POZNAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY ACADEMIC JOURNALS
No 73 Electrical Engineering 2013

Wojciech LIPIŃSKI*

DYDAKTYCZNA PREZENTACJA PRÓBKOWANIA SYGNAŁÓW OKRESOWYCH

Przedstawiono dydaktyczną prezentację próbkowania przebiegów okresowych o ograniczonym paśmie. Obliczenia numeryczne wykonano w programie Mathcad.

1. WPROWADZENIE

Sumując składową stałą oraz K harmonicznych otrzymamy sygnał okresowy s(t) o okresie T i częstotliwości podstawowej $f_1 = 1/T$. Pasmo jest ograniczone do f_{max}, moc sygnału jest skończona. Sygnał s(t) o nieskończonym czasie trwania nie zawiera składowych widma o częstotliwościach przekraczających $f_{max} = K / T$.

$$s(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{K}\left[a_k\cdot\cos(k\cdot\omega_1\cdot t)+b_k\cdot\sin(k\cdot\omega_1\cdot t)\right]\ ,\quad \omega_{max}=K\cdot\omega_1=K\cdot 2\cdot\pi\cdot f_1\ ,\quad f_1=1/T$$

$$a_k=\frac{2}{T}\cdot\int_{t_0}^{t_0+T}s(t)\cdot\cos(k\cdot\omega_1\cdot t)\cdot dt\ ,\quad b_k=\frac{2}{T}\cdot\int_{t_0}^{t_0+T}s(t)\cdot\sin(k\cdot\omega_1\cdot t)\cdot dt\ ,\quad f_{max}=K\cdot f_1=K/T$$

Widmo dyskretne sygnału okresowego s(t) przechodzi dla okresu $T\to\infty$ w widmo ciągłe. Przyjmujemy że, pasmo jest ograniczone i energia sygnału jest skończona.

$$s(t)=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\omega_{max}}^{\omega_{max}}d\omega\cdot\int_{-\infty}^{\infty}s(\tau)\cdot\exp\left[j\cdot\omega\cdot(t-\tau)\right]\cdot d\tau\quad ,\quad S(j\omega)=0\ \text{ dla }\ |\omega|>\omega_{max}$$

$$s(t)=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\omega_{max}}^{\omega_{max}}\exp(j\cdot\omega\cdot t)\cdot d\omega\cdot\int_{-\infty}^{\infty}s(\tau)\cdot\exp(-j\cdot\omega\cdot\tau)\cdot d\tau=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\omega_{max}}^{\omega_{max}}S(j\omega)\cdot\exp(j\cdot\omega\cdot t)\cdot d\omega$$

Próbkowanie sygnału w dziedzinie czasu jest podstawą cyfrowego przetwarzania sygnałów i teleinformatyki cyfrowej. Sygnał analogowy s(t) przekształcany jest na ciąg próbek przy danym kroku czasu Δt. W przypadku próbkowania równomiernego w czasie częstotliwość próbkowania f_S jest stała i równa $1/\Delta t$.

$$\{s(n\cdot\Delta t)\}=\{s_n\}=\{\ldots,s_{-3},s_{-2},s_{-1},s_0,s_1,s_2,s_3,\ldots\}\quad ,\quad f_S=1/\Delta t \tag{1}$$

* Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie.

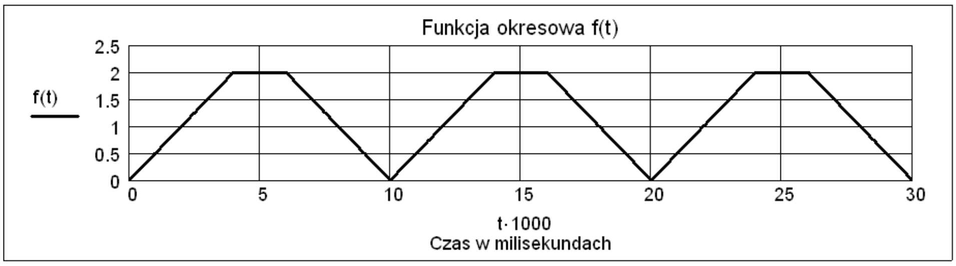
Częstotliwość próbkowania f_S dwukrotnie większa od częstotliwości f_{max} nosi nazwę częstotliwości Nyquista $f_N = 2 \cdot f_{max}$. W okresie K-tej harmonicznej równym T/K pobieramy dwie próbki sygnału s(t).

