

## SYMULACJE KOMPUTEROWE STRUMIENIA ZGŁOSZEŃ W SYSTEMACH MASOWEJ OBSŁUGI

### Streszczenie

W pracy rozpatrzono zagadnienie jakości generatorów wykorzystywanych do symulacji komputerowej strumienia zgłoszeń w systemach masowej obsługi. Uwzględniono dwa podstawowe rozkłady: poissonowski strumień zgłoszeń oraz rozkład Erlanga rzędu  $k$ . Zaproponowano algorytm, który prowadzi do wyników nieznacznie lepszych, niż uzyskanych dla generatora programu MathCad.

### WSTĘP

W pracy rozpatrzono zagadnienie jakości generatorów wykorzystywanych do symulacji komputerowej strumienia zgłoszeń w systemach masowej obsługi. Uwzględniono dwa podstawowe rozkłady: poissonowski strumień zgłoszeń, co oznacza rozkład wykładniczy pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami oraz rozkład Erlanga rzędu  $k$ , stanowiący sumę rozkładów wykładniczych.

Gęstość i dystrybuantę rozkładu wykładniczego opisują wzory:

$$f(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda t) \quad (1)$$

$$F(t) = 1 - \exp(-\lambda t) \quad (2)$$

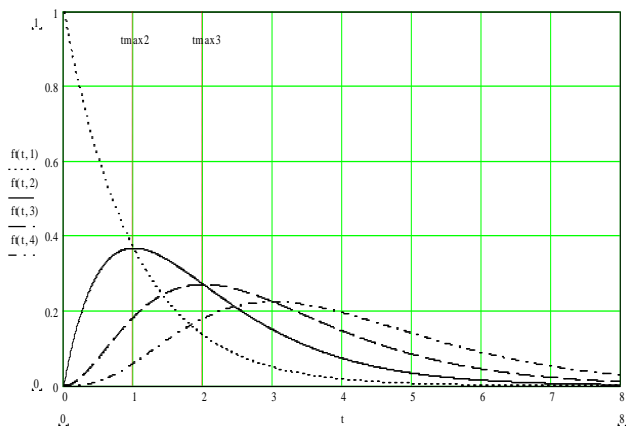
Gęstość rozkładu Erlanga rzędu  $k$  wyraża się zależnością:

$$f(t, k) = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \exp(-\lambda t) \quad (3)$$

Natomiast, dystrybuanta tego rozkładu wyraża się wzorem:

$$F(t, k) = 1 - \exp(-\lambda t) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \quad (4)$$

Na rysunku 1 przedstawiono gęstość rozkładu Erlanga rzędu  $k=1,2,3,4$ . W przypadku  $k=1$  rozkład Erlanga pokrywa się z rozkładem wykładniczym.



Rys. 1. Gęstość rozkładu Erlanga rzędu:  $k=1$  - linia kropkowana;  $k=2$  - linia ciągła;  $k=3$  - linia przerywana oraz  $k=4$  - linia kropkowo-przerywana.

Źródło: Opracowanie własne.

Wartość przeciętna zmiennej losowej o rozkładzie Erlanga wyraża się wzorem:

$$E_k = \frac{k}{\lambda} \quad (5)$$

natomiast maksimum gęstości występuje w punkcie

$$t_{\max k} = \frac{k-1}{\lambda} \quad (6)$$

Na rysunku 1 zaznaczono wartość  $t$  odpowiadającą maksimum funkcji gęstości dla  $k=2$  i  $k=3$ .

### 1. GENEROWANIE LICZB LOSOWYCH O ROZKŁADZIE WYKŁADNICZYM I ROZKŁADZIE ERLANGA

Jako punkt wyjścia przyjęto generator liczb losowych o rozkładzie równomiernym (jednostajnym) [4]

$$x_{n+1} = \text{mod}(\lambda \cdot x_n, P) \quad (7)$$

gdzie symbol *modulo* oznacza resztę z dzielenia przez liczbę  $P$ .

W tabeli 1 zestawiono wartości parametrów  $\lambda, P, x_0$ , które udało się autorowi wyszukać w literaturze.

