frac{k_{3C}}{k_{2C}} \frac{i^2}{r^{m_C+4}} - \frac{k_{1C}}{k_{2C}} r^{n_C-2} \right) d\tau \right] \right]^{m_C+2} \quad (27)$$

jeśli  $q_C \leq 0$  i  $i \geq I_0$

Do utworzenia modelu hybrydowego (21) można także wykorzystać funkcję wagową  $\varepsilon(i)$  zależną od prądu wypadkowego dwóch podmodeli połączonych równolegle.

Wartość prądu granicznego  $I_0$  można określić jako współrzędną prądową punktu przecięcia charakterystyk statycznych (13) podmodeli

$$U_0 = \frac{k_M}{I_0^{q_M}} = \frac{k_C}{I_0^{q_C}} \quad (28)$$

stąd:

$$I_0 = \left( \frac{k_C}{k_M} \right)^{\frac{1}{q_C - q_M}} \quad (29)$$

gdzie współczynniki:

$$k_M = k_{3M} \left( \frac{k_{3M}}{k_{1M}} \right)^{\frac{-m_M-2}{m_M+n_M+2}}$$

$$k_C = k_{3C} \left( \frac{k_{3C}}{k_{1C}} \right)^{\frac{-m_C-2}{m_C+n_C+2}}$$

Jako funkcję wagową można wybrać zależność:

$$\varepsilon_i(i) = \exp \left( \ln(k_i) \frac{i^2}{I_0^2} \right) \quad (30)$$

Wartość  $k_i$  określa rzędną punktu przełączania funkcji  $\varepsilon_i(I_0) = k_i$ , gdzie  $0 < k_i < 1$ . Ze względu na inercyjność procesów w łuku elektrycznym bardziej fizycznie uzasadniona może być inna funkcja wagowa. Natężenie prądu jest związane z konduktancją łuku. W zakresie słaboproudowym  $g_a \propto i^2$ , a w zakresie silnoproudowym  $g_a \propto i$ . Dlatego niekiedy [20] stosuje się funkcje wagowe zależne od konduktancji wypadkowej w postaci:

$$\varepsilon_g(g_a) = \exp \left( \ln(k_g) \frac{g_M + g_C}{G_0} \right) \quad (31)$$

Wartość  $k_g$  określa rzędną punktu przełączania funkcji  $\varepsilon_g(G_0) = k_g$ , gdzie  $0 < k_g < 1$ . Wielkość  $G_0$  można określić z wykorzystaniem zależności (10) i (12) opisujących równo moce rozpraszane w podmodelach łuku:

$$G_0 = \left( \frac{\frac{n_M}{k_{1C}} \frac{n_M}{k_{3M}^{m_M+2}}}{\frac{n_C}{k_{1M}} \frac{n_C}{k_{3C}^{m_C+2}}} \right)^{\frac{1}{m_M+2} \frac{n_C}{m_C+2}} \quad (32)$$

Zagadnienie doboru parametrów modelu hybrydowego można uprościć, wybierając wspólny punkt przecięcia ( $U_x, I_x$ ) dwóch charakterystyk statycznych z jednocześnie dwoma jedynakowymi parametrami obydwu podmodeli

$$k_1 = U_x I_x = k_{1M} = k_{1C} \quad (33)$$

$$k_3 = \frac{U_x}{I_x} = k_{3M} = k_{3C} \quad (34)$$

Wtedy wzór na prąd graniczny (29) ma postać:

$$I_0 = \left[ \left( \frac{k_3}{k_1} \right)^{\frac{m_M+2}{m_M+n_M+2} \frac{m_C+2}{m_C+n_C+2}} \right]^{\frac{1}{q_C - q_M}} \quad (35)$$

Natomiast konduktancję graniczną (32) opisuje wzór:

$$G_0 = \left( k_3^{\frac{n_M}{m_M+2} \frac{n_C}{m_C+2}} \right)^{\frac{1}{m_M+2} \frac{n_C}{m_C+2}} = k_3 \quad (36)$$

Parametry  $k_{2M}$  i  $k_{2C}$  – związane są z tłumieniem zmian dynamicznych

This is a supporting translation of the original text published in this issue of "Acta Energetica" on pages 57–64. When referring to the article please refer to the original text.

