

WOJCIECH MOCHOCKI¹
PAULINA OBARA²
URSZULA RADOŃ³
PAWEŁ ZABOJSZCZA⁴

Kielce University of Technology

¹e-mail: wmochocki@tu.kielce.pl

²e-mail: paula@tu.kielce.pl

³e-mail: zmbur@tu.kielce.pl

⁴e-mail: p.zabojszcza@student.tu.kielce.pl

EFFECTS OF SINGLE-LAYER TRUSS DOME GEOMETRY ON CRITICAL LOAD CAPACITY

WPŁYW ZMIAN GEOMETRII NA NOŚNOŚĆ KRYTYCZNĄ JEDNOWARSTWOWEJ KOPUŁY KRATOWEJ

Abstract

The purpose of this article is to estimate the effect of geometric imperfections on critical loads. Special attention was paid to trusses subjected to large displacement gradients and vulnerable to stability loss due to snapping. The article uses the Lagrangian description for geometric nonlinearities. The truss stability analysis was performed using the Finite Element Method. The equilibrium path was determined using the scalar current parameter of stiffness and method of arc length constant.

Keywords: stability, nonlinear analysis, equilibrium path, geometric imperfections, critical loads

Streszczenie

Celem artykułu jest oszacowanie wpływu imperfekcji geometrycznych na obciążenie krytyczne. Szczególną uwagę zwrócono na kratownice poddane dużym gradientom przemieszczeń i podatne na utratę stateczności przez przeskok. W pracy zastosowano opis Lagrange'a uwzględniający nieliniowości geometryczne. Analizę stateczności kratownicy przeprowadzono za pomocą metody elementów skończonych. Do określenia ścieżki równowagi wykorzystano metodę skalarne parametru sztywności i metodę stałej długości łuku.

Słowa kluczowe: stateczność, analiza nieliniowa, ścieżka równowagi, imperfekcje geometryczne, obciążenie krytyczne

1. Introduction

Analysis of stability of bar structures with the finite element method [1-7] involves solving large systems of nonlinear equations. The relationship between displacements and loads in a $(N+1)$ -dimensional space is described by an equilibrium path. Elastic stability is closely related to singularities along this path. These singular points are considered as critical points, with an occurrence of a limit point known as snapping and that of a bifurcation point known as buckling. The article shows the significant role of geometric imperfections in shallow truss structures.

1. Wprowadzenie

Analiza stateczności konstrukcji prętowych, przy zastosowaniu metody elementów skończonych [1-7], polega na rozwiązywaniu dużych układów równań nieliniowych. Zależność przemieszczeń od obciążeń w przestrzeni $(N+1)$ opisuje ścieżka równowagi. Problem stateczności sprężystej jest ściśle związany z osobliwościami występującymi wzdłuż tej ścieżki. Te pojedyncze punkty są określane jako krytyczne. Klasyfikacja w punktach granicznych i punktach bifurkacji, które są związane z fizycznym pojęciem odpowiednio przeskoku i wyboczenia, jest dobrze znana. W artykule pokazano jak istotną rolę odgrywają imperfekcje geometryczne w kratownicach słabo wyniosłych.

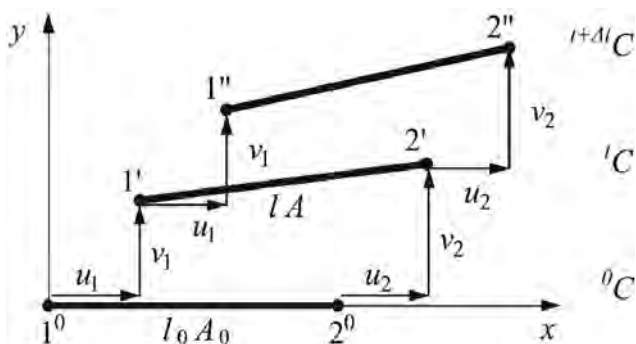
2. Tangent stiffness matrix for a truss element

Analysis covers a flat finite element of a truss in the undeformed (initial) configuration, 0C and in the deformed configuration, tC and ${}^{t+\Delta t}C$ (Fig. 1). The following material and geometric constants were adopted: E – Young’s modulus, l_0 – the initial length, A_0 – the initial cross-sectional area, l – the length in the deformed configuration, A – the cross-sectional area in the deformed configuration. The deformation field in the deformed configuration tC is described by four components $\mathbf{q} = \{u_1, v_1, u_2, v_2\}$, and the displacement increment between time t and $t+\Delta t$ is described by vector $\Delta\mathbf{q} = \{\Delta u_1, \Delta v_1, \Delta u_2, \Delta v_2\}$. These displacement vectors correspond to nodal force vectors: $\mathbf{Q} = \{U_1, V_1, U_2, V_2\}$ and $\Delta\mathbf{Q} = \{\Delta U_1, \Delta V_1, \Delta U_2, \Delta V_2\}$.

The strain tensor in this case reduces to one non-zero quantity of the Green-Lagrange tensor that characterizes the elongation of a bar:

$$\varepsilon = {}^t\varepsilon = \frac{u_2 - u_1}{l_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_2 - u_1}{l_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{v_2 - v_1}{l_0} \right)^2 \quad (1)$$

Equation (1) accounts for the effect of geometric nonlinearity, which means that large displacements were taken into account [2, 8]. The other components of the strain tensor are equal to zero. The Green-Lagrange strain tensor is coupled to the Pioli-Kirchhoff’s second stress tensor. We use the initial reference configuration, thus axial force S defined as $S = EA\varepsilon$ is not the real force in the bar. It corresponds to component $S_{11} = \sigma$ of the 2nd Piola-Kirchhoff symmetric stress tensor. The real axial force $S' = Sl/l_0$.



2. Styczna macierz sztywności dla elementu kratowego

W pracy rozważany jest płaski, kratowy element skończony w konfiguracji nieodkształconej (początkowej) 0C i w konfiguracji zdeformowanej tC oraz ${}^{t+\Delta t}C$ (rys. 1). Do analizy przyjęto następujące stałe materiałowe i geometryczne: E – moduł Younga, l_0 – długość początkowa, A_0 – początkowy przekrój poprzeczny, l – długość w konfiguracji zdeformowanej, A – przekrój poprzeczny w konfiguracji zdeformowanej. Pole przemieszczeń w konfiguracji zdeformowanej tC opisane jest czterema składowymi $\mathbf{q} = \{u_1, v_1, u_2, v_2\}$, natomiast przyrost przemieszczeń pomiędzy chwilą t a $t+\Delta t$ opisany jest przez wektor $\Delta\mathbf{q} = \{\Delta u_1, \Delta v_1, \Delta u_2, \Delta v_2\}$. Podanym wektorom przemieszczeń odpowiadają wektory sił węzłowych: $\mathbf{Q} = \{U_1, V_1, U_2, V_2\}$ i $\Delta\mathbf{Q} = \{\Delta U_1, \Delta V_1, \Delta U_2, \Delta V_2\}$.

Tensor odkształceń w analizowanym przypadku redukuje się do jednej niezerowej wielkości tensora Greena-Lagrange’a charakteryzującej wydłużenie pręta:

$$\varepsilon = {}^t\varepsilon = \frac{u_2 - u_1}{l_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_2 - u_1}{l_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{v_2 - v_1}{l_0} \right)^2 \quad (1)$$

Równanie (1) uwzględnia efekt nieliniowości geometrycznej, co oznacza, że w rozważaniach uwzględniono duże przemieszczenia [2, 8]. Pozostałe składniki tensora odkształceń są równe zero. Wielkością sprzężoną w stosunku do tensora Greena-Lagrange’a w opisie naprężeń jest drugi symetryczny tensor Pioli-Kirchhoffa. W związku z tym, że korzystamy z początkowej konfiguracji odniesienia, siła osiowa S zdefiniowana jako $S = EA\varepsilon$ nie jest rzeczywistą siłą panującą w pręcie. Odzwierciedla ona składową $S_{11} = \sigma$ drugiego symetrycznego tensora naprężeń Pioli-Kirchhoffa. Rzeczywista siła osiowa jest równa $S' = Sl/l_0$.

