

Marcin GRABA

## CHARAKTERYSTYKA PÓL NAPRĘŻEŃ PRZED WIERZCHOŁKIEM PĘKNIĘCIA DLA KWADRATOWEJ PŁYTY PODDANEJ DWUOSIOWEMU ROZCIĄGANIU

### Streszczenie

W artykule przedstawiona została charakterystyka pól naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia dla kwadratowej płyty zawierającej centralne pęknięcie, poddanej dwuosowemu rozciąganiu. Praca prezentuje szczegóły obliczeń numerycznych, a także porównania stanów naprężeń dla płyt poddanych jednoosiowemu rozciąganiu oraz płyt poddawanych dwuosowemu rozciąganiu. Analiza numeryczna prowadzona jest dla szeregu modeli materiałów sprężysto-plastycznych oraz różnych względnych długości pęknięcia. Dyskusja dotyczy wpływu geometrii, poziomu i rodzaju obciążenia zewnętrznego oraz charakterystyki materiałowej na pole naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia.

### WSTĘP (na podstawie [1 – 19])

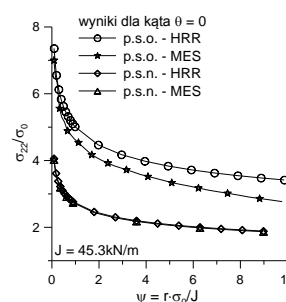
Pole naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia po raz pierwszy zostało opisane przez Williams'a [1]. Zaprezentowane tam rozwiązanie dotyczyło materiału liniowego. Jednakże jak wiadomo, większość materiałów stosowanych w budowie maszyn i urządzeń charakteryzuje się umocnieniem, dlatego rozważania należy prowadzić zgodnie z zaleceniami dla materiałów sprężysto-plastycznych. W 1968, niezależnie od siebie, Hutchinson [2] oraz Rice i Rosengren [3] dokonali opisu pól naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia w materiałach sprężysto-plastycznych [4, 13, 19]. Pomysł Hutchinson'a, Rice'a i Rosengrena, powszechnie nazywa się rozwiązaniem HRR [2, 3]. Cechą charakterystyczną tego rozwiązania jest osobliwość naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia, a pole naprężeń kontrolowane jest przez parametr określany mianem całki  $J$ , którą nazywa się siłą pociągową pęknięcia [4]. Powszechnie rozwiązanie HRR [2, 3] zapisać można w następującej formie [4, 13, 19]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \left( \frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 I_n r} \right)^{\frac{1}{1+n}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n) \quad (1)$$

gdzie:  $i, j$  – kolejne elementy tensora naprężenia,  $J$  – całka  $J$ ,  $\sigma_0$  – granica plastyczności,  $\varepsilon_0$  – odkształcenie odpowiadające granicy plastyczności ( $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$ ),  $E$  – moduł Young'a,  $n$  – wykładnik potęgowej w prawie Ramberga-Osgood'a (R-O),  $\alpha$  – stała materiałowa w związku R-O,  $I_n$  – wielkość zależna od materiału poprzez wykładnik  $n$  oraz od sposobu obciążenia oraz grubości próbki decydującej o tym, czy mamy do czynienia z płaskim stanem naprężenia (p.s.n.) lub płaskim stanem odkształcenia (p.s.o.),  $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n)$  – funkcje zależne od materiału przez wykładnik potęgowy  $n$  i kąt  $\theta$  oraz od grubości próbki w zależności od faktu czy rozważa się p.s.n. czy p.s.o [4, 13, 19].

Rozwiązanie HRR [2, 3], zawiera jedynie pierwszy człon nieskończonego szeregu [4, 13, 19]. Autorzy [2, 3], świadomie zrezygnowali z członów wyższego rzędu. Obliczenia numeryczne (obliczenia MES) prowadzone przez wielu badaczy wskazują, że wyniki uzyskane na podstawie rozwiązania HRR mogą się znacznie różnić od rzeczywistych rozkładów naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia (patrz rys. 1, na podstawie [4]) [4, 13, 19]. Różnica wynika z

nieuwzględnienia w rozwiązaniu HRR [2, 3] członów wyższego rzędu [4, 13, 19].



Rys. 1. Porównanie rozwiązania HRR z rozkładem rzeczywistym wyznaczonym MES, na przykładzie próbki trójpunktowo zginanej - SEN(B) –  $W=40$ ,  $a/W=0.50$ ,  $\sigma_0/E=0.00153$ ,  $n=5$  [4].

W 1985 roku, Li i Wang [5] wykorzystując funkcję Airy'ego złożoną z pierwszych dwóch członów rozwinięcia asymptotycznego, uzyskali dla dwóch materiałów opisanych różnymi wartościami wykładnika potęgowego w prawie R-O ( $n=3$  i  $n=10$ ), wartości drugiego członu rozwinięcia asymptotycznego. Swoje wyniki porównali z rozwiązaniem HRR oraz obliczeniami MES [4, 13, 19]. Prowadzona przez nich analiza dowiodła, że uwzględnienie drugiego członu przybliża wyniki do obliczeń numerycznych. Pierwsze dwa człony rozwinięcia znacznie dokładniej opisują pole naprężeń w okolicy samego wierzchołka pęknięcia, a wartość drugiego członu dość silnie zależy od własności materiału i geometrii próbki [4, 13, 19].

W 1993 roku Yang, Chao i Sutton [6], wykorzystując funkcję Airy'ego będącą nieskończonym szeregiem podali opis pól naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia w postaci nieskończonego szeregu. [4, 13, 19] Pomysł ich w rzeczywistości bardzo często sprowadza się do analizy pierwszych trzech wyrazów rozwinięcia asymptotycznego [4, 13, 19]. Bazując na rozwiązaniu Sharm'y i Aravas'a [7], O'Dowd, Shih oraz Kirk [8-10], zaproponowali by pole naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia opisać równaniem postaci:

$$\sigma_{ij} = (\sigma_{ij})_{HRR} + Q \sigma_0 \hat{\sigma}_{ij}(\theta) \quad (2)$$

gdzie  $\hat{\sigma}(\theta, n)$  – funkcje kąta i stałej materiałowej  $n$  określane numerycznie,  $q$  – wykładnik potęgowy, którego zmienność zawiera się

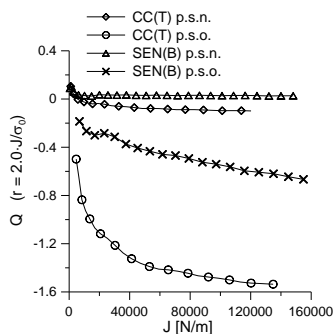
w przedziale (0; 0.071),  $Q$  – parametr  $Q$ , będący amplitudą sumy wszystkich członów rozwinięcia poza członem HRR (powszechnie określany mianem naprężeń  $Q$ ) [4, 13, 19].

O'Dowd i Shih [8, 9] przeprowadzili dokładne badania parametru  $Q$  w zakresie odległości od wierzchołka pęknięcia  $J/\sigma_0 < r < 5J/\sigma_0$  [4, 13, 19]. Autorzy [8, 9] wskazali, że naprężenia  $Q$  najlepiej jest wyznaczać w odległości znormalizowanej  $r=2J/\sigma_0$  na kierunku  $\theta=0$  – pozwala to na uniknięcie niejednoznaczności w określaniu tegoż parametru. Analizy numeryczne wskazują, że wybór miejsca nie jest przypadkowy, a jest dyktowany względami praktycznymi [4, 13, 19]. Autorzy pomysłu wprowadzenia naprężeń  $Q$  do zagadnień mechaniki pęknięcia na dość szeroką skalę, wskazali i zapustowali, by funkcja  $\sigma_{\theta\theta}(\theta=0)$  na kierunku  $\theta=0$  była równa jedności. Dzięki temu wartość  $Q$  można wyznaczyć z równania powszechnie podawanego w literaturze dotyczącej mechaniki pęknięcia [4, 13, 19]:

$$Q = \frac{(\sigma_{\theta\theta})_{MES} - (\sigma_{\theta\theta})_{HRR}}{\sigma_0} \text{ przy } \theta=0 \text{ i } \frac{r\sigma_0}{J} = 2 \quad (3)$$

gdzie:  $(\sigma_{\theta\theta})_{MES}$  – wartość naprężeń wyznaczona numerycznie,  $(\sigma_{\theta\theta})_{HRR}$  – wartość naprężeń wynikająca z rozwiązania HRR [4, 13, 19].