PL

procesów w zakresach słabo – i silno-prądowym, dlatego zgodnie z wynikami badań eksperymentalnych [17] w modelu hybrydowym powinny być one różne ( $k_{2M} > k_{2C}$ ). Następnie dobieramy wykładniki  $m_M$  i  $n_M$  charakterystyki opadającej w zakresie słabo-prądowym i wykładniki  $m_C$  i  $n_C$  charakterystyki płaskiej lub wznoszącej się w zakresie silno-prądowym.

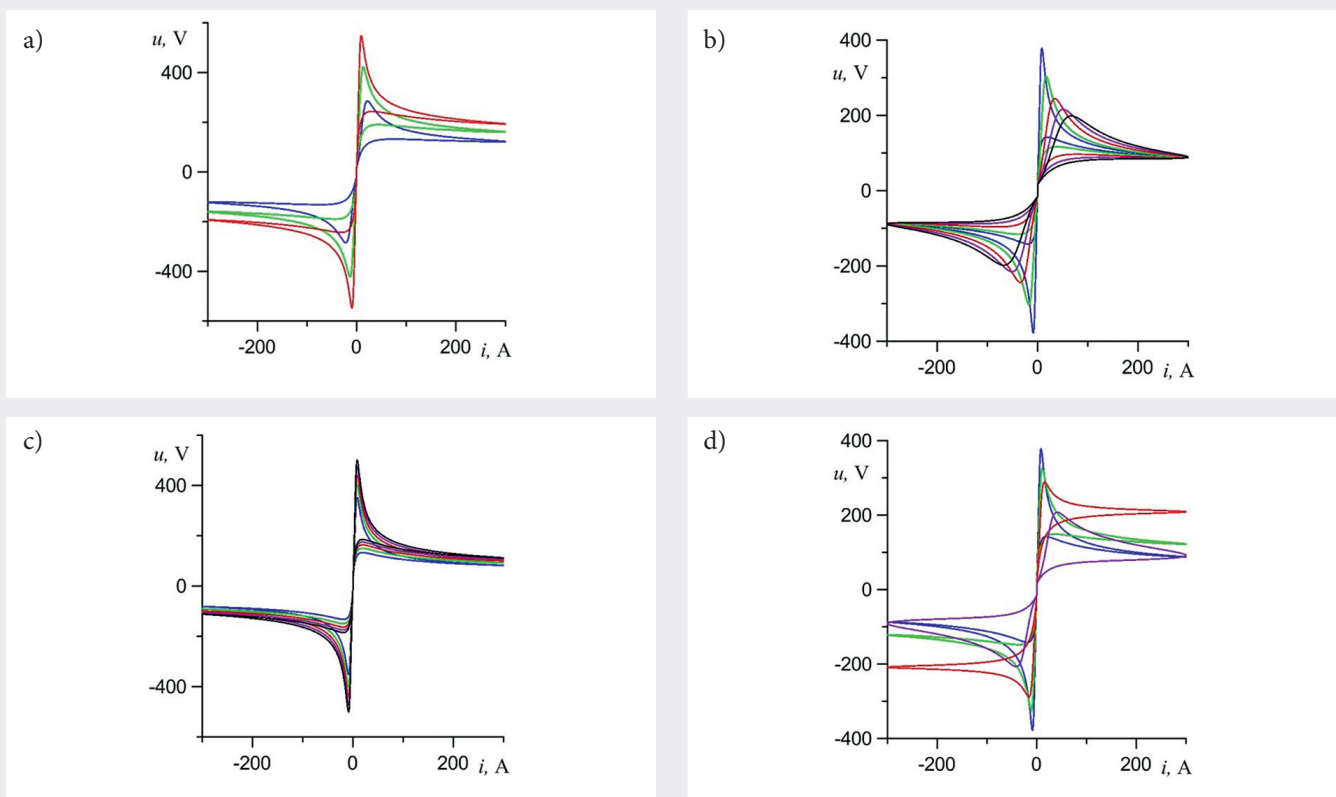
#### 4. Wyniki badań symulacyjnych modeli łuku elektrycznego