Fig. 1. Truss element in the undeformed (initial), 0C , and deformed tC and ${}^{t+\Delta t}C$ configurations

Rys. 1. Element kratowy w konfiguracji niezdeformowanej (początkowej) 0C i zdeformowanej tC oraz ${}^{t+\Delta t}C$

Displacement, strain and stress fields in the deformed configuration ${}^{t+\Delta t}C$ are as follows:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{q} = {}^t\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}, \quad {}^{t+\Delta t}\varepsilon = {}^t\varepsilon + \Delta\varepsilon, \quad {}^{t+\Delta t}\sigma = {}^t\sigma + \Delta\sigma \quad (2)$$

Pola przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w konfiguracji zdeformowanej ${}^{t+\Delta t}C$ wynoszą odpowiednio:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{q} = {}^t\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}, \quad {}^{t+\Delta t}\varepsilon = {}^t\varepsilon + \Delta\varepsilon, \quad {}^{t+\Delta t}\sigma = {}^t\sigma + \Delta\sigma \quad (2)$$

where: \mathbf{q} , ε , σ – displacements, strain and stress at time t , $\Delta\mathbf{q}$, $\Delta\varepsilon$, $\Delta\sigma$ – increments between time t and $t+\Delta t$. Strain increments can be written as:

$$\Delta\varepsilon = \Delta e + \Delta\eta \quad (3)$$

where: Δe – linear part due to displacement increments, $\Delta\eta$ – nonlinear part due to displacement increments:

$$\begin{aligned} \Delta e &= \frac{\Delta u_2 - \Delta u_1}{l_0} \left(1 + \frac{u_2 - u_1}{l_0} \right) + \\ &+ \left(\frac{\Delta v_2 - \Delta v_1}{l_0} \right) \left(\frac{v_2 - v_1}{l_0} \right) \\ \Delta\eta &= \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u_2 - \Delta u_1}{l_0} \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta v_2 - \Delta v_1}{l_0} \right)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Stress increments depend on the physical model adopted. For a linear-elastic material, Hooke's law, i.e., a linear relationship between stress and strain is valid:

$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon \quad (5)$$

The determination of the tangent stiffness matrix requires that variations of displacement vector increments and of strain increments be calculated:

$$\begin{aligned} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{q} &= \delta \left({}^t \mathbf{q} + \Delta\mathbf{q} \right) = \\ &= \delta^t \mathbf{q} + \delta\Delta\mathbf{q} = \delta\Delta\mathbf{q} \\ \delta^{t+\Delta t} \varepsilon &= \delta \left({}^t \varepsilon + \Delta\varepsilon \right) = \delta^t \varepsilon + \delta\Delta\varepsilon = \\ &= \delta\Delta\varepsilon = \delta \left(\Delta e + \Delta\eta \right) = \delta\Delta e + \delta\Delta\eta \end{aligned} \quad (6)$$

where: $\delta^t \mathbf{q} = 0$ and $\delta^t \varepsilon = 0$ because \mathbf{q} and ε are constant at time t .

For the element under analysis, the principle of virtual work at $t + \Delta t$ is formulated as follows:

$$\int_{V_0} \left(\delta^{t+\Delta t} \varepsilon \right) \left({}^{t+\Delta t} \sigma \right) dV_0 = \left(\delta^{t+\Delta t} \mathbf{q} \right)^T \left({}^t \mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q} \right) \quad (7)$$

which, after taking into account relationships (5) and (6), can be written as:

gdzie: \mathbf{q} , ε , σ – przemieszczenia, odkształcenie i naprężenie w chwili t , $\Delta\mathbf{q}$, $\Delta\varepsilon$, $\Delta\sigma$ – przyrosty pomiędzy chwilą t a $t+\Delta t$. Przyrosty odkształceń można zapisać w postaci:

$$\Delta\varepsilon = \Delta e + \Delta\eta \quad (3)$$

gdzie: Δe – liniowy człon ze względu na przyrosty przemieszczeń, $\Delta\eta$ – nieliniowy człon ze względu na przyrosty przemieszczeń:

$$\begin{aligned} \Delta e &= \frac{\Delta u_2 - \Delta u_1}{l_0} \left(1 + \frac{u_2 - u_1}{l_0} \right) + \\ &+ \left(\frac{\Delta v_2 - \Delta v_1}{l_0} \right) \left(\frac{v_2 - v_1}{l_0} \right) \\ \Delta\eta &= \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u_2 - \Delta u_1}{l_0} \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta v_2 - \Delta v_1}{l_0} \right)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Przyrost naprężeń zależy od przyjętego modelu fizycznego. Dla materiału liniowo-sprężystego obowiązuje prawo Hooke'a, czyli liniowa zależność pomiędzy naprężeniami i odkształceniami:

$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon \quad (5)$$

Do określenia stycznej macierzy sztywności niezbędne jest obliczenie wariancji przyrostu wektora przemieszczeń oraz wariancji przyrostu odkształceń:

$$\begin{aligned} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{q} &= \delta \left({}^t \mathbf{q} + \Delta\mathbf{q} \right) = \\ &= \delta^t \mathbf{q} + \delta\Delta\mathbf{q} = \delta\Delta\mathbf{q} \\ \delta^{t+\Delta t} \varepsilon &= \delta \left({}^t \varepsilon + \Delta\varepsilon \right) = \delta^t \varepsilon + \delta\Delta\varepsilon = \\ &= \delta\Delta\varepsilon = \delta \left(\Delta e + \Delta\eta \right) = \delta\Delta e + \delta\Delta\eta \end{aligned} \quad (6)$$

przy czym: $\delta^t \mathbf{q} = 0$ i $\delta^t \varepsilon = 0$, ponieważ \mathbf{q} i ε są stałe w chwili t .

Dla analizowanego elementu zasada prac wirtualnych w chwili $t + \Delta t$ jest sformułowana w postaci:

$$\int_{V_0} \left(\delta^{t+\Delta t} \varepsilon \right) \left({}^{t+\Delta t} \sigma \right) dV_0 = \left(\delta^{t+\Delta t} \mathbf{q} \right)^T \left({}^t \mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q} \right) \quad (7)$$

którą po uwzględnieniu zależności (5) i (6) można zapisać jako:

$$\begin{aligned}
 & A_0 \left\{ \int_{l_0}^t \sigma(\delta\Delta e) dx_0 + \int_{l_0}^t \sigma(\delta\Delta \eta) dx_0 \right\} + \\
 & + EA_0 \left\{ \int_{l_0} \Delta e(\delta\Delta e) dx_0 + \int_{l_0} \Delta e(\delta\Delta \eta) dx_0 + \right. \\
 & \left. + \int_{l_0} \Delta \eta(\delta\Delta e) dx_0 + \int_{l_0} \Delta \eta(\delta\Delta \eta) dx_0 \right\} = \\
 & = \delta\Delta \mathbf{q}^T ({}^t \mathbf{Q} + \Delta \mathbf{Q}).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Equation (8), satisfied for a random non-zero $\delta\Delta \mathbf{q}$, after transformation can be written in matrix notation:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_T^e \cdot \Delta \mathbf{q} &= ({}^t \mathbf{Q} - \mathbf{F}^e) + \Delta \mathbf{Q}; \\
 \mathbf{K}_T^e &= \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_{u_1} + \mathbf{K}_{u_2} + \mathbf{K}_\sigma
 \end{aligned} \tag{9}$$

where: \mathbf{F}^e – is the vector of internal forces in the member:

$$\mathbf{F}^e = S \left\{ -1 - \frac{\Delta u}{l_0}, -\frac{\Delta v}{l_0}, 1 + \frac{\Delta u}{l_0}, \frac{\Delta v}{l_0} \right\}$$