Tab. 1. Wartości parametrów generatora zmiennej losowej o rozkładzie równomiernym

Nr generatora	$\lambda$	$P$	$x_0$
1	67099547	$2^{39}$	13
2	$5^{16}$	$2^{39}$	21
3	$2^{15}$	67099547	13
4	$4 \cdot 23^7 + 1$	$2^{35}$	21
5	630360016	$2^{31} - 1$	377003613
6	$7^5$	$2^{31} - 1$	377003613
7	3465613585	$2^{35}$	13
8	$5^{13}$	$2^{35}$	2116429302
9	$5^5$	$2^{35} - 31$	2116429302
10	$2^{15}$	167775723	17

Źródło: Opracowanie własne.

Jako pierwszy wykonano test dotyczący okresu generatora- maksymalna liczba elementów ciągu  $(x_n)$  bez powtórzeń. Okazało się, że generator G2 ma okres  $T=512$  a generator G4 okres  $T=2014$ , co spowodowało ich dyskwalifikację. Ciąg  $(x_n)$  zostaje przeskalowany zgodnie ze wzorem:

$$r = \frac{x}{P} \quad (8)$$

gdzie:  $r \in (0,1)$ .

Stosując metodę odwracania dystrybuanty, ze wzoru (2), otrzymuje się:

$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln(r) \quad (9)$$

gdzie  $t$  - zmienna losowa o rozkładzie wykładniczym.

Zmienną losową o rozkładzie Erlanga rzędu  $k$   $t^{(k)}$  uzyskano jako sumę niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym:

$$t^{(k)} = \sum_{i=1}^k t_i \quad (10)$$

Jakość rozpatrywanych generatorów była oceniana na podstawie rezultatów testu chi-kwadrat. Liczba przedziałów klasowych  $L$  była ustalana na podstawie wzoru:

$$L = \sqrt{N} \quad (11)$$

gdzie  $N$ -liczba elementów próbki, stanowiącego przybliżoną zależność odpowiadającą tabeli zamieszczonej w [3, s. 110]. W celu uzyskania wiarygodnych wyników zaleca się przeprowadzenie testu chi-kwadrat dla przedziałów klasowych zapewniających jednakowe prawdopodobieństwo [3, s. 111]. W tym celu należało rozwiązać równanie

$$F(t, k) = \frac{i}{L} \quad (12)$$

gdzie:  $i = 0, 1, \dots, L$

$F(t, k)$  określa wzór (4).

W przypadku szczególnym  $k=1$  (rozkład wykładniczy), ze wzorów (2) i (12), otrzymuje się

$$t_i = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(1 - \frac{i}{L} + 10^{-8}\right) \quad (13)$$

Równanie (12) rozwiązano metodą połowienia (bisekcji).

Dobór przedziałów klasowych realizujących jednakowe prawdopodobieństwa spowodował uproszczenie postaci statystyki testu chi-kwadrat:

$$H = \frac{L}{N} \sum_{j=1}^L \left(n_j - \frac{N}{L}\right)^2 \quad (14)$$

Jako wynik testu przyjęto unormowaną statystykę  $h$  stanowiącą stosunek wartości statystyki testu chi kwadrat (wzór (14)) do wartości krytycznej. W przypadku wartości unormowanej statystyki  $h$  większej od 1 należało odrzucić hipotezę o zgodności rozkładu wykładniczego z rozkładem empirycznym.

## 2. WYNIKI SYMULACJI KOMPUTEROWYCH

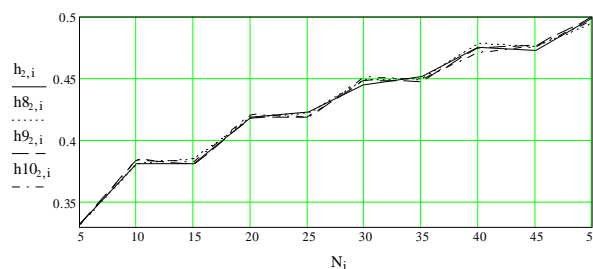
Przeprowadzono symulacje komputerowe wykonując  $M=20000$  powtórzeń, wyznaczając średnie wartości unormowanej statystyki testu  $\chi^2$ . Na rysunku 2 przedstawiono przykładowe uśrednione wartości unormowanej statystyki testu chi-kwadrat dla rozkładu Erlanga rzędu  $k=2$ . Kolejne krzywe na rysunku 2 odnoszą się do następujących generatorów:  $h_{2,i}$  (linia ciągła) generator programu MathCad,  $h8_{2,i}$  (linia kropkowana) generator nr 8 (Tab. 1),  $h9_{2,i}$  (linia przerywana) generator nr 9 (Tab.1),  $h10_{2,i}$  (linia kropkowno-przerywana) generator nr 10 (Tab.1). Z rysunku 2 wynika słabe zróżnicowanie wyników uzyskanych dla poszczególnych generatorów. Opisane zjawisko dotyczyło wszystkich generatorów zamieszczonych w tabeli 1 i występowało dla rozkładu Erlanga dowolnego rzędu – w pracy rozpatrzono rozkład Erlanga rzędu  $k=1,2,\dots,6$ .