W celu uzyskania charakterystyk dynamicznych łuku utworzono makromodel komputerowy obwodu składający się ze źródła prądu sinusoidalnego o amplitudzie 300 A i częstotliwości 50 Hz, połączonego z modelem łuku elektrycznego opisanego równaniem (16) lub (19). W obwód z łukiem włączono element nieliniowy odwzorowujący założoną sumę przeelektrodowych spadków napięcia  $U_{AK} = 15$  V. Wpływa ona tylko na przesunięcie charakterystyk kolumny, nie zaburząc ich kształtu. Następnie przeprowadzono symulacje

procesów, rejestrując zmiany w czasie prądu i wypadkowego napięcia łuku. Na rys. 2 pokazano rodziny charakterystyk napięciowo-prądowych dynamicznych odpowiadające różnym wariantom zbioru parametrów funkcji aproksymujących zmiany mocy w równaniu bilansu energetycznego (1). Aby nie zaciemniać rysunków, zrezygnowano z cyfrowego oznaczania krzywych. W ich opisach zastosowano skrócone oznaczenia kolorów: granatowy – NB, zielony – GR, czerwony – RE, fioletowy – PU, czarny – BL.

W celu pokazania możliwości wykorzystania modelu do aproksymowania narastających charakterystyk napięciowo-prądowych wykonano symulacje procesów w obwodzie z modelem łuku z odpowiednio przyjętymi wartościami parametrów. Uzyskane rodziny charakterystyk pokazano na rys. 3. Takie kształty krzywych mogą być użyteczne w budowie modeli hybrydowych, działających w szerokich zakresach amplitudy prądu wymuszającego.

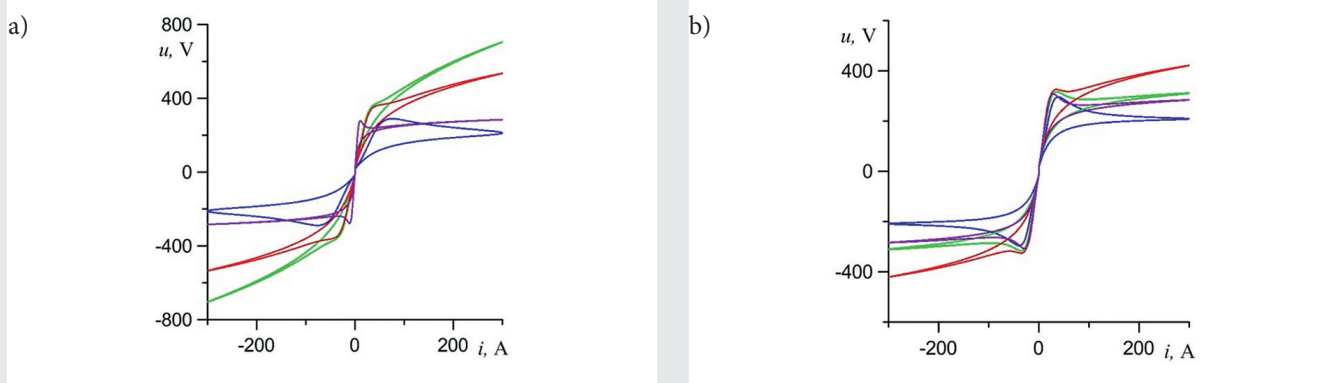
Równoległe połączenie dwóch różnych lub podobnych modeli matematycznych łuków, lecz o różnych parametrach i dodatkowo aktywowanych funkcją wagową (30), umożliwia utworzenie modeli hybrydowych. Dokonano tego, wykorzystując podmodele w postaci różniczkowej (23) i (24) oraz w postaci całkowitej (26) i (27). Makromodele hybrydowe włączano w taki sam obwód prądu przemiennego jak poprzednio. Po dobraniu odpowiednich parametrów uzyskano rodziny charakterystyk napięciowo-prądowych dynamicznych pokazane na rys. 4. Widać z nich, że możliwe jest otrzymanie różnych kształtów krzywych w zakresach silno-prądowych (płaskich lub narastających). Takie rozszerzenie możliwości aproksymacyjnych modeli może być przydatne do dokładnego odwzorowania charakterystyk łuków silnoprądowych o wznoszących się charakterystykach. Podobne badania symulacyjne wykonano z wykorzystaniem modelu hybrydowego (26) i (27) oraz z założeniem równości parametrów  $k_{1M} = k_{1C}$  i  $k_{3M} = k_{3C}$ .