\mathbf{K}_T^e – is the tangent stiffness matrix of the element composed of linear stiffness matrix \mathbf{K}_0 , geometric stiffness matrix \mathbf{K}_σ and nonlinear stiffness matrices \mathbf{K}_{u_1} and \mathbf{K}_{u_2} :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_0 &= \frac{EA_0}{l_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_\sigma &= \frac{S}{l_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_{u_1} &= \frac{EA_0}{l_0^2} \begin{bmatrix} 2\Delta_u & \Delta_v & -2\Delta_u & -\Delta_v \\ \Delta_v & 0 & -\Delta_v & 0 \\ -2\Delta_u & -\Delta_v & 2\Delta_u & \Delta_v \\ -\Delta_v & 0 & \Delta_v & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_{u_2} &= \frac{EA_0}{l_0^3} \begin{bmatrix} \Delta_u^2 & \Delta_u \Delta_v & -\Delta_u^2 & -\Delta_u \Delta_v \\ \Delta_u \Delta_v & \Delta_v^2 & -\Delta_u \Delta_v & -\Delta_v^2 \\ -\Delta_u^2 & -\Delta_u \Delta_v & \Delta_u^2 & \Delta_u \Delta_v \\ -\Delta_u \Delta_v & -\Delta_v^2 & \Delta_u \Delta_v & \Delta_v^2 \end{bmatrix} \\
 & \Delta_u = u_2 - u_1, \Delta_v = v_2 - v_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_0 \left\{ \int_{l_0}^t \sigma(\delta\Delta e) dx_0 + \int_{l_0}^t \sigma(\delta\Delta \eta) dx_0 \right\} + \\
 & + EA_0 \left\{ \int_{l_0} \Delta e(\delta\Delta e) dx_0 + \int_{l_0} \Delta e(\delta\Delta \eta) dx_0 + \right. \\
 & \left. + \int_{l_0} \Delta \eta(\delta\Delta e) dx_0 + \int_{l_0} \Delta \eta(\delta\Delta \eta) dx_0 \right\} = \\
 & = \delta\Delta \mathbf{q}^T ({}^t \mathbf{Q} + \Delta \mathbf{Q}).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Równanie (8), spełnione dla dowolnego różnego od zera $\delta\Delta \mathbf{q}$, po przekształceniach można zapisać w formie macierzowej:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_T^e \cdot \Delta \mathbf{q} &= ({}^t \mathbf{Q} - \mathbf{F}^e) + \Delta \mathbf{Q}; \\
 \mathbf{K}_T^e &= \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_{u_1} + \mathbf{K}_{u_2} + \mathbf{K}_\sigma
 \end{aligned} \tag{9}$$

gdzie: \mathbf{F}^e – wektor sił wewnętrznych elementu:

$$\mathbf{F}^e = S \left\{ -1 - \frac{\Delta u}{l_0}, -\frac{\Delta v}{l_0}, 1 + \frac{\Delta u}{l_0}, \frac{\Delta v}{l_0} \right\}$$

\mathbf{K}_T^e – styczna macierz sztywności elementu składająca się z liniowej macierzy sztywności \mathbf{K}_0 , geometrycznej macierzy sztywności \mathbf{K}_σ i nieliniowych macierzy sztywności \mathbf{K}_{u_1} i \mathbf{K}_{u_2} :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_0 &= \frac{EA_0}{l_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_\sigma &= \frac{S}{l_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_{u_1} &= \frac{EA_0}{l_0^2} \begin{bmatrix} 2\Delta_u & \Delta_v & -2\Delta_u & -\Delta_v \\ \Delta_v & 0 & -\Delta_v & 0 \\ -2\Delta_u & -\Delta_v & 2\Delta_u & \Delta_v \\ -\Delta_v & 0 & \Delta_v & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_{u_2} &= \frac{EA_0}{l_0^3} \begin{bmatrix} \Delta_u^2 & \Delta_u \Delta_v & -\Delta_u^2 & -\Delta_u \Delta_v \\ \Delta_u \Delta_v & \Delta_v^2 & -\Delta_u \Delta_v & -\Delta_v^2 \\ -\Delta_u^2 & -\Delta_u \Delta_v & \Delta_u^2 & \Delta_u \Delta_v \\ -\Delta_u \Delta_v & -\Delta_v^2 & \Delta_u \Delta_v & \Delta_v^2 \end{bmatrix} \\
 & \Delta_u = u_2 - u_1, \Delta_v = v_2 - v_1
 \end{aligned}$$

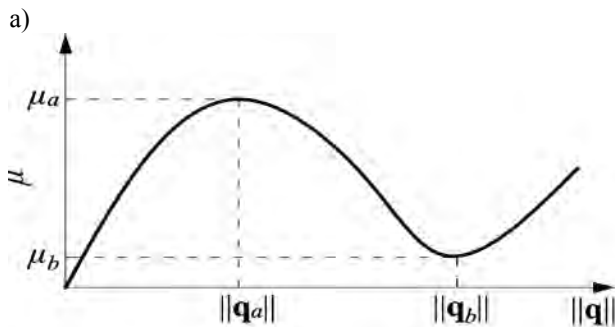
A similar procedure can be performed for the space truss element [2].

3. Description of numerical techniques

Two methods were used to solve nonlinear equation (9): the current stiffness parameter method and the arc length method. The concept for the first method, developed by Bergan and Soreide [9], is to characterize the behavior of a multidimensional nonlinear system by using one scalar quantity, the current stiffness parameter (*CSP*), representing the ratio of two quadratic forms formulated for the stiffness matrix at the initial and current times:

$$CSP = \frac{\Delta \mathbf{q}^{0T} \mathbf{K}_T^0 \Delta \mathbf{q}^0}{\Delta \mathbf{q}^{iT} \mathbf{K}_T^i \Delta \mathbf{q}^i} \quad (10)$$

This parameter can be used as a measure for the change in tangent stiffness matrix \mathbf{K}_T during the motion in the N -dimensional, displacement solution space.



Analogiczne rozważania można przeprowadzić dla przestrzennego elementu kratowego [2].

3. Opis technik numerycznych

W celu rozwiązania równania nieliniowego (9) w pracy zastosowano metodę skalarnego parametru sztywności oraz metodę stałej długości łuku. Podstawowa idea pierwszej metody polega na scharakteryzowaniu zachowania się wielowymiarowego układu nieliniowego przez jedną skalarną wielkość. Autorami metody są Bergan i Soreide [9]. Tą skalarną wielkością jest skalarny parametr sztywności (*CSP*) określający stosunek dwóch form kwadratowych utworzonych dla macierzy sztywności w chwilach początkowej i aktualnej:

$$CSP = \frac{\Delta \mathbf{q}^{0T} \mathbf{K}_T^0 \Delta \mathbf{q}^0}{\Delta \mathbf{q}^{iT} \mathbf{K}_T^i \Delta \mathbf{q}^i} \quad (10)$$

Jest to miara zmian macierzy stycznej układu \mathbf{K}_T przy poruszaniu się w N -wymiarowej, przemieszczeniowej przestrzeni rozwiązań.

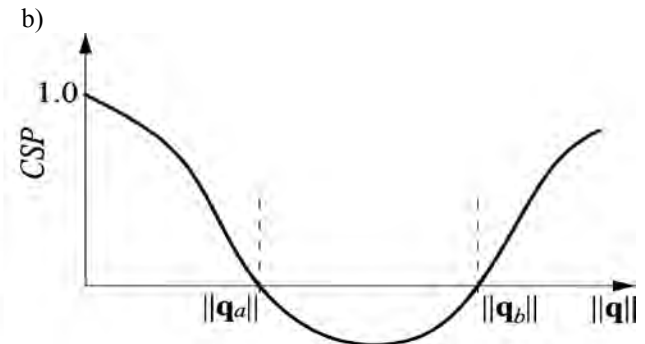


Fig. 2. a) Dependence of load parameter m on the norm of $\|\mathbf{q}\|$, b) dependence of the *CSP* on the norm of $\|\mathbf{q}\|$

Rys 2. a) Zależność parametru obciążenia m od normy $\|\mathbf{q}\|$, b) zależność parametru *CSP* od normy $\|\mathbf{q}\|$

Figure 2a shows the dependence of the load parameter μ on the norm of incremental displacements \mathbf{q} . Figure 2b shows the *CSP* variation curve with the change of \mathbf{q} . At an extremum point of the load-displacement curve, the *CSP* is zero (singular stiffness matrix). The *CSP* is positive for stable and negative for unstable configurations of equilibrium.