Badania O'Dowda i Shih [8, 9] obejmujące wszystkie składowe tensora naprężenia przy założeniu p.s.o., pokazały że wartość  $Q$  wyznacza poziom trójosiowości naprężeń [4, 13, 19]. W przypadku p.s.n. parametr  $Q$  przyjmuje wartości równe lub bardzo bliskie zeru, natomiast dla przypadku p.s.o. parametr ten przyjmuje wartości na ogół mniejsze od zera (rys. 2) [4, 13, 19]. Przeprowadzone obliczenia, wykazują, że naprężenia  $Q$  zależą od geometrii elementu konstrukcyjnego - próbki – czyli długości pęknięcia, szerokości próbki, rodzaju obciążenia - elementy z przewagą rozciągania lub zginania, faktu czy mamy do czynienia z p.s.o. czy p.s.n., a przede wszystkim od charakterystyki materiałowej elementu konstrukcyjnego, poprzez granicę plastyczności i wykładnik potęgowy w prawie R-O [4, 13, 19].



Rys. 2. Przykładowe krzywe zmiany parametru  $Q$  dla próbek trójpunktowo zginanych SEN(B) oraz rozciąganych z centralną szczeliną CC(T) dla p.s.o oraz p.s.n. –  $W=40$ ,  $a/W=0.50$ ,  $\sigma_0/E=0.00153$ ,  $n=5$  [4].

Zaproponowana przez O'Dowda i Shiha teoria wielokrotnie dyskutowana była w kolejnych pracach, np. [10 – 12]. W roku 1995, O'Dowd [11] przeprowadził szczegółową analizę zaproponowanej przez siebie teorii: przedstawił podstawy teoretyczne, sposób prowadzenia obliczeń numerycznych, zaprezentował przykładowe krzywe zmian naprężeń  $Q$  wraz z obciążeniem zewnętrznym dla różnych geometrii, (ale tylko jednego rodzaju materiału, dokonał analizy dwuparametrycznego kryterium pęknięcia opartego na całce  $J$  oraz na naprężeniach  $Q$ , a także podał kilka wzorów pozwalających obliczyć naprężenia  $Q$  bez konieczności prowadzenia obliczeń numerycznych [4, 11, 13, 19]. Podawane przez O'Dowda wzory,

pozwalające obliczyć naprężenia  $Q$  bez konieczności przeprowadzenia obliczeń numerycznych. Bazują one na związku naprężeń  $Q$  i naprężeń  $T$  (drugi człon rozwinięcia asymptotycznego dla materiału liniowego). O'Dowd proponuje dwie formy wyznaczenia naprężeń  $Q$  w oparciu o znajomość na-prężeń  $T$ , które można dla żądanej geometrii znaleźć w pracy [13 – 15]. Szczegółową analizę pracy O'Dowd'a [11], można znaleźć w [13].

Teoria zaproponowana przez O'Dowda i Shiha [8, 9] okazuje się być prostą w stosowaniu przy oszacowywaniu rozkładów naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia w materiałach sprężysto-plastycznych, o ile zna się wartość naprężeń  $Q$  przed wierzchołkiem pęknięcia [4, 13, 19]. Owa łatwość w użyciu przemawia na korzyść teorii O'Dowda [8, 9], w odniesieniu do innych opisów opartych na parametrach płaskich więzów geometrycznych – przykładem może tu być podejście Yanga i współpracowników [6]. Zaznaczyć należy, że teoria O'Dowd'a i Shiha [8, 9] znalazła zastosowanie w budowie kryteriów pęknięcia, podawanych w literaturze począwszy od 1995 roku [11]. Efektem wymiernym jest wykorzystanie naprężeń  $Q$  w programach europejskich SINTAP [16] i FITNET [17], gdzie podano zalecenia do konserwatywnej oceny odporności na pęknięcie różnych elementów konstrukcyjnych [4, 13, 19].

Zatem jak się okazuje, prosty w obliczeniach parametr, jakim są naprężenia  $Q$ , jest niezbędny do analizy elementów konstrukcyjnych zawierających pęknięcia. Można stwierdzić, że istnieje potrzeba stworzenia katalogu numerycznych rozwiązań, pozwalających bez konieczności obliczeń numerycznych oszacować poziom naprężeń  $Q$  przed wierzchołkiem pęknięcia w materiale sprężysto-plastycznym [4, 13, 19]. W literaturze niewiele jest prac przedstawiających ten problem, np. pozycje [13, 18, 19], które tworzą pewną serię, której kontynuacja pozwoli na stworzenie szerszej bazy krzywych  $J$ - $Q$  dla wszystkich podstawowych geometrii, wykorzystywanych w procedurach FITNET do idealizacji złożonych elementów konstrukcyjnych [4, 13, 19]. Obliczenia numeryczne naprężeń  $Q$  nie są zbyt trudne i wymagające, jednakże od prowadzącego oczekuje się, że wykorzystywany model numeryczny będzie stabilny, będzie gwarantował zbieżność, wielkość elementów skończonych (ES) czy podział na ES oraz promień wierzchołka pęknięcia, spełniać będą wymagania stawiane w pracach [4, 20 – 21]. Oczywiście wspomnieć należy również o konieczności znajomości parametrów pola HRR [2, 4], a także o niezbędnym opracowaniu metody analizy wyników numerycznych, by podać inżynierowi tylko to, co jest niezbędne [4, 13, 19].

W kolejnych paragrafach przedstawiona zostanie charakterystyka modułu numerycznego, dla którego podjęto próbę oszacowania parametru będącego odpowiednikiem naprężeń  $Q$ , a także omówiona zostanie metodologia analizy wyników numerycznych oraz zaprezentowane zostaną kilka wykresów prezentujących uzyskane wyniki numeryczne.

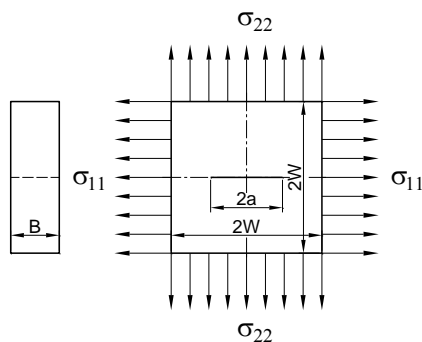
## 1. PRÓBKİ WYKORZYSTYWANE W PROGRAMIE BADAWCZYM, MATERIAŁ, SPOSÓB OBCIĄŻENIA [22]

### 1.1. Rodzaj próbek wykorzystanych w badaniach [22]

Analizę numeryczną, mającą na celu oszacowanie obciążeń granicznych, przeprowadzono dla dość nietypowej geometrii – płyty kwadratowych z centralnie umieszczonym pęknięciem, które podane są dwuosowemu rozciąganiu – próbka (płyta) CCSP(BT) – z ang. „central cracked square plate in biaxial tension” – rysunek 3. Geometria ta analizowana była już pod kątem oszacowania obciążenia granicznego w pracy [22].

Tabela 1 prezentuje wymiary geometryczne próbek. Jak daje się zauważyć, rozważano płyty o czterech różnych długościach

pęknięcia – bardzo krótkie szczeliny, krótkie normatywne ( $a/W=0.50$ ) oraz szczeliny długie.



**Rys. 3.** Próbką CCSP(BT) – kwadratowa płyta z centralną szczeliną poddana dwuosiemu rozciąganiu:  $a$  – długość pęknięcia,  $W$  – szerokość próbki,  $B$  – grubość próbki,  $\sigma_{22}$  – naprężenia normalne do powierzchni pęknięcia (składowa obciążenia zewnętrznego wg I-go sposobu obciążenia),  $\sigma_{11}$  – naprężenia ścinające powierzchnie pęknięcia (składowa obciążenia zewnętrznego wg II-go sposobu obciążenia) [22].