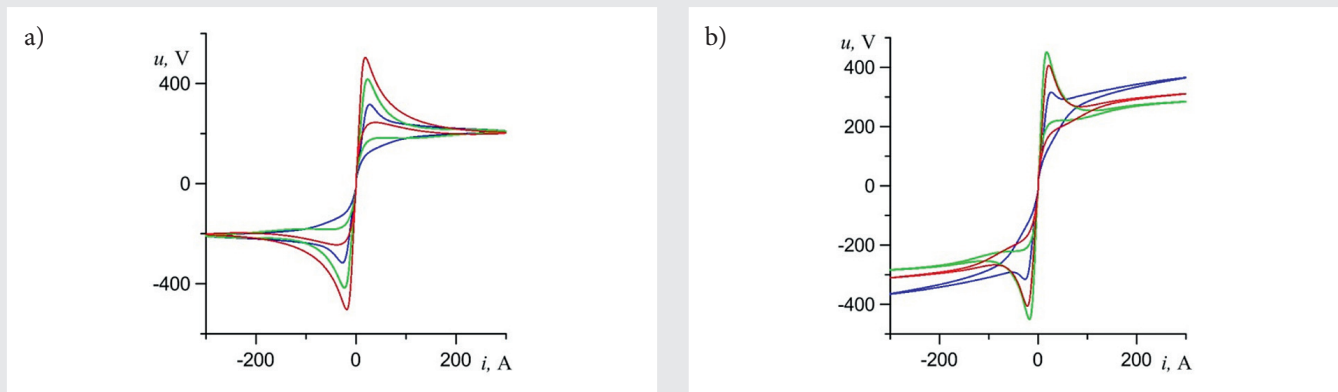
Rys. 2. Rodziny charakterystyk napięciowo-prądowych dynamicznych modelu matematycznego łuku (8): a) ze zmiennym współczynnikiem  $k_1$  ( $(k_2 = 2, k_3 = 12,5, m = 1, n = 2)$ , NB –  $k_1 = 3000$ , GR –  $k_1 = 5000$ , RE –  $k_1 = 7000$ ); b) ze zmiennym współczynnikiem  $k_2$  ( $(k_1 = 3000, k_3 = 12,5, m = 2, n = 2)$ , NB –  $k_2 = 1$ , GR –  $k_2 = 2$ , RE –  $k_2 = 4$ , PU –  $k_2 = 6$ , BL –  $k_2 = 8$ ); c) ze zmiennym współczynnikiem  $k_3$  ( $(k_1 = 3000, k_2 = 1, m = 2, n = 2)$ , NB –  $k_3 = 10$ , GR –  $k_3 = 15$ , RE –  $k_3 = 20$ , PU –  $k_3 = 25$ , BL –  $k_3 = 30$ ); d) ze zmiennymi wykładnikami  $m$  i  $n$  ( $(k_1 = 3000, k_2 = 1, k_3 = 12,5)$ , NB –  $(m = 2, n = 2)$ , GR –  $(m = 1, n = 2)$ , RE –  $(m = 0, n = 2)$ , PU –  $(m = 0, n = 1)$ )

This is a supporting translation of the original text published in this issue of "Acta Energetica" on pages 57–64. When referring to the article please refer to the original text.