The method of constant arc length is one of the automatic control methods of incremental process. The two most simple ways to control the incremental process are: $\mu = \eta_i$ and $q_k = \eta_p$ with the load parameter μ and chosen displacement q being the controlling parameters. With the first of the two methods, subsequent points are the points of intersection between $\mu = \eta_i$ and the equilibrium

Na rysunku 2a przedstawiono zależność parametru obciążenia μ od pewnej normy \mathbf{q} charakteryzującej stan przemieszczenia, natomiast na rysunku 2b pokazano krzywą zmienności *CSP* wraz ze zmianą \mathbf{q} . W punktach ekstremalnych krzywej obciążenie-przemieszczenie parametr *CSP* przyjmuje wartości zerowe (macierz sztywności jest osobliwa). Dla statecznych stanów równowagi parametr *CSP* jest dodatni, a dla stanów niestatecznych – ujemny.

Metoda stałej długości łuku jest jedną z metod automatycznego sterowania procesem przyrostowym. Dwa najprostsze sposoby sterowania procesem przyrostowym to: $\mu = \eta_i$ i $q_k = \eta_p$. W pierwszym przypadku parametrem sterującym jest parametr obciążenia μ . W drugim przypadku parametrem sterującym jest wybrane przemieszczenie q . W pierwszej

path, and with the second method – as the points of intersection between $q_k = \eta_i$ with the same solution curve. Both procedures are inefficient at the vicinity of local extremum of the controlling parameter.

Note that at the limit points, the equilibrium path is tangent to the corresponding hyperplane. The angle θ between the tangent to the equilibrium path and the normal to the hyperplane is $\pi/2$. The intersection of the equilibrium path with this hyperplane is thus well defined when the angle θ is equal to or close to zero and poorly defined if it is close or equal to $\pi/2$. In this sense, the perfect family of surfaces will intersect the equilibrium path in perpendicular direction so that for every η the angle θ is zero. An equation describing a "perfect" family of surfaces cannot be constructed because it is based on the equilibrium path which is unknown. However, an approximation can be used so that the angle θ is close to zero. Riks [10] proposed the following equation:

$$(\dot{\mathbf{q}}_\alpha)^T \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_\alpha) + \dot{\mu}_\alpha \cdot (\mu - \mu_\alpha) = (\eta - \eta_\alpha) \quad (11)$$

where: \mathbf{q} – generalized coordinate vector, $\eta - \eta_\alpha$ – parameter approximating the arc length; the dots appearing above the symbols indicate derivatives with respect to the arc length.

Equation (11) defines a hyperplane that is perpendicular to the vector $(\dot{\mathbf{q}}_\alpha, \dot{\mu}_\alpha)$ and distant from the point $(\mathbf{q}_\alpha, \mu_\alpha)$ by $(\eta - \eta_\alpha)$. It will intersect the equilibrium path almost perpendicular when the distance $\eta - \eta_\alpha$ is sufficiently small.

The decisive influence on the convergence of the iterative process takes the form of a governing equation. Bifurcation points may pose a serious problem, as their analysis requires additional algebraic operations leading to solving a certain, most often, linearized eigenproblem. Numerical problems of incremental process control in geometric nonlinear problems have been discussed in the literature, for example, in the works by Sokół and Witkowski [4, 11]. The authors proposed a method of constant work of reference load. This method gives a far simpler solution algorithm (matrix of equation system coefficients is symmetric) and surrounded by limit points is as reliable as the constant arc method. The influence of single-layer bar covering geometry in the reliability analysis was discussed in [12], where the authors

metodzie kolejne punkty otrzymujemy jako punkty przecięcia powierzchni $\mu = \eta_i$ i ścieżki równowagi, a w drugiej – jako punkty przecięcia powierzchni $q_k = \eta_i$ z tą samą krzywą rozwiązania. Obie metody zawodzą w pobliżu punktów lokalnych ekstremów parametru sterującego.

Zauważmy, że w punktach granicznych ścieżka równowagi jest styczna do odpowiedniej hiperpłaszczyzny. Kąt θ między styczną do ścieżki równowagi a normalną do hiperpłaszczyzny jest równy $\pi/2$. Przecięcie ścieżki równowagi z tą hiperpłaszczyzną jest więc dobrze określone gdy kąt θ jest równy lub bliski zero i źle jeśli jest bliski lub równy $\pi/2$. W tym sensie idealna będzie rodzina powierzchni, które przecinają ścieżkę równowagi prostopadłe, tzn. tak, aby dla każdego η kąt θ był równy zero. Oczywiście, nie jest możliwe skonstruowanie równania opisującego „idealną” rodzinę powierzchni, ponieważ wymagałoby to znajomości ścieżki równowagi, którą dopiero mamy wyznaczyć. Możemy jednak zadowolić się pewnym przybliżeniem, tak aby kąt θ był bliski zero. Riks [10] zaproponował równanie sterujące w postaci:

$$(\dot{\mathbf{q}}_\alpha)^T \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_\alpha) + \dot{\mu}_\alpha \cdot (\mu - \mu_\alpha) = (\eta - \eta_\alpha) \quad (11)$$

gdzie: \mathbf{q} – wektor współrzędnych uogólnionych, $\eta - \eta_\alpha$ – parametr przybliżający długość łuku, kropka oznacza pochodną w odniesieniu do długości łuku.

Równanie (11) definiuje hiperpłaszczyznę prostopadłą do wektora $(\dot{\mathbf{q}}_\alpha, \dot{\mu}_\alpha)$ i odległą od punktu $(\mathbf{q}_\alpha, \mu_\alpha)$ o $(\eta - \eta_\alpha)$. Będzie ona przecinać ścieżkę równowagi prawie prostopadłe, gdy odległość $\eta - \eta_\alpha$ będzie dostatecznie mała.

Decydujący wpływ na zbieżność procesu iteracyjnego ma postać równania sterującego. Duży problem mogą stanowić punkty bifurkacji, których analiza wymaga dodatkowych operacji algebraicznych, związanych najczęściej z rozwiązaniem pewnego zlinearyzowanego zagadnienia własnego. Numerycznym problemom sterowania procesem przyrostowym w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych poświęcone są prace między innymi Sokoła i Witkowskiego [4, 11]. Autorzy zaproponowali w nich metodę stałej pracy obciążenia porównawczego. Metoda ta daje zdecydowanie prostszy algorytm rozwiązania (macierz współczynników układu równań jest symetryczna), a w otoczeniu punktów granicznych jest równie niezawodna jak metoda stałej długości łuku. Wpływ geometrii jednowarstwowych przekryć prętowych w analizie niezawodności poruszono w pracy [12]. Zaobserwo-

observed that the sensitivity of the reliability index is the greatest for the random variable describing the position coordinates of the nodes.

4. Numerical examples

A lattice dome consisting of 25 nodes and 56 elements (Fig. 3) was analyzed. The dome's geometry is shown in Table 1. The elements of the structure were assumed to be made of steel tubes RO101.6 x 6 with yield point $f_y = 235$ MPa and Young's modulus $E = 210$ GPa.

The analysis aimed to identify the influence of change in the geometry of the bar covering on its critical load capacity. The assumptions made included a fixed span of the dome and variable rise of the keystone, h , (node 1) and the third, h_3 , (nodes: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) and the second, h_2 , (nodes: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17) rings:

$$\begin{aligned} h &= h_3 + 5 \tan(\alpha + \Delta\alpha), \\ h_3 &= h_2 + 4.239 \tan(\alpha_3 + \Delta\alpha), \\ h_2 &+ 5.761 \tan(\alpha_2 + \Delta\alpha) \end{aligned} \quad (12)$$

The rise of the 1st ring (nodes: 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25) is $h_1 = 0$. Three ways of modifying the rise were considered, whereby in each case the dome analyzed was a shallow dome. The load of the μP value was applied to the keystone (Fig. 4a), with a reference load established at $P = 10$ kN. The critical load multiplier at the time of the snap-through, μ_{cr} , was determined for each case. The parameters determined for the most stressed element included critical force at elastic buckling S_{cr} , normal force at snap-through N_{Ed} and the load bearing capacity of the element due to buckling $N_{b,Rd}$. In all cases, the bars reaching the keystone are the most stressed elements. The values of the parameters named above are given for bar 7. For selected cases, equilibrium paths for the vertical displacement of the keystone (node 1), q , and the dependence of the scalar stiffness parameter CSP on this displacement are shown.

wano, że wrażliwość wskaźnika niezawodności jest największa dla zmiennej losowej opisującej współrzędne położenia węzłów.