**Tab. 1.** Wymiary geometryczne, wykorzystane w programie badawczym do oszacowania obciążeń granicznych.

szerokość próbki, $W$ [mm]	względna długość pęknięcia, $a/W$	grubość próbki, $B$ dla analizy 2D, przy dominacji p.s.o. [mm]
40	0.05	1000
	0.20	
	0.50	
	0.70	

Wybór geometrii nie jest przypadkowy – niezmiernie rzadko jest ona dyskutowana w pracach naukowych [22 – 23]. Geometria ta nie pojawia się we wcześniej wspomnianych procedurach EPRI [10], SINTAP [12], FITNET [13]. Zaprezentowana przez Meek'a i Ainsworth'a praca [23], porusza tematykę obciążeń granicznych dla płyt z centralną szczeliną poddanych rozciąganiu. W pracy tej znajdziemy dyskusję dotyczącą wpływu wielkości płyty na poziom obciążenia zewnętrznego, rozważany jest wpływ parametru dwuosioowości obciążenia definiowanego jako  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$ , jednakże wszelkie rozważania prowadzone są dla płaskiego stanu odkształcenia oraz dwóch długości pęknięcia [22]. Analiza teoretyczna stanu naprężeń w płycie CCSP(BT) wymaga uwzględnienia dwóch sposobów obciążenia – pierwszego i drugiego sposobu obciążenia. Numeryczną analizę problemu dla p.s.o. dla złożonego sposobu obciążenia (z ang. „mixed mode loading”), przeprowadził Shih [24]. Autor przeprowadził tam ocenę rozkładu naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia dla przypadku uplastycznienia bliskiego zasięgu. Analizie poddano rozkład naprężeń i odkształceń, a także porównywano rozkład i rozwój stref plastycznych. Jednakże, ze względu na fakt, że prowadzono analizę uplastycznienia bliskiego zasięgu [25] – polegała ona na modelowaniu ciała o kształcie okręgu, którego wymiary znacznie przekraczają rozwijającą się pod wpływem obciążenia strefę plastyczną, rozwiązanie jest dość ograniczone w zastosowaniach. Autor [24] wyniki podaje w postaci graficznej, dla dwóch wykładników w prawie R-O ( $n=3$  oraz  $n=13$ ).

Inżynier natomiast, w trakcie swej pracy spotyka się z problemami, gdzie elementy konstrukcyjne poddane są złożonemu obciążeniu („mixed mode”), jednak mają pewne wymiary – pęknięcie jest o określonej długości, element konstrukcyjny posiada szerokość i grubość. Jak wiadomo, wymiary geometryczne decydują o poziomie więzów geometrycznych [26] – jest to opór, jaki materiał danego elementu konstrukcyjnego stawia rozwijającym się odkształceniom plastycznym [26]. W mechanice pęknięcia, płaskie więzy geometryczne wyznacza się na ogół dla p.s.o., posługując się zdefiniowa-

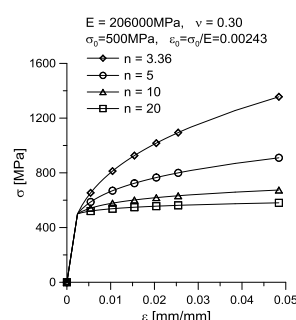
nymi przez O'Dowda [8, 9] naprężeniami  $Q$ , będącymi różnicą pomiędzy rzeczywistymi naprężeniami w elemencie konstrukcyjnym (wyznaczonymi za pomocą MES) a rozwiązaniem HRR [2, 3], wyznaczonym według wzorów teoretycznych [4, 26]. W przypadku p.s.o. naprężenia  $Q$  z reguły mają wartość niezerową [4, 26]. Zatem mówiąc o niskim poziomie płaskich więzach geometrycznych – charakterystycznym dla próbek o krótkich i bardzo krótkich szczelinach, mamy na myśli znacznie ujemną wartość naprężeń  $Q$ , natomiast mówiąc o wysokim poziomie płaskich więzach geometrycznych – charakterystycznym dla próbek zawierających długie pęknięcia, mamy na myśli wysoką wartość naprężeń  $Q$  [4, 26].

Niniejsza praca, ma przybliżyć czytelnikowi problem więzów w płycie CCSP(BT). Analizując historię wyznaczania naprężeń  $Q$ , powinniśmy umieć oszacować analitycznie rozkład naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia – do tego wykorzystujemy rozwiązanie HRR dla I sposobu obciążenia. Shih [24] próbował pokazać jak oszacować rozkład naprężeń dla przypadków złożonego obciążenia – „mixed mode”. Ponieważ dla przypadków „mixed mode” nie ma w literaturze prostego wzoru postaci rozwiązania HRR, za pomocą którego można by oszacować rozkład naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia w materiałach sprężysto-plastycznych, niniejsza praca będzie miała charakter typowo numeryczny, podobnie jak [27, 28], gdzie autorzy prezentują numeryczne wyniki swych rozważań, dotyczących przypadków „mixed mode” dla p.s.o..

Brak rozwiązania dokładnego powoduje, że za pole odniesienia przyjęto rozwiązanie HRR dla płyty CCSP(BT), poddanej jednoosiowemu rozciąganiu według I sposobu obciążenia. W analizie numerycznej, płyty poddanej dwuosiemu rozciąganiu, testowanych będzie cztery warianty względnych długości pęknięcia. Ich wybór nie jest przypadkowy. Dzięki temu, ocenić będzie można jak geometria elementu konstrukcyjnego wpływa na poziom więzów dla płyty CCSP(BT), poddawanej dwuosiemu rozciąganiu.

Brak szeroko opisanego programu badawczego dotyczącego płyt ze szczeliną poddanych dwuosiemu rozciąganiu, a także brak wzorów empirycznych skłania do poruszenia tej tematyki i przedstawienia wyników numerycznych [22].

Można z pewnością powiedzieć, że w pracy dokonano oceny pola naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia w płycie CCSP(BT) poddanej dwuosiemu rozciąganiu, oszacowując, jak bardzo rozkład naprężeń dla takiej płyty (rozkład rzeczywisty wyznaczony metodą MES) różni się od rozwiązania HRR podanego dla materiału płyty w pierwszym sposobie obciążenia (patrz rysunek 1a, [22]).



**Rys. 4.** Graficzna prezentacja wybranych modeli materiałów sprężysto – plastycznych wykorzystanych w programie numerycznym.

## 1.2. Materiał próbek CCSP(BT)

W analizie numerycznej wykorzystano model materiału sprężysto plastycznego. Zakładano izotropowy, jednorodny model materiału, opisany warunkiem plastyczności Hubera-Misses-Hencky'ego [4, 13, 19]. Związek konstytutywny, wykorzystany w analizie miał postać:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \begin{cases} \sigma/\sigma_0 & \text{dla } \sigma \leq \sigma_0 \\ \alpha(\sigma/\sigma_0)^n & \text{dla } \sigma > \sigma_0 \end{cases} \quad (4)$$

gdzie wartość  $\alpha$  jest równa 1 [4, 13, 19].

Wybór tego związku konstytutywnego do opisu materiału, a nie najczęściej przyjmowanego – typu prawo R-O, podyktowany był rezultatami szczegółowej analizy tego problemu, podanymi przez O’Dowda [4, 11, 13, 19].

Analizę wykonano dla czterech grup materiałów, różniących się granicą plastyczności  $\sigma_0$ . W każdej grupie wyróżniono cztery materiały różniące się wykładnikiem umocnienia  $n$  w prawie Ramberga – Osgood’a, którego wartość ustalono tak, by obliczenia i analizę przeprowadzić dla materiałów silnie, średnio i słabo się umacniających (tabela 2) [4, 13, 19]. Zaprezentowana w tabeli charakterystyka materiałów wykorzystanych w programie badawczym wynika z odpowiedniego doboru zakresów granicy plastyczności i wykładnika potęgowego  $n$  w prawie R-O, w celu przydatności uzyskanych rezultatów obliczeń numerycznych w rozwiązywaniu inżynierskich problemów dotyczących elementów konstrukcyjnych zawierających pęknięcia, wykonanych ze stali ferrytycznych i stali konstrukcyjnych do ulepszania cieplnego [4, 13, 19]. W pewnym stopniu, wybrana do programu badawczego grupa materiałów pokrywa się z materiałami poddanymi analizie w pracach [29, 30].