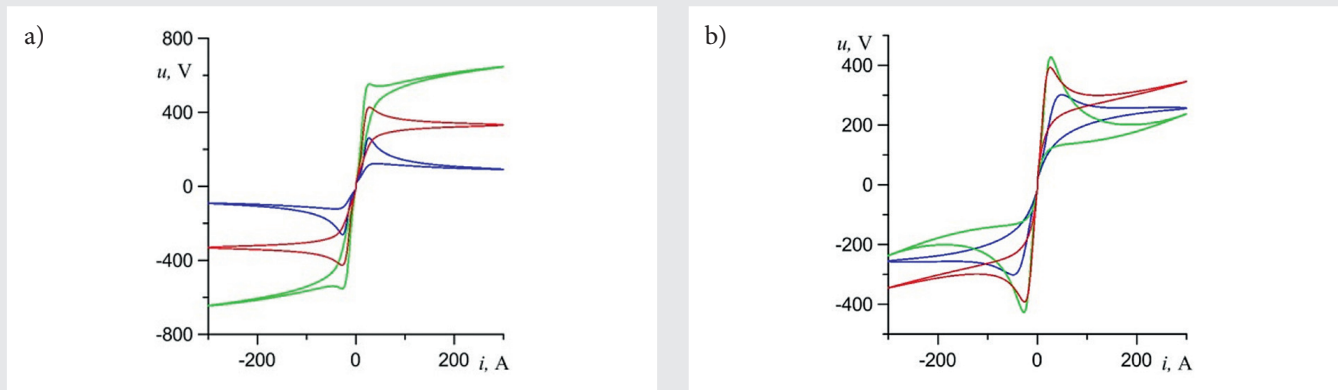
PL



Rys. 3. Rodziny charakterystyk napięciowo-prądowych dynamicznych modelu matematycznego łuku (8) ze zmiennymi wykładnikami  $m$  i  $n$ , ( $k_1 = 3000$ ,  $k_2 = 5$ ,  $k_3 = 12,5$ ): a) NB - ( $m = 0$ ,  $n = 2$ ), GR - ( $m = 0$ ,  $n = 3$ ), RE - ( $m = 0$ ,  $n = 4$ ), PU - ( $m = 0$ ,  $n = 5$ ); b) NB - ( $m = 1$ ,  $n = 3$ ), GR - ( $m = 1$ ,  $n = 4$ ), RE - ( $m = 1$ ,  $n = 5$ ), PU - ( $m = 2$ ,  $n = 5$ )



Rys. 4. Rodziny charakterystyk napięciowo-prądowych dynamicznych modelu łuku matematycznego hybrydowego (19)-(23) ( $k_{2M} = 4$ ,  $m_M = 2$ ,  $n_M = 2$ ,  $k_{1C} = 3000$ ,  $k_{2C} = 2$ ,  $k_{3C} = 12,5$ ,  $k_i = 0,5$ ,  $g_{rez} = 1 \cdot 10^{-2}$  S): a) z zadanymi współczynnikami: NB - ( $k_{1M} = 4000$ ,  $k_{3M} = 20$ ,  $m_C = 0$ ,  $n_C = 2$ ), GR - ( $k_{1M} = 5000$ ,  $k_{3M} = 30$ ,  $m_C = 0$ ,  $n_C = 2$ ), RE - ( $k_{1M} = 7000$ ,  $k_{3M} = 30$ ,  $m_C = 0$ ,  $n_C = 2$ ); b) z zadanym współczynnikiem  $k_{1M}$  i zmiennymi wykładnikami potęgowymi: NB - ( $k_{1M} = 4000$ ,  $k_{3M} = 20$ ,  $m_C = 0$ ,  $n_C = 3$ ), GR - ( $k_{1M} = 5000$ ,  $k_{3M} = 30$ ,  $m_C = 1$ ,  $n_C = 4$ ), RE - ( $k_{1M} = 7000$ ,  $k_{3M} = 20$ ,  $m_C = 2$ ,  $n_C = 5$ )