W związku z powyższym, uśredniona wartość statystyki testu  $\chi^2$  nie może stanowić podstawy do oceny jakości poszczególnych generatorów. Kolejnym rezultatem symulacji komputerowych była frakcja  $q$  negatywnych wyników testu chi-kwadrat

$$q = \frac{Mneg}{M} \quad (15)$$

gdzie:  $Mneg$  – liczba przypadków, kiedy unormowana statystyka  $h > 1$ ,

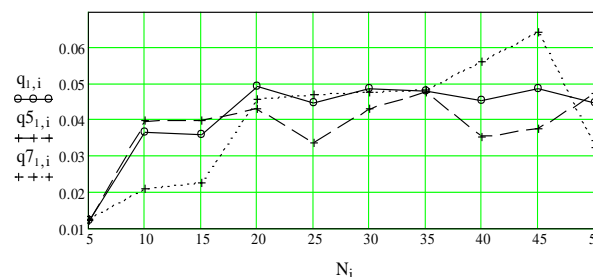
$M$  – liczba przeprowadzonych symulacji.



Rys. 2. Uśrednione wartości unormowanej statystyki testu chi-kwadrat dla rozkładu Erlanga rzędu  $k=2$ .

Źródło: Opracowanie własne.

Na rysunku 3 przedstawiono frakcję  $q$  negatywnych wyników testu chi-kwadrat dla rozkładu Erlanga rzędu  $k=1$  (wzór (15)). Zastosowano następujące oznaczenia: linia ciągła z kółkami  $q_{1,i}$  - wyniki dla generatora programu MathCad (seed value=1), linia przerywana  $q5_{1,i}$  - generator nr 5, linia kropkowana  $q7_{1,i}$  - generator nr 7.



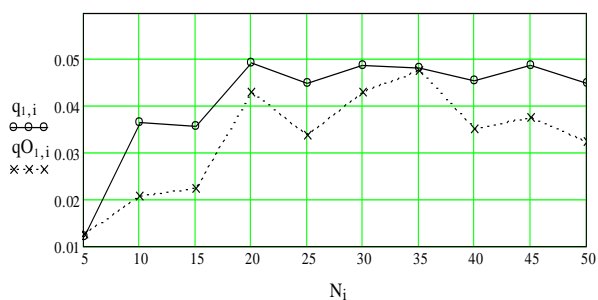
Rys. 3. Frakcja  $q$  negatywnych wyników testu chi-kwadrat dla rozkładu Erlanga rzędu  $k=1$ .

Źródło: Opracowanie własne.

Polecanie ewentualnemu użytkownikowi generatora programu MathCad jest niecelowe – zakłada konieczność wykorzystywania

tego programu. Celem artykułu jest opracowanie algorytmu bazującego na generatorach zamieszczonych w tabeli 1, który prowadziłby do wyników porównywalnych z generatorem programu MathCad. Spośród generatorów zamieszczonych w tabeli 1 najmniejsze wartości frakcji  $q$  odnotowano dla generatorów nr 5 i nr 7 (rysunek 3). Na podstawie rysunku 3 opracowano optymalny algorytm opisany wzorem (16):

$$qO_{1,i} = \begin{cases} q7_{1,i} & \text{dla } N < 20 \\ q5_{1,i} & \text{dla } 20 \leq N \leq 45 \\ q7_{1,i} & \text{dla } N > 45 \end{cases} \quad (16)$$

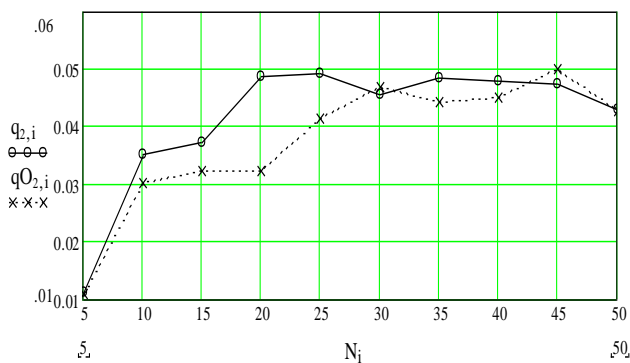


**Rys. 4.** Frakcja  $q$  negatywnych wyników testu chi-kwadrat dla rozkładu Erlanga rzędu  $k=1$ . Linia ciągła z kółkami  $q_{1,i}$  - generator programu MathCad, linia kropkowana  $qO_{1,i}$  - wg algorytmu (wzór (16)).