Modelując materiał zakładano stałą wartość modułu Young’a  $E=206\text{GPa}$  a stałą wartość współczynnika Poisson’a  $\nu=0.30$  [4, 13, 19].

**Tab. 2.** Własności mechaniczne i wybrane parametry pola HRR modeli sprężysto –plastycznych materiałów wykorzystanych do analizy numerycznej.

E [GPa]	$\nu$	$\sigma_0$ [MPa]	$\varepsilon_0=\sigma_0/E$	$n$	$(\bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta=0))_{p.s.o.}$	$(I_n)_{p.s.o.}$
206	0.3	315	0.00153	3.36	2.01	5.39
		500	0.00243	5	2.22	5.02
		1000	0.00485	10	2.50	4.54
		1500	0.00728	20	2.68	4.21

### 1.3. Obciążenie próbek CCSP(BT) [22]

Obciążenia próbek – płyt kwadratowych z centralną szczeliną poddanych dwuosiemu rozciąganiu realizowano przez przyłożenie do dwóch brzegów próbki w postaci wzajemnie prostopadłych naprężeń rozciągających:  $\sigma_{11}$  – naprężen rozciągających płytę, działających w kierunku propagacji pęknięcia oraz  $\sigma_{22}$  – naprężen rozciągających płytę, działających w kierunku prostopadłym do powierzchni pęknięcia – kierunek normalny [22]. W celu dokładniejszego oszacowania obciążeń granicznych, testowano siedem wariantów ilorazu  $\sigma_{11}/\sigma_{22}=\{0, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00, 1.25, 1.50\}$  [22].

## 2. MODEL NUMERYCZNY PRÓBEK CCSP(BT) [22]

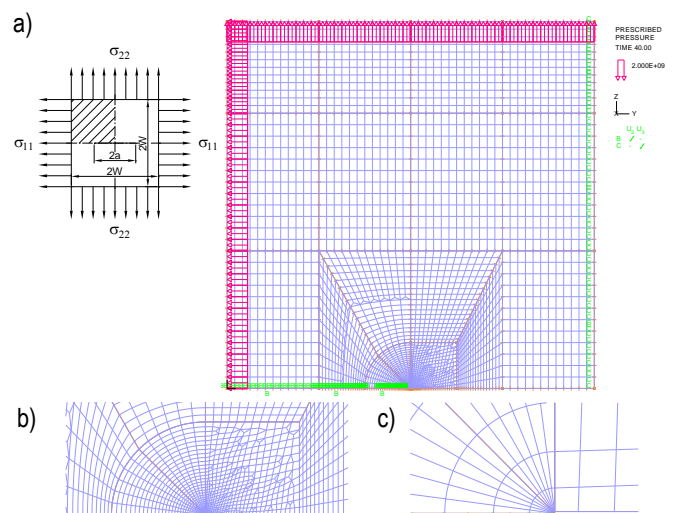
Modele numeryczne niezbędne do przeprowadzenia obliczeń numerycznych mających na celu określenia wartości obciążeń granicznych dla płyt CCSP(BT), zdominowanych przez p.s.o., wykonano wykorzystując pakiet obliczeniowy ADINA SYSTEM 8.8 [30, 31]. Modele numeryczne budowano w oparciu o właściwy dla systemu ADINA język programowania, tworząc pliki wsadowe w postaci tekstowej o rozszerzeniu „\*.in” [22].

W obliczeniach numerycznych skorzystano z modelu sprężysto –plastycznego materiału, zakładając stałą wartość modułu Young’a  $E$  i współczynnika Poisson’a  $\nu$ , zmieniając granicę plastyczności  $\sigma_0$  oraz wykładnik potęgowy w prawie R-O. Tabela 2 prezentuje własności mechaniczne modeli materiałów wykorzystanych w analizie

numerycznej. Natomiast rysunek 4 w sposób graficzny ilustruje wybrane modele sprężysto – plastycznych materiałów wykorzystanych w analizie numerycznej [22].

Tworząc numeryczne modele próbek CCSP(BT), zdecydowano się zamodelować wierzchołek pęknięcia, jako ćwiartkę łuku, o promieniu  $r_w$  w granicach  $(1\div 5)\mu\text{m}$  [22]. Oznacz to że promień wierzchołka pęknięcia był w skrajnych przypadkach 40000 oraz 8000 mniejszy od szerokości próbki [22]. Ów wierzchołek pęknięcia podzielono na 12 części ze zagęszczeniem elementów ku krawędziom powierzchni (elementy brzegowe w zależności od modelu były  $(5\div 20)$  razy mniejsze od największych elementów zlokalizowanych w centralnej części łuku) [22]. Wielkość promienia zaokrąglenia uwarunkowana była poziomem obciążenia zewnętrznego, a także faktem, o jakiej długości pęknięcia analizowano rozpatrywany przypadek [22]. W przypadku każdej próbki, obszar przywierzchołkowy o promieniu równym około  $(1.0\div 5.0)\text{mm}$ , podzielono na  $(36\div 50)$  elementów skończonych (ES), z których najmniejszy położony przy wierzchołku pęknięcia był  $(20\div 50)$  razy mniejszy od ostatniego [22]. Oznaczało to, że w skrajnych przypadkach, najmniejszy element, zlokalizowany tuż przy wierzchołku pęknięcia stanowił około  $1/3076$  lub  $1/10210$  szerokości próbki  $W$ , a największy modelujący obszar przywierzchołkowy około  $1/154$  lub  $1/204$  szerokości próbki [22]. Parametry modelu numerycznego zależały ściśle od analizowanej geometrii (typ próbki, długość pęknięcia), charakterystyki materiałowej oraz obciążenia zewnętrznego [22].

Analizę prowadzono przy założeniu małych odkształceń i małych przemieszczeń [4, 20, 21, 22], przy czym dla dominacji p.s.o. model skończenie elementowy wypełniono dziewięciowęzłowymi ES typu „2-D SOLID plane strain” o interpolacji typu „mixed” z dziewięcioma punktami całkowania numerycznego (PCN) [22, 30, 31]. Założenie płaskiego stanu odkształcenia, narzuca użytkownikowi programu ADINA grubość analizowanego elementu konstrukcyjnego, która automatycznie zostaje ustawiona na  $B=1\text{m}$  [22, 30, 31].



**Rys. 5.** Przykładowy model numeryczny próbki CCSP(BT) wykorzystany w analizie numerycznej do oszacowania obciążeń granicznych [22]: a) model ogólny; b) powiększony fragment siatki w obszarze przywierzchołkowym; c) model wierzchołka pęknięcia.

Ze względu na symetrię, próbki modelowano z uwzględnieniem stosownych osi symetrii, uwzględniając właściwe warunki brzegowe (patrz rys. 3) [22]. Podejście takie pozwala na wykorzystanie większej liczby ES na mniejszym fragmencie próbki, zmniejsza czas analizy numerycznej, a od prowadzącego analizę wymaga zablokowania we właściwym miejscu odpowiednich przemieszczeń w kolejnych węzłach. W przypadku próbki CCSP(BT) modelowano ćwiart-

kę próbki, wykorzystując dwie prostopadłe do siebie osie symetrii [22]. Rysunek 5 prezentują przykładowy model numeryczny próbki CCSP(BT), wykorzystane w projekcie badawczym oraz miniaturkę całej próbki z zakreskowanym fragmentem, który modelowano w programie ADINA SYSTEM 8.8 [22, 30, 31].