Rys. 5. Rodziny charakterystyk napięciowo-prądowych dynamicznych modelu łuku matematycznego hybrydowego (23) i (24), ( $g_{rez} = 1 \cdot 10^{-2}$  S): a) ( $k_i = 0,5$ ) z założeniami (25) i (29) oraz z zadanymi współczynnikami: NB - ( $k_{1M} = k_{1C} = 3000$ ,  $k_{2M} = 5$ ,  $k_{2C} = 2$ ,  $k_{3M} = k_{3C} = 15$ ,  $m_M = 1$ ,  $n_M = 2$ ,  $m_C = 2$ ,  $n_C = 2$ ), GR - ( $k_{1M} = k_{1C} = 5000$ ,  $k_{2M} = 5$ ,  $k_{2C} = 2$ ,  $k_{3M} = k_{3C} = 20$ ,  $m_M = 1$ ,  $n_M = 2$ ,  $m_C = 0$ ,  $n_C = 2$ ), RE - ( $k_{1M} = k_{1C} = 7000$ ,  $k_{2M} = 6$ ,  $k_{2C} = 4$ ,  $k_{3M} = k_{3C} = 25$ ,  $m_M = 1$ ,  $n_M = 2$ ,  $m_C = 1$ ,  $n_C = 4$ ); b) z założeniami (31) i (32) oraz z zadanymi współczynnikami: NB - ( $k_{1M} = k_{1C} = 4000$ ,  $k_{2M} = 5$ ,  $k_{2C} = 2$ ,  $k_{3M} = k_{3C} = 15$ ,  $m_M = 1$ ,  $n_M = 2$ ,  $m_C = 0$ ,  $n_C = 2$ ,  $k_g = 0,3$ ), GR - ( $k_{1M} = k_{1C} = 6000$ ,  $k_{2M} = 6$ ,  $k_{2C} = 2$ ,  $k_{3M} = k_{3C} = 15$ ,  $m_M = 2$ ,  $n_M = 3$ ,  $m_C = 0$ ,  $n_C = 3$ ,  $k_g = 0,6$ ), RE - ( $k_{1M} = k_{1C} = 8000$ ,  $k_{2M} = 6$ ,  $k_{2C} = 2$ ,  $k_{3M} = k_{3C} = 15$ ,  $m_M = 2$ ,  $n_M = 1$ ,  $m_C = 1$ ,  $n_C = 4$ ,  $k_g = 0,7$ )

This is a supporting translation of the original text published in this issue of "Acta Energetica" on pages 57–64. When referring to the article please refer to the original text.

PL

Na rys. 5a pokazano przypadek charakterystyk dynamicznych z wykorzystaniem funkcji wagowej  $\varepsilon_g(i)$ . Natomiast na rys. 5b pokazano charakterystyki modelu hybrydowego, w którym zastosowano funkcję wagową  $\varepsilon_g(g)$ . Kształty charakterystyk z obu rodzin wskazują na duże możliwości aproksymacji wyników badań eksperymentalnych z użyciem modeli hybrydowych.