2. OBLICZENIA NUMERYCZNE

Sygnał s(t) może zostać odtworzony w dziedzinie czasu na podstawie próbek lub przedstawiony jako suma harmonicznych.

Dana jest funkcja f(t) okresowa o okresie T $\quad T := 0.01 \quad t := 0, \frac{T}{800} .. 5 \cdot T$

$$f(t) := \mathrm{if}\left[t < T, \mathrm{if}\left[t \le 0.4 \cdot T, 5 \cdot \frac{t}{T}, \mathrm{if}\left[0.4 \cdot T < t \le 0.6 \cdot T, 2, \frac{2.0}{0.4} \cdot \frac{(T - t)}{T}\right]\right], f(t - T)\right] \qquad TOL := 10^{-6}$$



$K := 8 \qquad k := 0 .. K$

Wzory dla współczynników szeregu Fouriera, całkowanie:

$\omega_1 := \frac{2 \cdot \pi}{T} \qquad f_1 := \frac{1}{T}$

$$a_k := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t)\, dt \qquad b_k := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin(k \cdot \omega_1 \cdot t)\, dt$$

Ograniczamy widmo do:

$f_{max} := K \cdot f_1 \qquad a_1 = -0.916458$

$$s(t) := \frac{1}{2} \cdot a_0 + \sum_{k=1}^{K} \left(a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_1 \cdot t)\right)$$

$\sqrt{(a_8)^2 + (b_8)^2} = 0.005483$

Sygnał s(t) może zostać dokładnie odtworzony na podstawie ciągu próbek jeśli częstotliwość próbkowania $f_S \ge f_N = 2 \cdot f_{max}$. Częstotliwość próbkowania f_S jest co najmniej równa podwójnej maksymalnej częstotliwości widma.

Kolejne próbki $s(n \cdot \Delta t)$ są mnożone przez funkcję $\sigma_n(t)$

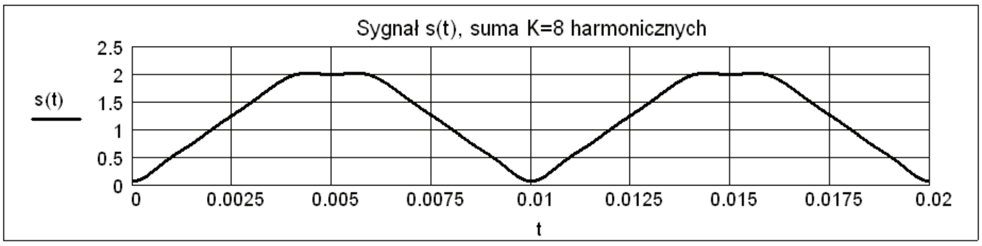
$$\sigma_n(t) = \frac{2 \cdot f_{max}}{f_S} \cdot \frac{\sin\left[\omega_{max} \cdot (t - n \cdot \Delta t)\right]}{\omega_{max} \cdot (t - n \cdot \Delta t)} = \frac{1}{f_S} \cdot \frac{\sin\left[2 \cdot \pi \cdot f_{max} \cdot (t - n \cdot \Delta t)\right]}{\pi \cdot (t - n \cdot \Delta t)} \quad , \quad f_S = \frac{1}{\Delta t}$$

$$\sigma_n(t) = \frac{\sin\left[2 \cdot \pi \cdot f_{max} \cdot (t - n \cdot \Delta t)\right]}{\pi \cdot \left(\frac{t}{\Delta t} - n\right)} = \frac{\sin\left[\frac{2 \cdot f_{max}}{f_S} \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{\Delta t} - n\right)\right]}{\pi \cdot \left(\frac{t}{\Delta t} - n\right)} \quad ,$$

sumowane i otrzymujemy pierwotny sygnał $s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\cdot\Delta t)\cdot\sigma_n(t)$ (2)