Źródło: Opracowanie własne.

Analogicznie postępowano dla rozkładu Erlanga rzędu  $k=2$ . W tym przypadku optymalny algorytm wyraża się wzorem:

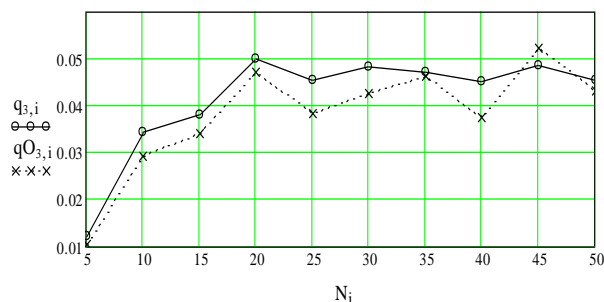
$$qO_{2,i} = \begin{cases} q7_{2,i} & \text{dla } N < 30 \\ q5_{2,i} & \text{dla } 30 \leq N < 35 \\ q7_{2,i} & \text{dla } N \geq 35 \end{cases} \quad (17)$$



**Rys. 5.** Frakcja  $q$  negatywnych wyników testu chi-kwadrat dla rozkładu Erlanga rzędu  $k=2$ . Linia ciągła z kółkami  $q_{2,i}$  - generator programu MathCad, linia kropkowana  $qO_{2,i}$  - wg algorytmu (wzór (17)).

Źródło: Opracowanie własne.

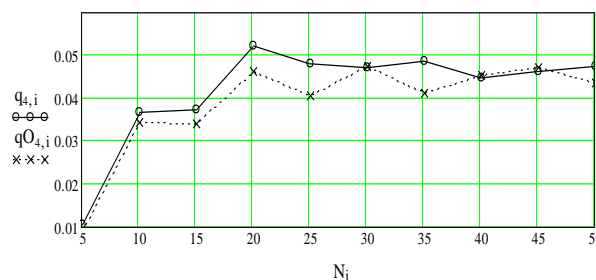
$$qO_{3,i} = \begin{cases} q7_{3,i} & \text{dla } N < 30 \\ q5_{3,i} & \text{dla } N \geq 30 \end{cases} \quad (18)$$



**Rys. 6.** Frakcja  $q$  negatywnych wyników testu chi-kwadrat dla rozkładu Erlanga rzędu  $k=3$ . Linia ciągła z kółkami  $q_{3,i}$  - generator programu MathCad, linia kropkowana  $qO_{3,i}$  - wg algorytmu (wzór (18)).

Źródło: Opracowanie własne.

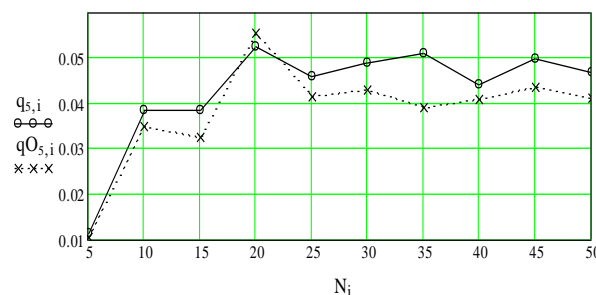
$$qO_{4,i} = \begin{cases} q7_{4,i} & \text{dla } N < 30 \\ q9_{4,i} & \text{dla } 30 \leq N < 35 \\ q5_{4,i} & \text{dla } 35 \leq N < 40 \\ q8_{4,i} & \text{dla } N \geq 40 \end{cases} \quad (19)$$



**Rys. 7.** Frakcja  $q$  negatywnych wyników testu chi-kwadrat dla rozkładu Erlanga rzędu  $k=4$ . Linia ciągła z kółkami  $q_{4,i}$  - generator programu MathCad, linia kropkowana  $qO_{4,i}$  - wg algorytmu (wzór (19)).