4. Przykłady numeryczne

Przedmiotem analizy jest kopuła prętowa składająca się z 25 węzłów i 56 elementów (rys. 3). Geometria analizowanej kopuły przedstawiona jest w tabeli 1. Założono, że elementy konstrukcji zbudowane są z rur stalowych RO101.6 x 6 o granicy plastyczności $f_y = 235$ MPa i module Younga $E = 210$ GPa.

W pracy analizowano wpływ zmiany geometrii przekrycia prętowego na nośność krytyczną. W rozważaniach założono stałą rozpiętość kopuły, a zmieniano wyniosłość zwornika h (węzeł 1) oraz wyniosłość 3-go h_3 (węzły: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) i 2-go h_2 (węzły: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17) pierścienia:

$$\begin{aligned} h &= h_3 + 5 \tan(\alpha + \Delta\alpha), \\ h_3 &= h_2 + 4.239 \tan(\alpha_3 + \Delta\alpha), \\ h_2 &+ 5.761 \tan(\alpha_2 + \Delta\alpha) \end{aligned} \quad (12)$$

Wyniosłość 1-go pierścienia (węzły: 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25) wynosi $h_1 = 0$. Rozpatrzono trzy sposoby modyfikacji wyniosłości, przy czym w każdym przypadku analizowana kopuła była słabo wyniosła. Obciążenie o wartości μP przyłożono w zworniku (rys. 4a), przy czym przyjęto obciążenie porównawcze $P = 10$ kN. Dla każdego przypadku wyznaczono mnożnik obciążenia krytycznego w chwili przeskoku μ_{cr} oraz dla najbardziej wyężonego elementu wyznaczono: siłę krytyczną przy wyboczeniu sprężystym S_{cr} , siłę normalną w chwili przeskoku N_{Ed} oraz nośność elementu ze względu na wyboczenie $N_{b,Rd}$. We wszystkich przypadkach najbardziej wyężonymi elementami są pręty dochodzące do zwornika. W pracy podano wartości wymienionych wyżej parametrów dla pręta 7. Dodatkowo dla kilku wybranych przypadków przedstawiono ścieżki równowagi dla przemieszczenia pionowego zwornika (węzeł 1) q oraz zależność skalarnego parametru sztywności CSP od tego przemieszczenia.

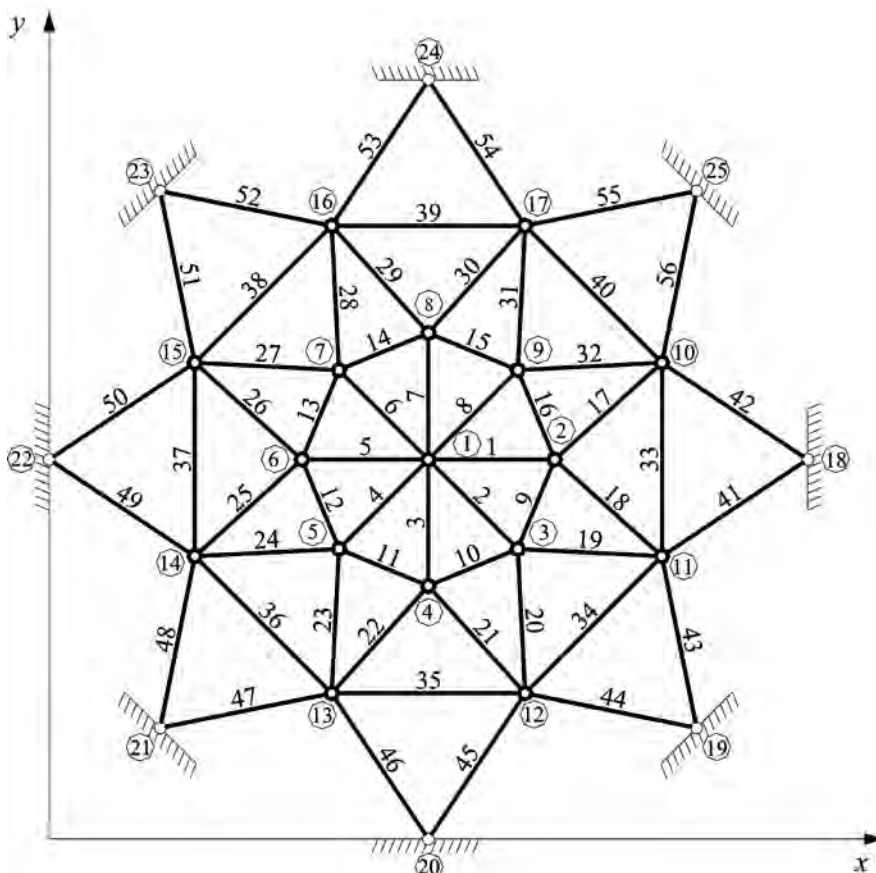


Fig. 3. Mesh of the lattice dome elements
Rys. 3. Siatka elementów kopuły prętowej

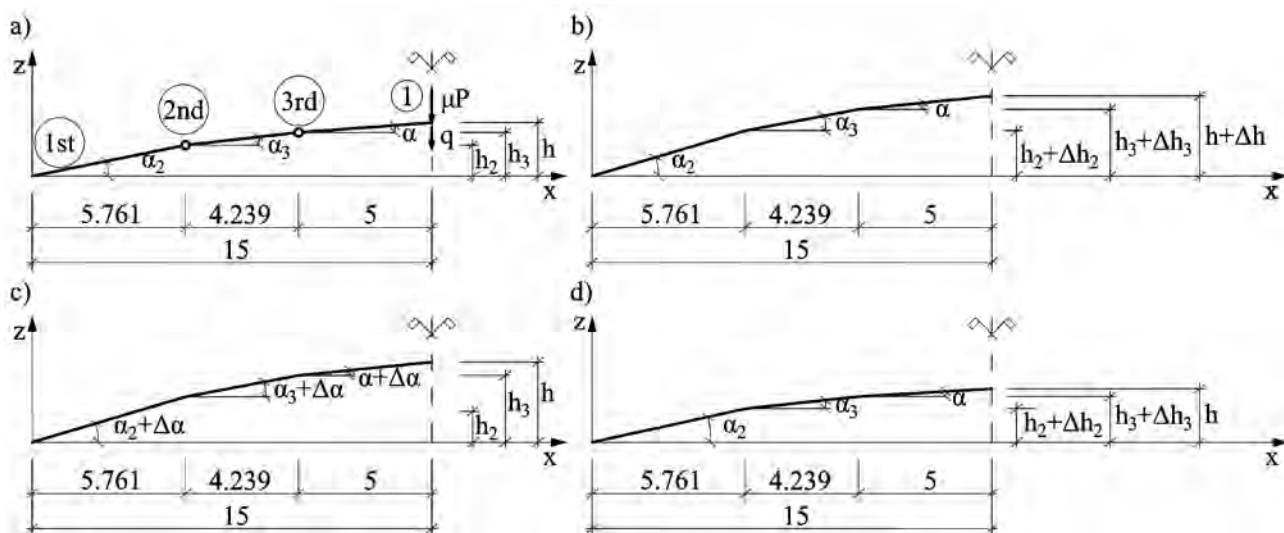


Fig. 4. a) Geometry of the lattice dome, b) constant height increments on the rings, c) constant slope increments of the rings, d) change in ring slope for a constant height dome

Rys. 4. a) Geometria kopuły prętowej, b) stały przyrost wysokości pierścieni, c) stałe przyrosty kąta nachylenia pierścieni, d) zmiana kąta nachylenia pierścieni dla kopuły o stałej wysokości