Obciążenie zewnętrzne – rozciąganie w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach, czyli złożony schemat obciążenia, składający się z I-wszego i II-giego sposobu obciążenia – realizowano przez przyłożenie do właściwych brzegów liniowo narastających w czasie naprężeń  $\sigma_{yy\_ext}$  (zapewniają składową charakterystyczną dla II-giego sposobu obciążenia) oraz naprężeń  $\sigma_{zz\_ext}$  (zapewniają składową charakterystyczną dla I-wszego sposobu obciążenia) [22]. W przypadku rozważanych próbek CCSP(BT) badano również, jak zmieni się poziom więzów płaskich, przy różnym układzie wartości naprężeń rozciągających, testując różne wartości ilorazu  $\sigma_{yy\_ext}/\sigma_{zz\_ext} = \{0, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00, 1.25, 1.50\}$  [22]. Indeksy „yy” oraz „zz” w modelu numerycznym wygenerowanym w programie ADINA [30, 31] odpowiadają odpowiednio indeksom „11” oraz „22” na rysunku 3, prezentującym geometrię próbki CCSP(BT) [22].

Rozwiązywanie zagadnień z zakresu mechaniki pęknięcia wymaga numerycznego oszacowania parametru kontrolującego pole naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia – mowa o całce J. Całkę J w trakcie obliczeń numerycznych można wyznaczać dwiema metodami [4, 13, 19]. Pierwsza z nich związana jest z definicją całki J, a druga wykorzystuje wirtualny przyrost długości pęknięcia. Po fazie testów, w ostatecznych obliczeniach, wykorzystano drugi sposób, pozwalający oszacować całkę J metodą wirtualnego przyrostu. Zaznaczyć należy, że wartości całki J liczone z definicji oraz metodą wirtualnego przyrostu dawały takie same rezultaty [4, 13, 19].

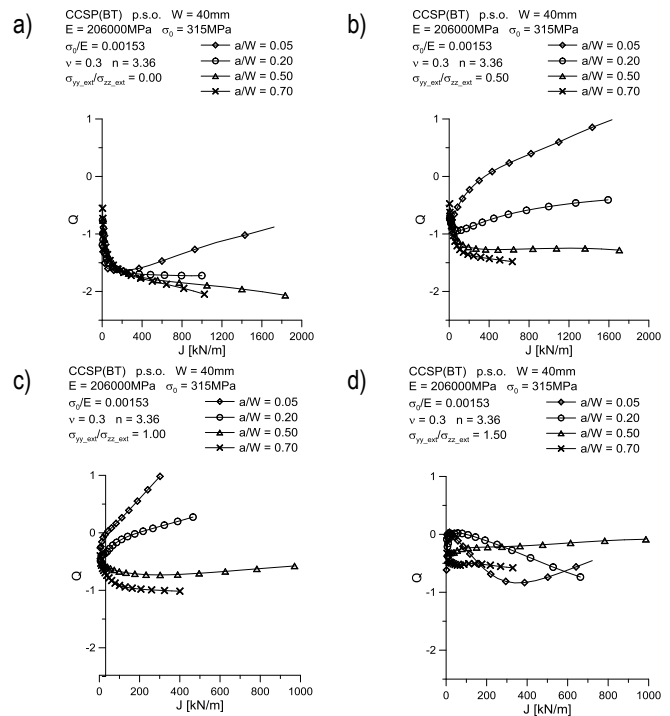
Całkowity model numeryczny, w zależności od rodzaju materiału, długości pęknięcia oraz obciążenia zewnętrznego, składał się z  $3149 \div 3428$  elementów skończonych, zawierających  $12803 \div 13921$  węzłów [22]. Łącznie w programie badawczym analizie numerycznej poddano 448 modeli, różniących się granicą plastyczności, wykładnikiem umocnienia, względną długością pęknięcia oraz rodzajem obciążenia zewnętrznego.

### 3. WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH DLA PRÓBEK CCSP(BT) – WARTOŚCI OBCIĄŻEŃ GRANICZNYCH

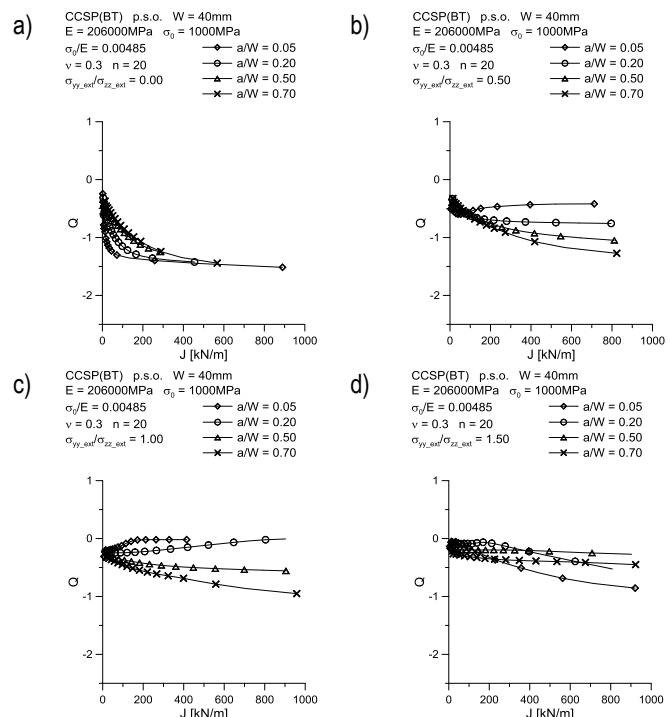
Jak już wspomiano, w niniejszej pracy dokonano oceny pola naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia w płycie CCSP(BT) podanej dwuosowemu rozciąganiu, oszacowując, jak bardzo rozkład naprężeń dla takiej płyty (rozkład rzeczywisty wyznaczony metodą MES) różni się od rozwiązania HRR podanego dla materiału płyty w pierwszym sposobie obciążenia (patrz rysunek 1a, [22]).

Rysunki 6 i 7 prezentują wpływ względnej długości pęknięcia na trajektorie J-Q przy różnym ilorazie zewnętrznych naprężeń rozciągających  $\sigma_{yy\_ext}/\sigma_{zz\_ext}$  (zamiennie można używać notacji  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$ , co zostało już wyjaśnione wcześniej). Rysunek 6 odnosi się do materiałów bardzo silnie się umacniających –  $n=3.36$ , natomiast rysunek 7 do materiałów bardzo słabo się umacniających  $n=20$ . Daje się zauważyć, że wzrost udziału naprężeń ścinających powierzchni pęknięcia (wzrost ilorazu  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$ ) znacząco wpływa na ułożenie krzywych J-Q, zmieniając ich charakter. O ile dla przypadku płyt rozciąganych w jednym kierunku ( $\sigma_{11}/\sigma_{22}=0$ ), w początkowej fazie obciążenia obserwuje się najniższe wartości naprężeń Q dla płyt z bardzo krótkimi szczelinami, następnie wartości naprężeń Q rosną w miarę wzrostu długości pęknięcia (potem krzywe J-Q wraz ze wzrostem obciążenia krzyżują się i następuje odwrócenie tendencji), to w przypadku dwuosowego rozciągania, dla określonego ilorazu  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$  najniższe wartości naprężeń Q – niski poziom więzów geometrycznych charakteryzuje próbki zawierające długie

szczeliny ( $a/W=0.70$ ). Warto zauważyć, że dla przypadku płyt zawierających pęknięcia normalatywne ( $a/W=0.50$ ), po osiągnięciu pewnego poziomu obciążenia zewnętrznego, obserwuje się niemal stałą wartość poziomu więzów wobec rosnącej wartości całki J.