## 5. Wnioski

1. Ze względu na przyjęte aproksymacje składowych bilansu mocy funkcjami potęgowymi dotychczasowy model łuku elektrycznego z promieniem jako zmienną stanu mógł umożliwić dokładne odwzorowanie charakterystyk napięciowo-prądowych statycznych tylko o postaci funkcji monotonicznej, a przez to charakterystyk napięciowo-prądowych dynamicznych o ograniczonej postaci (zawierających fragment tylko opadający lub tylko płaski). Dokładne aproksymowanie charakterystyk z dwoma fragmentami: opadającym i płaskim lub płaskim i narastającym lub opadającym i narastającym nie było możliwe.
2. Skojarzenie podmodeli matematycznych łuku elektrycznego z promieniami jako zmiennymi stanu o różniących się parametrach w model hybrydowy może umożliwić dokładne odwzorowanie charakterystyk napięciowo-prądowych statycznych o postaci funkcji nawet niemonotonicznej, a przez to charakterystyk napięciowo-prądowych dynamicznych łuku o różnych kształtach. Możliwe jest wtedy dokładne aproksymowanie charakterystyk z dwoma fragmentami: opadającym i płaskim lub płaskim i narastającym lub opadającym i narastającym.
3. Uproszczony wariant modelu hybrydowego z równością dwóch parametrów podmodeli wykazuje również duże możliwości odwzorowywania charakterystyk dynamicznych napięciowo-prądowych łuków.
4. Postacie różniczkowa i całkowa modeli matematycznych łuku elektrycznego z promieniem jako zmienną stanu umożliwiają utworzenie różnych makromodeli łuku z wykorzystaniem sterowanych źródeł napięciowych lub prądowych, a przez to uzyskanie różnych efektów działania programów

symulacyjnych pod względem stabilności i czasu trwania obliczeń numerycznych.

## Bibliografia

1. Pentegov I.V., Sydorets V.N., Comparative analysis of models of dynamic welding arc, *The Paton Welding Journal* 2015, No. 12, s. 45–48.
2. Lin D., Ron Hui S.Y., Chua L.O., Gas discharge lamps are volatile memristors, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Regular Papers* 2014, Vol. 61, No. 7, s. 2066–2073.
3. Shvartsas M., Ben-Yaakov S., A SPICE compatible model of high intensity discharge lamps, 30<sup>th</sup> Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference, Record. (Cat. No.99CH36321), s. 1037–1042 (DOI:10.1109/PESC.1999.785639).
4. Sawicki A., Klasyczne i zmodyfikowane modele matematyczne łuku elektrycznego, *Biuletyn Instytutu Spawalnictwa* 2019, nr 4, s. 73–76.
5. Sawicki A., Haltof M., Spectral and integral methods of determining parameters in selected electric arc models with a forced sinusoid current circuit, *Archives of Electrical Engineering* 2016, Vol. 65, No. 1, s. 87–103. (DOI: 10.1515/ae-2016-0007).
6. Janowski T., Jaroszyński L., Stryczewska H.D., Modification of the Mayr's electric arc model for gliding arc analysis, XXVI International Conference on Phenomena in Ionized Gases, Nagoya, Japan 2001/7/17, s. 341–342 (2001).
7. Awagan G.R., Thosar A.G., Mathematical Modeling of Electric Arc Furnace to Study the Flicker, *International Journal of Scientific & Engineering Research* 2016, Vol. 7, Issue 5, s. 684–695.
8. Grabowski D., Walczak J., Klimas M., Electric arc furnace power quality analysis based on a stochastic arc model, Conference: 2018 IEEE International Conference on Environment and Electrical Engineering and 2018 IEEE Industrial and Commercial Power Systems Europe (EEEIC/ I&CPS Europe) (DOI: 10.1109/EEEIC.2018.8494547).
9. Grabowski D., Walczak J., Deterministic model of electric arc furnace – a closed form solution,

*COMPEL – The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering* 2013, Vol. 32, No. 4, s. 1428–1436.