Table 1. Geometry of the lattice dome

Tabela 1. Geometria kopuły prętowej

No. of node	x [m]	y [m]	z [m]	No. of node	x [m]	y [m]	z [m]
1	15.000	15.000	h	14	5.761	11.173	h_2
2	20.000	15.000	h_3	15	5.761	18.827	h_2
3	18.536	11.464	h_3	16	11.173	24.239	h_2
4	15.000	10.000	h_3	17	18.827	24.239	h_2
5	11.464	11.464	h_3	18	30.000	15.000	0
6	10.000	15.000	h_3	19	25.607	4.393	0
7	11.464	18.536	h_3	20	15.000	0.000	0
8	15.000	20.000	h_3	21	4.393	4.393	0
9	18.536	18.536	h_3	22	0.000	15.000	0
10	24.239	18.827	h_2	23	4.393	25.607	0
11	24.239	11.173	h_2	24	15.000	30.000	0
12	18.827	5.761	h_2	25	25.607	25.607	0
13	11.173	5.761	h_2				

4.1. Example 1

In the first approach, the modification of the dome's geometry was by increasing the rise of the second ring $h_2 + \Delta h_2$, the third ring $h_3 + \Delta h_3$, and the keystone $h + \Delta h$ (Fig. 4b). The results for the following increments were: $\Delta h_2 = n \cdot 0.06$ m, $\Delta h_3 = n \cdot 0.07$ m and $\Delta h = n \cdot 0.0535$ m, for 9 cases considered ($n = 0, 1, \dots, 8$): W1-W9. The total height of the dome varied from 1.486 m to 1.914 m. The results of the analysis are compiled in Table 2 and Figure 5.

4.1. Przykład 1

W pierwszym podejściu modyfikacja geometrii kopuły odbywała się poprzez przyrost poszczególnych wyniosłości pierścienia drugiego $h_2 + \Delta h_2$, trzeciego $h_3 + \Delta h_3$ oraz zwornika $h + \Delta h$ (rys. 4b). W pracy przedstawiono wyniki dla następujących wartości przyrostów: $\Delta h_2 = n \cdot 0,06$ m, $\Delta h_3 = n \cdot 0,07$ m i $\Delta h = n \cdot 0,0535$ m, przy czym rozpatrzono 9 przypadków ($n = 0, 1, \dots, 8$): W1-W9. Całkowita wysokość kopuły zmieniała się od 1,486 m do 1,914 m. Wyniki analiz przedstawiono w tabeli 2 oraz na rysunku 5.

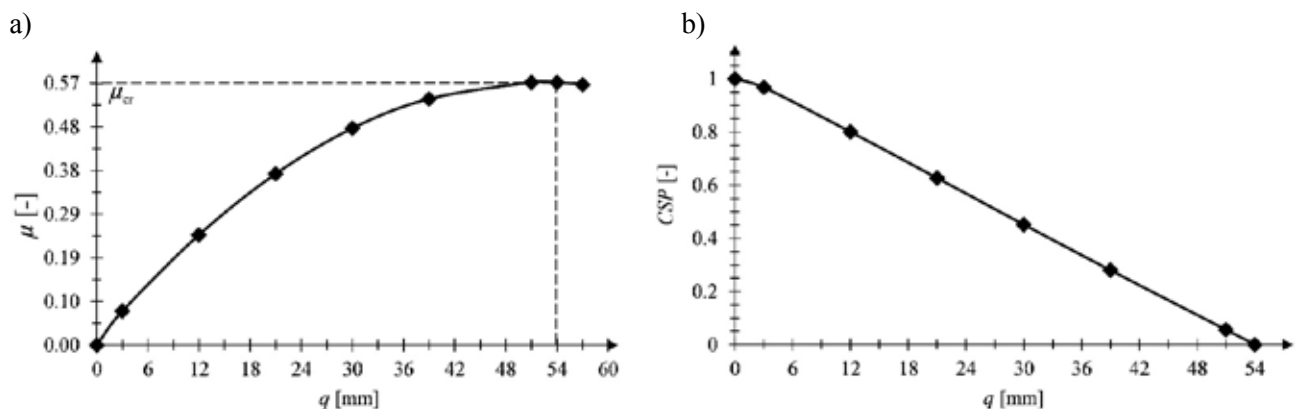


Fig. 5. a) Equilibrium path of vertical displacement q of node 1 for case W9, b) dependence of CSP on vertical displacement of node 1 for case W9

Rys. 5. a) Ścieżka równowagi przemieszczenia q węzła 1 dla przypadku W9, b) zależność CSP od przemieszczenia węzła 1 dla przypadku W9

Table 2. The results of the analysis of the cases Wn

Tabela 2. Wyniki analizy dla przypadków Wn

n	case	$h_2 + \Delta h_2$ [m]	$h_3 + \Delta h_3$ [m]	$h + \Delta h$ [m]	α_2 [°]	α_3 [°]	α [°]	μ_σ [-]	$a_\sigma \cdot P$ [kN]	S_σ [kN]	N_{Ed} [kN]	$N_{b,Rd}$ [kN]
0	W1	0.960	1.222	1.486	9.64	12.34	15.12	0.390	3.90	170.93	9.73	145.17
1	W2	1.020	1.292	1.5395	10.25	13.06	15.69	1.242	12.42	170.93	33.90	145.17
2	W3	1.080	1.362	1.593	10.87	13.79	16.26	2.612	26.12	170.93	82.30	145.17
3	W4	1.140	1.432	1.6465	11.49	14.53	16.84	2.689	26.89	170.93	121.50	145.17
4	W5	1.200	1.502	1.700	12.11	15.26	17.42	2.025	20.25	171.61	101.20	145.68
5	W6	1.260	1.572	1.7535	12.73	16.01	18.00	1.522	15.22	171.61	84.07	145.68
6	W7	1.320	1.642	1.807	13.36	16.76	18.58	1.127	11.27	171.61	68.76	145.68
7	W8	1.380	1.712	1.8605	13.99	17.51	19.17	0.815	8.15	171.61	50.10	145.68
8	W9	1.440	1.782	1.914	14.63	18.27	19.77	0.572	5.72	171.61	43.82	145.68

4.2. Example 2

In the second approach, the modification of the dome's geometry was by uniformly increasing slopes α_2 , α_3 and α by $\Delta\alpha = n \cdot 1^\circ$ (Fig. 4c). Three different initial heights were analyzed ($i = 1, 5, 9$), corresponding to W1, W5, W9 from Example 1. Five cases ($n = 0, 1 \dots 4$) were considered for each W: $W_i, 1-W_i, 5$. The total height of the dome varied from 1.486 m to 2.556 m for W1, n , 1.7 m to 2.777 m for W5, n and 1.914 m to 3.0 m for W9, n . The results are summarized in Tables 3, 4 and 5 and Figure 6.

4.2. Przykład 2

W drugim podejściu modyfikacja geometrii kopuły odbywała się poprzez równomierny przyrost kątów nachylenia α_2 , α_3 i α o $\Delta\alpha = n \cdot 1^\circ$ (rys. 4c). Rozpatrzono trzy różne wysokości początkowe ($i = 1, 5, 9$), odpowiadające przypadkom W1, W5, W9 z przykładu pierwszego. Dla każdego z nich rozpatrzono po pięć przypadków ($n = 0, 1 \dots 4$): $W_i, 1-W_i, 5$. Całkowita wysokość kopuły zmieniała się od 1,486 m do 2,556 m dla przypadków W1, n , od 1,7 m do 2,777 m dla przypadków W5, n oraz od 1,914 m do 3,0 m dla przypadków W9, n . Wyniki analiz przedstawiono w tabelach 3, 4 i 5 oraz na rysunku 6.