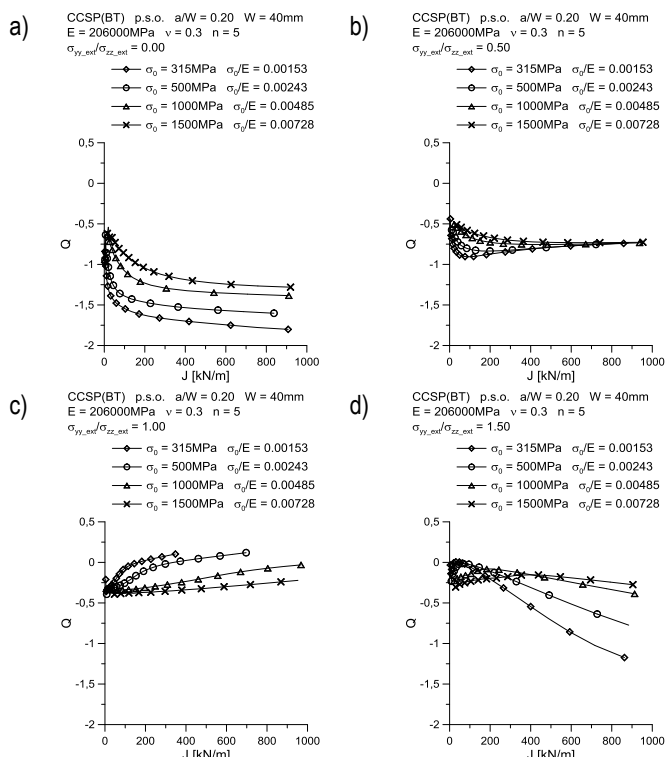
Rys. 6. Wpływ względnej długości pęknięcia na rozkład krzywych J-Q dla płyt CCSP(BT) dla różnego ilorazu naprężeń rozciągających  $\sigma_{yy\_ext}/\sigma_{zz\_ext} = \sigma_{11}/\sigma_{22}$  – materiał silnie się umacniający.



Rys. 7. Wpływ względnej długości pęknięcia na rozkład krzywych J-Q dla płyt CCSP(BT) dla różnego ilorazu naprężeń rozciągających  $\sigma_{yy\_ext}/\sigma_{zz\_ext} = \sigma_{11}/\sigma_{22}$  – materiał słabo się umacniający.

Zatem jak się okazuje wpływ względnej długości pęknięcia na krzywe J-Q w płytach CCSP(BT) nie jest jednoznaczny, zależny jest od stopnia umocnienia materiału oraz ilorazu zewnętrznych obciążeń rozciągających  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$ . Podobnie można powiedzieć o wpływie

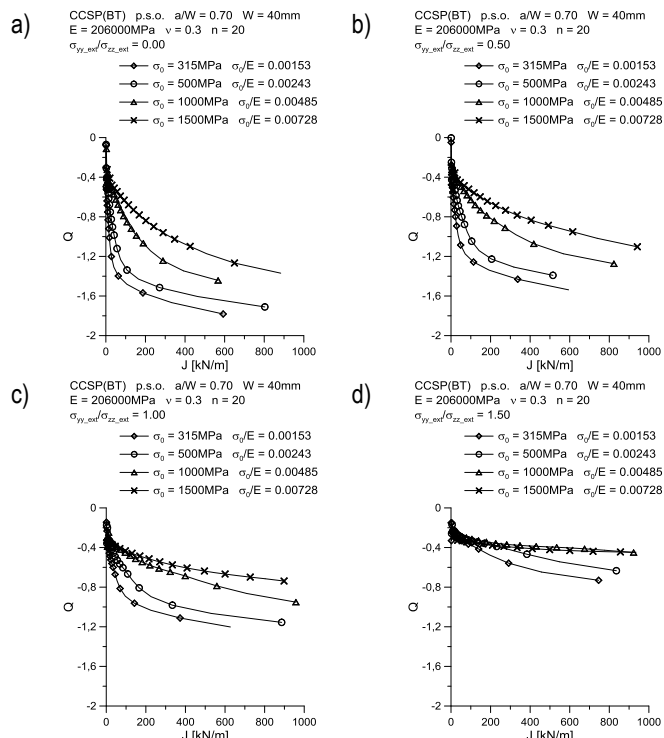
granicy plastyczności. W przypadku krótkich szczelin i płyt wykonanych z materiału silnie się umacniającego, krzywe J-Q zmieniają charakter przebiegu (rys. 8). Najniższe więzy płaskie dla pewnego zakresu ilorazu  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$  charakteryzują płyty wykonane z materiałów opisanych niską granicą plastyczności. Jednakże wzrost obciążeń ścinających, a zatem wzrost ilorazu  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$  powoduje, że najniższe więzy przypisać można płytom wykonanym z materiału wysoce wytrzymałego. Dla przypadku  $\sigma_{11}/\sigma_{22}=1.50$  obserwuje się ciągłą zmianę charakteru krzywych J-Q, a poziom więzów z wysokiego na niski zmienia się wraz z rosnącym obciążeniem zewnętrznym, wyrażonym całką J. Dla przypadku płyt zawierających długie pęknięcia, które wykonane są z materiału słabo się umacniającego (rys. 9), najniższe więzy charakterystyczne są dla płyt wykonanych z materiałów opisanych niską granicą plastyczności, przy czym wzrost granicy plastyczności oznacza wzrost poziomu więzów płaskich. Zaznaczyć należy, że w tym przypadku poziom więzów rośnie wraz ze wzrostem udziału naprężeń ścinających powierzchni pęknięcia – czyli ze wzrostem ilorazu  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$  (rys. 9).



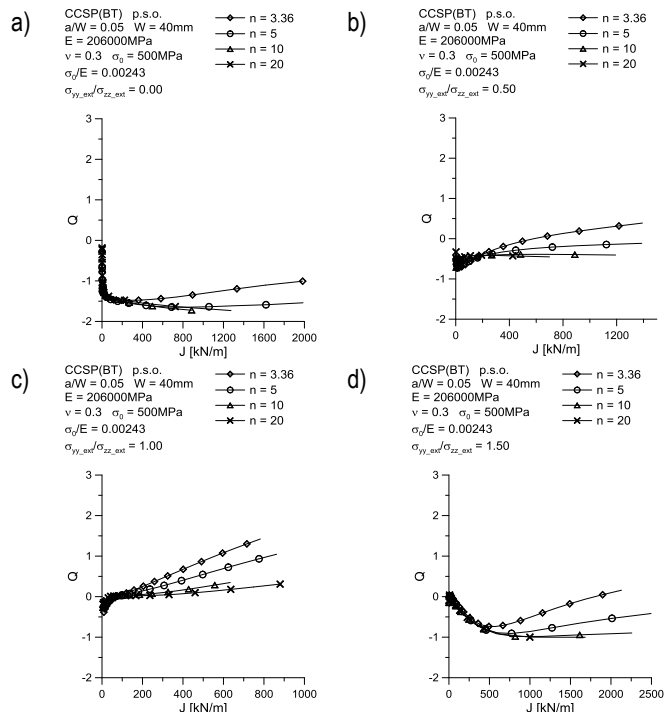
Rys. 8. Wpływ granicy plastyczności na rozkład krzywych J-Q dla płyt CCSP(BT) dla różnego ilorazu naprężeń rozciągających  $\sigma_{yy\_ext}/\sigma_{zz\_ext} = \sigma_{11}/\sigma_{22}$  – materiał silnie się umacniający, a/W=0.20.

Analizując wpływ wykładnika potęgowego na rozkład krzywych J-Q (rys. 10), zaznaczyć należy, że dla ilorazu  $\sigma_{11}/\sigma_{22}=0$ , początkowo najniższy poziom więzów obserwuje się dla płyt CCSP(BT) wykonanych z materiałów silnie się umacniających – n=3.36. Wzrost obciążenia zewnętrznego sprawia, że spada poziom więzów w płytach wykonanych z materiałów słabo się umacniających – n=20. Jednakże wzrost udziału naprężeń ścinających powierzchnię pęknięcia – czyli wzrost ilorazu  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$ , sprawia, że poziom więzów płaskich rośnie, jednakże w przypadku ilorazu  $\sigma_{11}/\sigma_{22}>1.0$ , następuje zmiana charakteru krzywych J-Q. Wnioski te dotyczą płyt zawierających bardzo krótkie szczeliny – a/W=0.05 (rys. 10). W przypadku płyt CCSP(BT) zawierających szczeliny normatywne – a/W=0.50 (rys. 11), przy ilorazie obciążeń zewnętrznych  $\sigma_{11}/\sigma_{22}\geq 1.0$ , obserwuje się niemalże brak wpływu wykładnika potęgowego n na rozkład krzywych J-Q. Dla przypadków mniejszych ilorazów obciążenia

zewnętrznego  $\sigma_{11}/\sigma_{22}<1.0$ , poziom więzów geometrycznych maleje wraz ze spadkiem ilorazu  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$ , a najniższe wartości naprężeń Q charakterystyczne są dla materiałów silnie się umacniających.