10. Grabowski D., Walczak J., Analysis of deterministic model of electric arc furnace. 10th International Conference on Environment and Electrical Engineering, Rome, Italy, 8–11 May 2011 (DOI: 10.1109/EEEIC.2011.5874805).
11. Grabowski D., Selected applications of stochastic approach in circuit theory. Monografia, WPŚI, Gliwice 2015.
12. Phillips R.L., Theory of the non-stationary arc column, *British Journal of Applied Physics* 2002, Vol. 18, nr 1, s. 65–78.
13. King-Jet Tseng, Yaoming Wang D., Mahinda Vilathgamuwa, An experimentally verified hybrid Cassie-Mayr electric arc model for power electronics simulations, *IEEE Transactions on Power Electronics* 1997, Vol. 12, No. 3, s. 429–436.
14. Sawicki A., Funkcje wagowe w modelach hybrydowych łuku elektrycznego, *Śląskie Wiadomości Elektryczne* 2012, nr 5 (104), s. 15–19.
15. Acha E., Semlyen A., Rajakovic N., A harmonic domain computational package for nonlinear problems and its application to electric arcs, *IEEE Transactions on Power Delivery* 1990, Vol. 5, Issue: 3, s. 1390–1397 (DOI: 10.1109/61.57981).
16. Kopersak V.M., The theory of welding processes-1, KPI, Kiev (2011). [in Ukrainian].
17. Kalasek V., Measurements of time constants on cascade d.c. arc in nitrogen, TH-Report 71-E18, Eindhoven, 1971, s. 1–30.
18. Voronin A.A., Improving the efficiency of contact-extinguishing systems of high-current switching devices with an extending arc, Abstract of thesis, Samara (2009) [in Russian].
19. Katsaounis A., Heat flow and arc efficiency at high pressures in argon and helium tungsten arcs, *Welding Research Supplement I*, September, 1993, s. 447-s – 454-s.
20. Sawicki A., Improvements of Hybrid Models of the Electric Arc of Variable Geometrical Parameters, 2018 Conference on Electrotechnology: Processes, Models, Control and Computer Science (EPMCCS) (IEEE

This is a supporting translation of the original text published in this issue of "Acta Energetica" on pages 57–64. When referring to the article please refer to the original text.

PL

Xplore Digital Library, DOI: 10.1109/  
EPMCCS.2018.8596459).

21. Marciniak L., Implementacje modeli łuku ziemnozwarciowego w programach PSCAD i Matlab/Simulink,

*Przegląd Elektrotechniczny* 2012, nr 9a, s. 126–129.

22. Marciniak L., Model of the arc earth-fault for medium voltage networks, *Central European Journal of*

*Engineering* 2011, nr 1(2), s. 168–173 (DOI: 10.2478/s13531-011-0020-y).

### **Antoni Sawicki**

dr hab. inż.

Stowarzyszenie Elektryków Polskich, Oddział Częstochowa

e-mail: sawicki.a7@gmail.com

Ukończył studia magisterskie na Wydziale Elektrycznym Politechniki Częstochowskiej (1977). Pracę doktorską (1988), a potem habilitacyjną (2000) obronił w Moskiewskim Instytucie Energetycznym. Jest autorem i współautorem ponad 300 publikacji naukowych, w tym 7 monografii i 2 skryptów. Uczestniczył w ponad 50 konferencjach krajowych i zagranicznych. Był także członkiem wielu komitetów naukowych. W jego dorobku jest także 17 patentów. Był kierownikiem i wykonawcą 5 grantów naukowych. Od 1998 r. jest członkiem Prezydium Polskiego Komitetu Elektrotechnologii. Był członkiem korespondentem Rosyjskiej Akademii Nauk Elektrotechnicznych (2012–2015), a od 2016 roku jest jej członkiem rzeczywistym. Przepracował 42 lata na Politechnice Częstochowskiej. Pełnił funkcje kierownika zakładu, dyrektora instytutu, kierownika katedry. W dorobku naukowym ma publikacje z zakresu dynamiki układów nieliniowych oraz nagrzewania łukowego i plazmowego.