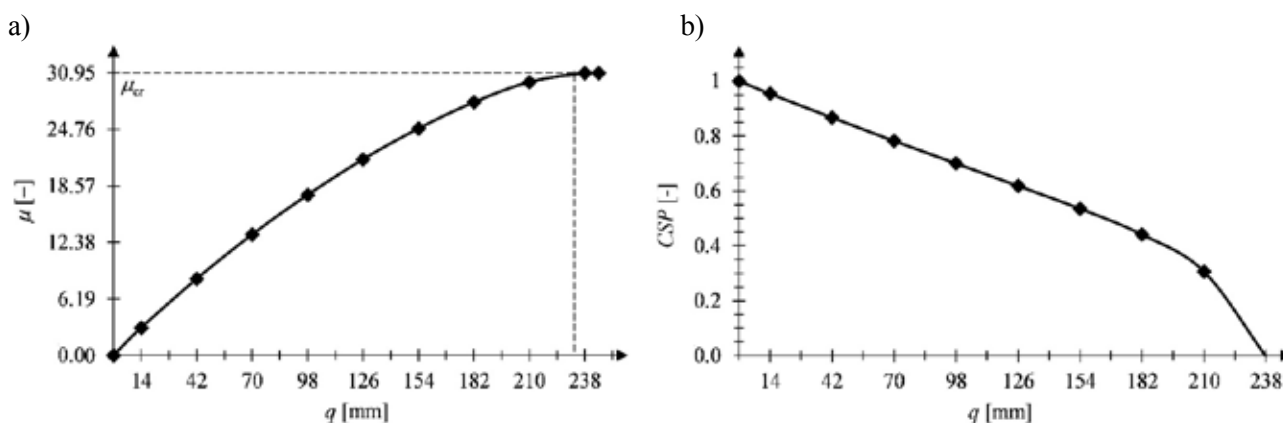


Fig. 6. a) Equilibrium path of vertical displacement q of node 1 for case W9,5, b) dependence of CSP on vertical displacement of node 1 for case W9,5

Rys. 6. a) Ścieżka równowagi przemieszczenia q węzła 1 dla przypadku W9,5, b) zależność CSP od przemieszczenia węzła 1 dla przypadku W9,5

Table 3. The results of the analysis for the cases W1, n

Tabela 3. Wyniki analizy dla przypadków W1, n

n	case	h_2 [m]	h_3 [m]	h [m]	$\alpha_2 + \Delta\alpha$ [°]	$\alpha_3 + \Delta\alpha$ [°]	$\alpha + \Delta\alpha$ [°]	μ_α [-]	$\mu_\alpha \cdot P$ [kN]	S_α [kN]	N_{Ed} [kN]	$N_{b,Rd}$ [kN]
0	W1,1	0.960	1.222	1.486	9.46	3.54	3.02	0.390	3.90	170.93	9.73	145.17
1	W1,2	1.064	1.400	1.752	10.46	4.54	4.02	0.478	4.78	170.93	9.06	145.17
2	W1,3	1.168	1.579	2.018	11.46	5.54	5.02	0.570	5.70	170.25	8.77	144.67
3	W1,4	1.273	1.759	2.286	12.46	6.54	6.02	0.665	6.65	169.57	8.63	144.17
4	W1,5	1.379	1.940	2.556	13.46	7.54	7.02	0.758	7.58	168.90	8.54	143.68

Table 4. The results of the analysis for the cases W5, n

Tabela 4. Wyniki analizy dla przypadków W5, n

n	case	h_2 [m]	h_3 [m]	h [m]	$\alpha_2 + \Delta\alpha$ [°]	$\alpha_3 + \Delta\alpha$ [°]	$\alpha + \Delta\alpha$ [°]	μ_α [-]	$\mu_\alpha \cdot P$ [kN]	S_α [kN]	N_{Ed} [kN]	$N_{b,Rd}$ [kN]
0	W5,1	1.200	1.500	1.700	11.77	4.05	2.29	2.025	20.25	171.61	101.20	145.68
1	W5,2	1.305	1.680	1.967	12.77	5.05	3.29	6.484	64.84	170.93	215.80	145.17
2	W5,3	1.411	1.861	2.236	13.77	6.05	4.29	10.560	105.60	170.93	204.80	145.17
3	W5,4	1.518	2.043	2.506	14.77	7.05	5.29	12.060	120.60	170.25	178.50	144.67
4	W5,5	1.627	2.226	2.777	15.77	8.05	6.29	12.980	129.80	169.57	157.50	144.17

Table 5. The results of the analysis for the cases W9, n

Tabela 5. Wyniki analizy dla przypadków W9, n

n	case	h_2 [m]	h_3 [m]	h [m]	$\alpha_2 + \Delta\alpha$ [°]	$\alpha_3 + \Delta\alpha$ [°]	$\alpha + \Delta\alpha$ [°]	μ_α [-]	$\mu_\alpha \cdot P$ [kN]	S_α [kN]	N_{Ed} [kN]	$N_{b,Rd}$ [kN]
0	W9,1	1.440	1.778	1.914	14.03	4.56	1.56	0.572	5.72	171.61	43.82	145.68
1	W9,2	1.547	1.960	2.183	15.03	5.56	2.56	2.664	26.64	170.93	121.90	145.17
2	W9,3	1.656	2.143	2.454	16.03	6.56	3.56	7.473	74.73	170.93	241.90	145.17
3	W9,4	1.765	2.328	2.726	17.03	7.56	4.56	16.341	163.41	170.25	404.70	144.67
4	W9,5	1.876	2.514	3.000	18.03	8.56	5.56	30.952	309.52	170.25	614.50	144.67

4.3. Example 3

In the last approach, the modification of the dome's geometry was made by increasing individual rises of the second ring $h_2 + \Delta h_2$ and the third ring $h_3 + \Delta h_3$ (Fig. 4d). The total height of the dome was constant, $h = 2$ m. The results for $\Delta h_2 = n \cdot 0.013$ m and $\Delta h_3 = n \cdot 0.01$ m are given. Eight cases were considered ($n = 0, 10, 20, 22, 23, 24, 25, 26$) for different heights of the second and third rings. These heights vary from 0.768 m to 1.106 m for the second ring and from 1.133 m to 1.593 m for the third ring. The results of the analyses are shown in Table 6 and Figure 7.

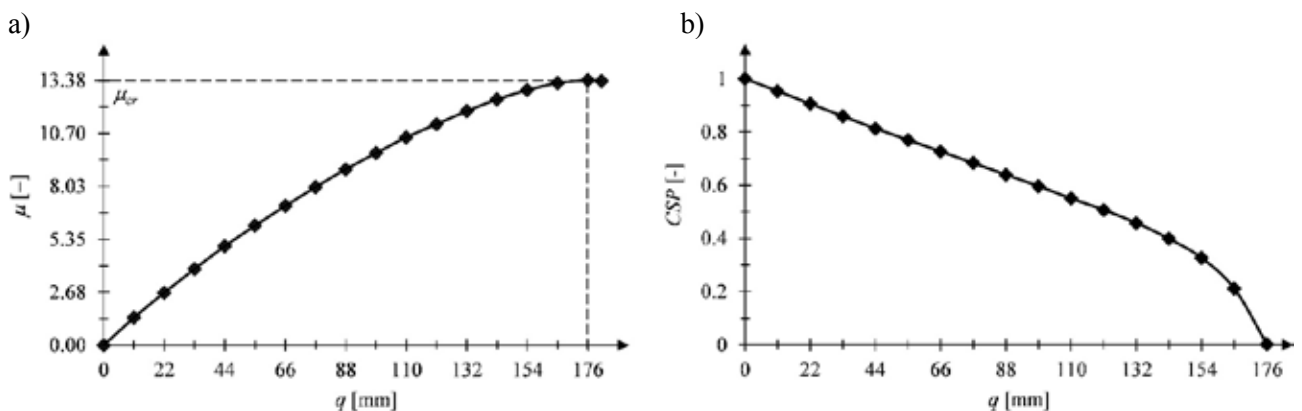
4.3. Przykład 3

W ostatnim podejściu modyfikacja geometrii kopuły odbywała się poprzez przyrost poszczególnych wyniosłości pierścienia drugiego $h_2 + \Delta h_2$ i trzeciego $h_3 + \Delta h_3$ (rys. 4d). Całkowita wysokość kopuły była stała i wynosiła $h = 2$ m. W pracy przedstawiono wyniki dla następujących wartości przyrostów: $\Delta h_2 = n \cdot 0,013$ m i $\Delta h_3 = n \cdot 0,01$ m. Rozpatrzono osiem przypadków ($n = 0, 10, 20, 22, 23, 24, 25, 26$) dla różnych wysokości pierścienia drugiego i trzeciego. Wysokości te zmieniają się od 0,768 m do 1,106 m dla pierścienia drugiego oraz od 1,133 m do 1,593 m dla pierścienia trzeciego. Wyniki analiz przedstawiono w tabeli 6 oraz na rysunku 7.