Próbkując z częstotliwością Nyquista $f_S=f_N=2\cdot f_{max}=1/\Delta t$ otrzymamy

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\cdot\Delta t)\cdot\sigma_n(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\cdot\Delta t)\cdot\frac{\sin\left[\pi\cdot\left(\frac{t}{\Delta t}-n\right)\right]}{\pi\cdot\left(\frac{t}{\Delta t}-n\right)}\quad,\quad \Delta t=\frac{1}{2\cdot f_{max}} \tag{3}$$

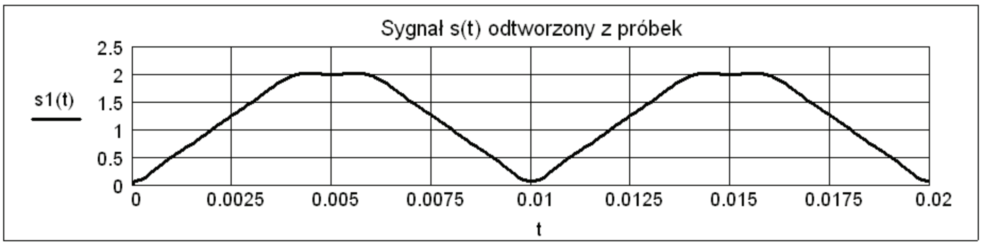


Częstotliwość próbkowania: $f_S := 2.26\cdot f_{max}$ Krok czasu: $\Delta t := \frac{1}{f_S}$ $t := 0, \frac{T}{200} .. 2\cdot T$

$$s1(t) := \sum_{n=-1250}^{1250} s(n\cdot\Delta t)\cdot\frac{\sin\left[\frac{2\cdot f_{max}}{f_S}\cdot\pi\cdot\left(\frac{t}{\Delta t}-n\right)\right]}{\pi\cdot\left(\frac{t}{\Delta t}-n\right)}$$

$\Delta t = 0.000553$

Próbki $s(n\cdot\Delta t)$ $1250\cdot\Delta t = 0.691372$



Rys. 1. Odtwarzanie sygnału z próbek $s(n\cdot\Delta t)$

Ograniczając sumowanie do $n=\pm1250$ przyjmujemy, że sygnał s(t) o nieskończonym czasie trwania jest równy zero dla $|t| > 1250\cdot\Delta t$, energia sygnału jest skończona. Dla przyjętych wartości, pomimo zerowania dla $|t| > 1250\cdot\Delta t$, warunek ograniczenia widma jest praktycznie spełniony.

Przy przybliżeniu sygnału okresowego s(t) sumą harmonicznych

$$s_K(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{K}\left[a_k\cdot\cos(k\cdot\omega_1\cdot t)+b_k\cdot\sin(k\cdot\omega_1\cdot t)\right]\ ,\quad \omega_1=2\cdot\pi\cdot f_1\ ,\quad f_1=1/T$$

$$\delta=\frac{1}{T}\cdot\int_0^T\left[s(t)-s_K(t)\right]^2\cdot dt\to 0\quad \text{dla}\quad K\to\infty$$

średni błąd kwadratowy jest najmniejszy jeśli współczynniki a_k, b_k są określone wzorami podanymi w wprowadzeniu, błąd dąży do zera dla $K \to \infty$.