Źródło: Opracowanie własne.

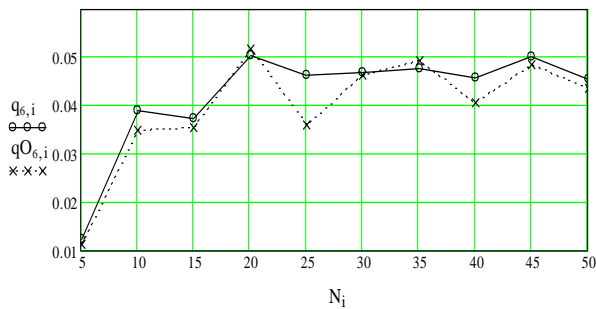
$$qO_{5,i} = \begin{cases} q7_{5,i} & \text{dla } N < 30 \\ q5_{5,i} & \text{dla } N \geq 30 \end{cases} \quad (20)$$



**Rys. 8.** Frakcja  $q$  negatywnych wyników testu chi-kwadrat dla rozkładu Erlanga rzędu  $k=5$ . Linia ciągła z kółkami  $q_{5,i}$  - generator programu MathCad, linia kropkowana  $qO_{5,i}$  - wg algorytmu (wzór (20)).

Źródło: Opracowanie własne.

$$qO_{6,i} = \begin{cases} q5_{6,i} & \text{dla } N < 45 \\ q9_{6,i} & \text{dla } N \geq 45 \end{cases} \quad (21)$$



**Rys. 9.** Frakcja  $q$  negatywnych wyników testu chi-kwadrat dla rozkładu Erlanga rzędu  $k=6$ . Linia ciągła z kółkami  $q_{6,i}$  - generator programu MathCad, linia kropkowana  $q_{6,i}$  - wg algorytmu (wzór (21)).

Źródło: Opracowanie własne.

## PODSUMOWANIE

W pracy omówiono problem generowania zmiennej losowej o rozkładzie Erlanga rzędu  $k$ . Zaproponowano algorytm (wzory (16)-(21)) bazujący na generatorach zamieszczonych w tabeli 1. Użytkano wyniki nieznacznie lepsze, niż dla generatora programu MathCad.

W trakcie obliczeń zaobserwowano istotną prawidłowość. Mianowicie, zgodnie ze wzorem (9) wyznaczano zmienną losową  $t$  o rozkładzie wykładniczym. Następnie, uwzględniając wzór (13), wykonano test chi-kwadrat dla przedziałów klasowych zapewniających jednakowe prawdopodobieństwo. Równoległe wykonano test chi-kwadrat dla zmiennej losowej  $r$  występującej we wzorze (9). Ponieważ zmienna losowa  $r$  ma rozkład równomierny, to przedziały zapewniające jednakowe prawdopodobieństwo opisywał wzór

$$y_i = \frac{i}{L} \quad \text{gdzie } i = 0, 1, 2, \dots, L.$$

Okazało się, że wyniki testu chi-kwadrat dla zmiennej  $t$  oraz zmiennej  $r$  są identyczne.

Oznacza to, że o jakości generatora liczb losowych o rozkładzie wykładniczym (wzór (9)) decyduje generator liczb losowych o rozkładzie jednostajnym (zmienna  $r$ ). Identyczna uwaga dotyczy generatora liczb losowych o rozkładzie Erlanga rzędu  $k$ .

## BIBLIOGRAFIA

1. Czachórski T., *Modele kolejkowe w ocenie efektywności sieci i systemów komputerowych*, Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 1999.
2. Goddard L.S., *Metody matematyczne w badaniach operacyjnych*, PWN, Warszawa 1966.
3. Krysicki W., Bartos J., Dyczka W., Królikowska K., Wasilewski M., *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach*, część II, Statystyka matematyczna, PWN, Warszawa 1995.
4. Wieczorkowski R. Zieliński R. *Komputerowe generatory liczb losowych*, WNT 1997.

## COMPUTER SIMULATIONS OF REQUEST STREAM IN MASS SERVICE SYSTEMS

### Abstract

*In the paper the problem of the quality of generators used in computer simulations of request stream in mass service systems was examined. Two basic distributions were taken into account: Poisson request stream and the Erlang distribution of order  $k$ . An algorithm was proposed which leads to results slightly better than the results obtained for MathCad program generator.*

Autor:

prof. dr hab. inż. **Jan Purczyński** – Uniwersytet Szczeciński