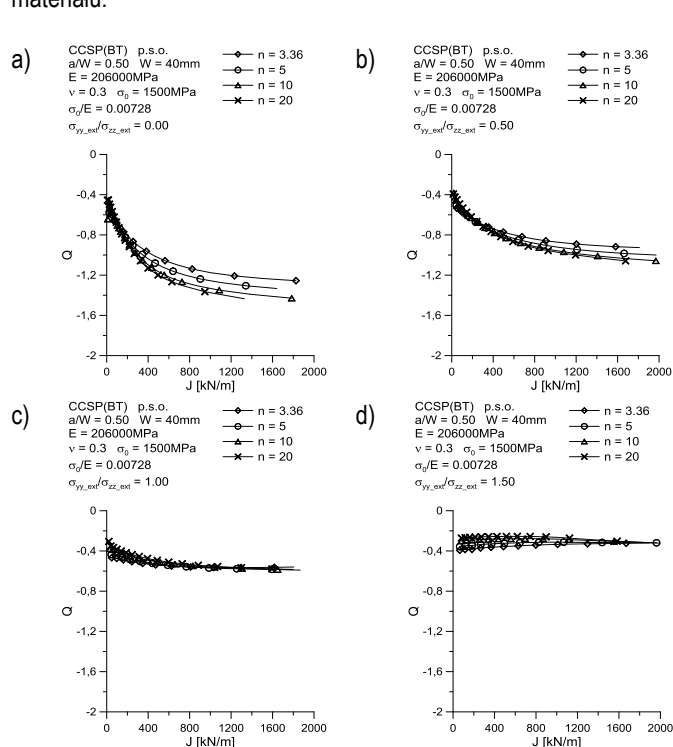
Rys. 9. Wpływ granicy plastyczności na rozkład krzywych J-Q dla płyt CCSP(BT) dla różnego ilorazu naprężeń rozciągających  $\sigma_{yy\_ext}/\sigma_{zz\_ext} = \sigma_{11}/\sigma_{22}$  – materiał słabo się umacniający, a/W=0.70.



Rys. 10. Wpływ wykładnika potęgowego na rozkład krzywych J-Q dla płyt CCSP(BT) dla różnego ilorazu naprężeń rozciągających  $\sigma_{yy\_ext}/\sigma_{zz\_ext} = \sigma_{11}/\sigma_{22}$  – a/W=0.05.

Również bezpośredni wpływ ilorazu naprężeń rozciągających  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$  na rozkład krzywych J-Q nie jest jednoznacznie zdefiniowany w przypadku rozważania geometrii płyt CCSP(BT) – rys. 12. W przypadku szczelin krótkich, a/W=0.20, (rys. 12a, b) najniższy po-

ziom więzów obserwuje się dla niskich wartości ilorazu  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$ . Wzrost udziału naprężeń ścinających powierzchni pęknięcia jest jednoznaczny ze wzrostem poziomu więzów płaskich, jednakże po osiągnięciu pewnego poziomu obciążenia zewnętrznego, więzy płaskie dla przypadku ilorazu  $\sigma_{11}/\sigma_{22} \geq 1.0$  ponownie zaczynają spadać. Dla przypadku szczelin długich ( $a/W=0.70$ ), poziom więzów rośnie wraz ze wzrostem ilorazu  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$ , a charakter krzywych J-Q i ich ułożenie, są w zasadzie niezależne od stopnia umocnienia materiału.



**Rys. 11.** Wpływ wykładnika potęgowego na rozkład krzywych J-Q dla płyt CCSP(BT) dla różnego ilorazu naprężeń rozciągających  $\sigma_{yy\_ext}/\sigma_{zz\_ext} = \sigma_{11}/\sigma_{22} - a/W=0.50$ .

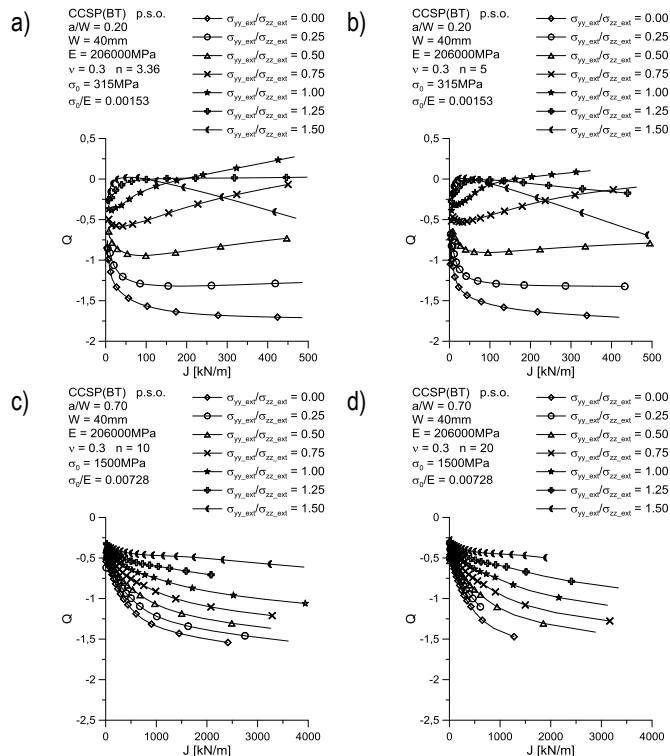
## PODSUMOWANIE

W artykule przedstawiona została charakterystyka pól naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia dla kwadratowej płyty zawierającej centralne pęknięcie, poddanej dwuosiemu rozciąganiu – płyta CCSP(BT). W pracy zaprezentowano szczegóły obliczeń numerycznych, a także dokonano porównania stanów naprężeń dla wybranych płyt poddanych jednoosiowemu rozciąganiu oraz płyt poddawanych dwuosiemu rozciąganiu. Pola naprężeń analizowano pod kątem różnicy pomiędzy rzeczywistym rozwiązaniem numerycznym MES oszacowanym w programie ADINA dla płyt CCSP(BT), a rozwiązaniem HRR wyznaczonym dla materiału płyty dla pierwszego sposobu obciążenia.

Przeprowadzona analiza numeryczna pozwoliła ocenić, jak zmienia się poziom płaskich więzów geometrycznych, wyrażonych za pomocą naprężeń Q, wraz ze zmianą geometrii elementu konstrukcyjnego (poprzez zmianę względnej długości pęknięcia  $a/W$ ), charakterystyki materiałowej (zmiana granicy plastyczności oraz wykładnika umocnienia w prawie R-O) oraz ilorazu zewnętrznych naprężeń rozciągających -  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$ . Wyciągnięte w niniejszej pracy wnioski wskazują, na niejednoznaczność zależności poziomu więzów geometrycznych od wyżej wymienionych czynników – fakt ten spowodowany jest ogromnym wpływem ilorazu naprężeń rozciągających działających na próbkę -  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$ . Jednoznacznie można określić jedynie wpływ ilorazu  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$  na poziom więzów – im większa wartość  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$ , tym większy poziom płaskich więzów geometrycz-

nych, jednakże w przypadku bardzo krótkich i długich szczelin, po przekroczeniu określonych poziomów obciążenia zewnętrznego, wnioski te nie są prawdziwe.

Zaprezentowana praca nie wyczerpuje tematyki więzów płaskich dla płyt kwadratowych z centralną szczeliną poddanych dwuosiemu rozciąganiu. W najbliższym czasie autor pracy zamierza opublikować rozszerzone wyniki obliczeń numerycznych, wraz z ich aproksymacjami.



**Rys. 12.** Wpływ ilorazu rozciągających naprężeń zewnętrznych  $\sigma_{yy\_ext}/\sigma_{zz\_ext} = \sigma_{11}/\sigma_{22}$  na rozkład krzywych J-Q dla płyt CCSP(BT).