Table 6. The results of the analysis for the cases SWn

Tabela 6. Wyniki analizy dla przypadków SWn

n	case	$h_2 + \Delta h_2$ [m]	$h_3 + \Delta h_3$ [m]	h [m]	α_2 [°]	α_3 [°]	a [°]	μ_{cr} [-]	$\mu_{cr} \cdot P$ [kN]	S_{cr} [kN]	N_{Ed} [kN]	$N_{b,Rd}$ [kN]
0	SW1	0.768	1.333	2.000	7.68	7.68	7.69	0.0001	0.00	168.90	0.05	143.68
10	SW2	0.898	1.433	2.000	9.00	7.27	6.53	1.567	15.67	169.57	18.60	144.17
20	SW3	1.028	1.533	2.000	10.33	6.86	5.37	8.073	80.73	170.25	115.50	144.67
22	SW4	1.054	1.553	2.000	10.60	6.78	5.14	10.380	103.80	170.25	158.50	144.67
23	SW5	1.067	1.563	2.000	10.73	6.73	5.02	11.613	116.13	170.25	184.20	144.67
24	SW6	1.080	1.573	2.000	10.87	6.69	4.90	12.710	127.10	170.25	209.90	144.67
25	SW7	1.093	1.583	2.000	11.00	6.65	4.79	13.830	138.30	170.25	239.70	144.67
26	SW8	1.106	1.593	2.000	11.14	6.61	4.67	13.385	133.85	170.93	351.40	145.17

Fig. 7. a) Equilibrium path of vertical displacement q of node 1 for case SW8, b) dependence of CSP on vertical displacement of node 1 for case SW8Rys. 7. a) Ścieżka równowagi przemieszczenia q węzła 1 dla przypadku SW8, b) zależność CSP od przemieszczenia węzła 1 dla przypadku SW8

5. Summary

The effect of the geometry of a bar covering on the value of the critical load factor μ_{cr} is discussed. Analysis results indicate that shallow truss structures are extremely sensitive even to slight geometry changes. Three cases of modification of the dome's geometry were considered: constant change of nodes height in individual rings and in the keystone node (Example 1), constant increase in the inclination angle of the bars (Example 2) and change in the height of nodes in the rings at a constant height of the dome (Example 3). It was observed that in cases 1 and 3 there was a gradual increase in the critical load factor until the maximum was reached. Further height modifications resulted in a decrease in the critical load factor value. Monotonously increasing the inclination angle of all bars by a constant value of $\Delta\alpha$, led to the constant increase in the critical load factor/multiplier μ_{cr} . Maximum value of μ_{cr} , after which a

5. Podsumowanie

W pracy omówiono wpływ geometrii jednowarstwowego przekrycia prętowego na wartość mnożnika obciążenia krytycznego μ_{cr} . Przeprowadzona analiza pozwala na stwierdzenie, że słabo wyniosłe konstrukcje prętowe są niezwykle wrażliwe nawet na niewielkie zmiany geometrii. Rozpatrzono trzy przypadki modyfikacji geometrii kopuły: stała zmiana wysokości węzłów w poszczególnych pierścieniach i w węźle zwornikowym (przykład 1), stały przyrost kątów nachylenia prętów (przykład 2) oraz zmiana wysokości węzłów w pierścieniach przy stałej wysokości kopuły (przykład 3). Zauważono, że w przypadkach 1 i 3 występuje stopniowy wzrost wartości mnożnika obciążenia krytycznego, aż do osiągnięcia maksimum. Kolejne modyfikacje wysokości skutkują zmniejszaniem się wartości mnożnika obciążenia krytycznego. W przypadku monotonicznego wzrostu wartości wszystkich kątów nachylenia

decrease would start, was not observed. Changing the slope of all angles by 4° resulted in the μ_{cr} increase of more than 5300% (W3, n). The modification by increasing the heights of rings 2 and 3 and the keystone by $\Delta h_2 = 0.18$ m, $\Delta h_3 = 0.208$ m, $\Delta h = 0.161$ m, respectively, gave the μ_{cr} value increase of 589%. The analyses showed that for cases W5,2 through W5,5, W9,3 through KW9,5 and SW4 through SW8, the local buckling of the most stressed element (No. 7) precedes the snap-through. The results showed that it is possible to optimize the geometry of a single-layer bar coverings, which will be the next stage of the study.

prętów o stałą wartość $\Delta\alpha$ następuje stały przyrost mnożnika obciążenia krytycznego μ_{cr} . W tej analizie nie zaobserwowano osiągnięcia maksymalnej wartości μ_{cr} , po której by następował jej spadek. Zmiana nachylenia wszystkich kątów o 4° spowodowała wzrost wartości μ_{cr} o ponad 5300% (W9, n). W przypadku modyfikacji geometrii kopuły poprzez przyrost wyniosłości pierścieni 2 i 3 oraz zwornika o odpowiednio: $\Delta h_2 = 0,18$ m, $\Delta h_3 = 0,208$ m, $\Delta h = 0,161$ m, wartość μ_{cr} wzrosła o 589%. Dodatkowo przeprowadzone analizy wykazały, że dla przypadków od W5,2 do W5,5, W9,3 do KW9,5 oraz od SW4 do SW8 wybozczenie lokalne najbardziej wyężonego elementu (nr 7) poprzedza moment przeskoku. Przeprowadzone analizy wykazały możliwość optymalizacji geometrii jednowarstwowych przekryć prętowych, co może stanowić kolejny etap badań.

References

- [1] Zienkiewicz O.C.: *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
- [2] Waszczyszyn Z., Cichoń Cz., Radwańska M.: *Finite element method and stability of structures*, Arkady, Warszawa 1990.
- [3] Belytschko T., Liu W.K., Moran B.: *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, Wiley, 1997.
- [4] Sokół T., Witkowski M.: *The equilibrium path determination in non-linear analysis of structures*, *Advancers in non-linear finite element methods*, [Ed.] by B.H.P. Topping and M. Papachakakis, Civil-Comp Press, Edinburg 1994, pp. 35-45.
- [5] Obara P., Gilewski W.: *Dynamic stability of moderately thick beams and frames with the use of harmonic balance and perturbation methods*, *Bulletin of The Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, Warsaw 2016, Vol. 64, No. 4, pp. 739-750.
- [6] Pawlak U.: *Energy Criterion in assessing the correctness of the matrix for non-standard finite elements*, *Structure and Environment*, Kielce 2017, pp. 42-55.
- [7] Pawlak U., Szczecina M.: *The eigenvalue problems in stability of industrial steel building with a handling system*, *Structure and Environment*, Kielce 2016, pp. 160-167.
- [8] Kleiber M.: *Some results in the numerical analysis of structural instabilities*. Part 1 Statics, *Eng. Trans.* 30, 1982, pp. 327-352.
- [9] Bergan P.G., Soreide T.H.: *Solution of large displacement and stability problem using the current stiffness parameter*, *Conf. "Finite elements in nonlinear mechanics"*, Geilo (1977), pp. 647-669.
- [10] Riks E.: *An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems*, *Int. J. Solids Struct.* 15, 1979, pp. 529-551.
- [11] Sokół T., Witkowski M.: *Numeryczne problemy sterowania procesem przyrostowym w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych*, IX Konferencja Metody Komputerowe w Mechanice Kraków-Rytm 1989, pp. 1009-1016.
- [12] Radoń U.: *Probabilistic nonlinear analysis of truss structure*, *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, Wrocław 2011, Vol. 11, pp. 723-738.