## ADNOTACJA

Pracę wykonano w ramach realizacji projektu badawczego IU-VENTUS PLUS o numerze **IP2012 011872**, finansowanego ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

## BIBLIOGRAFIA

- Williams M.L., 1957, *On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack*, ASME JAM, Vol. 24, pp.111-114.
- Hutchinson J.W., 1968, *Singular Behavior at End of Tensile Crack in Hardening Material*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 16, No. 1, pp. 13-31.
- Rice J.R., Rosengren G.F., 1968, *Plane Strain Deformation Near Crack Tip in Power-Law Hardening Material*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 16, No. 1, pp. 1-12.
- Graba M., 2009, *Numerical analysis of the mechanical fields near the crack tip in the elastic-plastic materials. 3D problems.*, PhD dissertation, Kielce University of Technology - Faculty of Mechatronics and Machine Building, 387 pages, Kielce 2009.
- Li Y., Wang Z., 1985, *High-Order Asymptotic Field of Tensile Plane-Strain Nonlinear Crack Problems*, Scientia Sinica (Series A), Vol. XXIX, No. 9, pp. 941-955.
- Yang S., Chao Y.J., Sutton M.A., 1993, *Higher Order Asymptotic Crack Tip Fields in a Power-Law Hardening Material*, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 19, No. 1, 1993, pp.1-20.

7. Sharma, S.M., Aravas, N., 1991, *Determination of Higher Order Terms in Asymptotic Elastoplastic Crack Tip Solutions*, J. Mech. Phys. Solids, 39, pp. 1043-1072.
8. O'Dowd N.P., Shih C.F., 1991, *Family of Crack-Tip Fields Characterized by a Triaxiality Parameter – I. Structure of Fields*, J. Mech. Phys. Solids, vol.39, No.8, pp. 989-1015.
9. O'Dowd N.P., Shih C.F., 1992, *Family of Crack-Tip Fields Characterized by a Triaxiality Parameter – II. Fracture Applications*, J. Mech. Phys. Solids, vol. 40, No. 5, 1992, pp. 939-963.
10. Shih C.F., O'Dowd N.P., Kirk M.T., 1993, *A Framework for Quantifying Crack Tip Constraint*, Constraint Effects in Fracture, E.M.Hackett, K.H.Schwalbe, R.H.Dodds, ASTM STP 1171, Philadelphia, pp. 2-20.
11. O'Dowd N.P., 1995, *Application of Two Parameter Approaches in Elastic-Plastic Fracture Mechanics*, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 52, No. 3, pp. 445-465.
12. O'Dowd N.P., Shih C.F., Dodds R.H. Jr, 1995, *The Role of Geometry and Crack Growth on Constraint and Implications for Ductile/Brittle Fracture*, Constraint Effects in Fracture Theory and Applications: Second Volume, ASTM STP 1244, Mark Kirk and Ad Bakker, Eds., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, pp.134-159.
13. Graba M., 2010, *Napężenia Q jako parametr niezbędny w praktycznych zastosowaniach mechaniki pęknięcia*, Materiały XXIII Sympozjum Zmęczenia i Mechaniki Pęknięcia; Bydgoszcz - Pieczęyska, maj 2010r., artykuł w formie elektronicznej - 17 stron, streszczenie drukowane
14. Sherry A.H., France C.C., Goldthorpe M.R., 1995, *Compendium of T-stress solutions for two and three dimensional cracked geometries*, Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, Vol. 18, No. 1, 1995, pp. 141-155.
15. Leevers P.S., Radon J.C., 1983, *Inherent Stress Biaxiality in Various Fracture Specimen Geometries*, International Journal of Fracture, 19, 1983, pp.311-325
16. SINTAP, 1999, *SINTAP: Structural Integrity Assessment Procedures for European Industry. Final Procedure*, Brite-Euram Project No BE95-1426. – Rotherham: British Steel.
17. FITNET, 2006, *FITNET Report, (European Fitness-for-service Network)*, Edited by M. Kocak, S. Webster, J.J. Janosch, R.A. Ainsworth, R. Koers, Contract No. G1RT-CT-2001-05071.
18. Graba M., 2008, *The Influence of Material Properties on the Q-stress Value near the Crack Tip for Elastic-Plastic Materials*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 46, No. 2, pp. 269-290, Warsaw 2008.
19. Graba M., 2009, *Wpływ stałych materiałowych na rozkład naprężeń Q przed wierzchołkiem pęknięcia w materiałach sprężysto-plastycznych dla płyty z centralną szczeliną poddanej rozciąganiu*, Materiały Konferencyjne V MSMZMiK, Augustów, 3-6.06.2009, abstrakt str. 48-49; CD – 9 stron.
20. Brocks W., Cornec A., Scheider I., 2003, *Computational Aspects of Nonlinear Fracture Mechanics*, Bruchmechanik, GKSS-Forschungszentrum, Geesthacht, Germany, Elsevier pp.127-209.
21. Brocks W., Scheider I., 2003, *Reliable J-Values. Numerical Aspects of the Path-Dependence of the J-integral in Incremental Plasticity*, Bruchmechanik, GKSS-Forschungszentrum, Geesthacht, Germany, Elsevier pp.264-274.
22. Graba M., 2015, *o wyznaczaniu obciążeń granicznych płyt kwadratowych z centralną szczeliną w dwuosiowym rozciąganiu*, materiały konferencyjne TransComp 2015.
23. Meek C, Ainsworth RA., 2015, *The effects of load biaxiality and plate length on the limit load of a centre-cracked plate*, EFM, <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.03.034>
24. Shih C.F., 1974, *small-scale yielding analysis of mixed-mode plane-strain crack problems*, Fracture Analysis, ASTM STP 560, ASTM, 1974, pp. 187-220.
25. Graba M., 2012, *Numerical verification of the relationship between the "in-plane geometric constraints" used in fracture mechanics problems*, Acta Mechanica et Automatica, Vol. 6, No.23, 2012, pp. 38-47.
26. Neimitz A., Dzioba I., Graba M., Okrajni J., 2008, *The assessment of the strength and safety of the operation high temperature components containing crack*, Kielce University of Technology Publishing House, Kielce.
27. Huang Y., Zhang L., Guo T.F., HwangK.-C, 1997, *Mixed mode near-tip fields for cracks in materials with strain-gradient effects*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 45, No. 3, pp. 439-465, 1997.
28. Subramanya H.Y., Viswanath S., Narasimhan R., 2005, *A three-dimensional numerical study of mixed mode (I and II) crack tip fields in elastic-plastic solids*, International Journal of Fracture 136:167-185, DOI 10.1007/s10704-005-5422-5.
29. Sherry A.H., Wilkes M.A., Beardsmore D.W., Lidbury D.P.G., 2005, *Material constraint parameters for the assessment of shallow defects in structural components – Part I: Parameter solutions*, Engineering Fracture Mechanics, 72, pp. 2373-2395.
30. ADINA 8.8, *ADINA: User Interface Command Reference Manual – Volume I: ADINA Solids & Structures Model Definition*, Report ARD 11-2, ADINA R&D, Inc., 2011.
31. ADINA 8.8, *ADINA: Theory and Modeling Guide – Volume I: ADINA Solids & Structures*, Report ARD 11-8, ADINA R&D, Inc., 2011.

## CHARACTERISTIC OF THE STRESS FIELDS NEAR CRACK TIP FOR CENTER CRACKED SQUARE PLATE IN BIAxIAL TENSION

### Abstract

*In the paper the stress field near front of crack for center cracked square plate in biaxial tension was presented. The paper presents the details of numerical calculations, and also the comparison of states of stress for plates subjected to uniaxial tensile and plates to be in biaxial tension. The influence of the crack length, material characteristic and the level or type of external load were discussed.*

**The paper was carried out in the framework of the research project IUVENTUS PLUS number IP2012 011872, financed by the Polish Ministry of Science and Higher Education.**

Autorzy:  
dr inż. **Marcin Graba** – Politechnika Świętokrzyska, Wydział Mechatroniki i Budowy Maszyn, Katedra Technologii Mechanicznej i Metrologii, email: [mgraba@tu.kielce.pl](mailto:mgraba@tu.kielce.pl)