Rozważmy sygnał okresowy s(t) o skończonej szerokości pasma do f_{max}, suma harmonicznych jest ograniczona do K-tej harmonicznej.

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{K} \left[a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_1 \cdot t) \right], \quad f_{max} = K \cdot f_1 = K/T$$

$$a_k = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t) \cdot dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot \sin(k \cdot \omega_1 \cdot t) \cdot dt, \quad \omega_{max} = K \cdot \omega_1 \tag{4}$$

Sygnał s(t) jest jednoznacznie określony za pomocą wartości (próbek) w 2N dyskretnych chwilach czasu t_n należących do jednego okresu T. Okres T dzielimy na 2N kroków czasu Δt. Przyjmujemy N = K.

$$\{t_n = n \cdot \Delta t\} = \{ t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_{2N} = T \}, \quad n = 0,1,2,3,\ldots,2N, \quad \Delta t = \frac{T}{2 \cdot N}$$

$$\{s(n \cdot \Delta t)\} = \{s_n\} = \{s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{2N-1}, s_{2N}\}, \quad t_n = n \cdot \Delta t = n \cdot \frac{T}{2 \cdot N}, \quad f_S = 1/\Delta t = 2 \cdot \frac{N}{T}$$

Wartość sygnału s(t) w dowolnej chwili czasu jest określona przez wartości (próbki) w dyskretnych 2N chwilach czasu. Obliczymy wartości próbek s_n, sygnał jest okresowy $s_0 = s_{2N}$.

$$s(t_n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{K} \left[a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t_n) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_1 \cdot t_n) \right], \quad n = 0,1,2,\ldots,2N-1, 2N$$

$$s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{K=N} \left[a_k \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} n \cdot \Delta t \right) + b_k \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} n \cdot \Delta t \right) \right], \quad \Delta t = \frac{T}{2 \cdot N}, \quad s_0 = s_{2N} \tag{5}$$

$$s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{K=N} \left[a_k \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{N} n \right) + b_k \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{N} n \right) \right], \quad s_n - \text{próbki}, \quad n = 1,2,\ldots,2N$$

Dla K = N niewiadomymi są współczynniki a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, ... , a_{N-1}, b_{N-1}, a_N. Liczba niewiadomych współczynników szeregu Fouriera jest 2N, liczba równań jest 2N.

Sumujemy równości stronami, obliczamy a_0

$$\sum_{n=1}^{2N} s_n = \sum_{n=1}^{2N} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{K=N} \left[a_k \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{N} n \right) + b_k \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{N} n \right) \right] \right\}, \quad s_0 = s_{2N} = s(t = T)$$

$$\sum_{n=1}^{2N} s_n = 2 \cdot N \cdot \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{K=N} \left[a_k \cdot \sum_{n=1}^{2N} \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{N} n \right) + b_k \cdot \sum_{n=1}^{2N} \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{N} n \right) \right]$$

Zastosujemy tożsamość trygonometryczną i obliczymy, że suma cosinusów jest równa zero.

$$\sum_{n=1}^{2N}\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{N}\cdot n\right)=\sum_{n=1}^{2N}\cos(n\cdot\alpha)\quad,\quad \alpha=k\cdot\frac{\pi}{N}$$

$$\sum_{n=1}^{2N}\cos(n\cdot\alpha)=\frac{\sin\left[(2N+0.5)\cdot\alpha\right]}{2\cdot\sin(0.5\cdot\alpha)}-\frac{1}{2}=\frac{\sin(k\cdot 2\pi+0.5\cdot\alpha)}{2\cdot\sin(0.5\cdot\alpha)}-\frac{1}{2}=0$$

Suma sinusów jest także równa zero, składowa stała sygnału s(t) jest równa:

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\cdot N}\cdot\sum_{n=1}^{2N}s_n \tag{6}$$

Rozwiązując układ 2N równań o niewiadomych współczynnikach a_k, b_k otrzymamy:

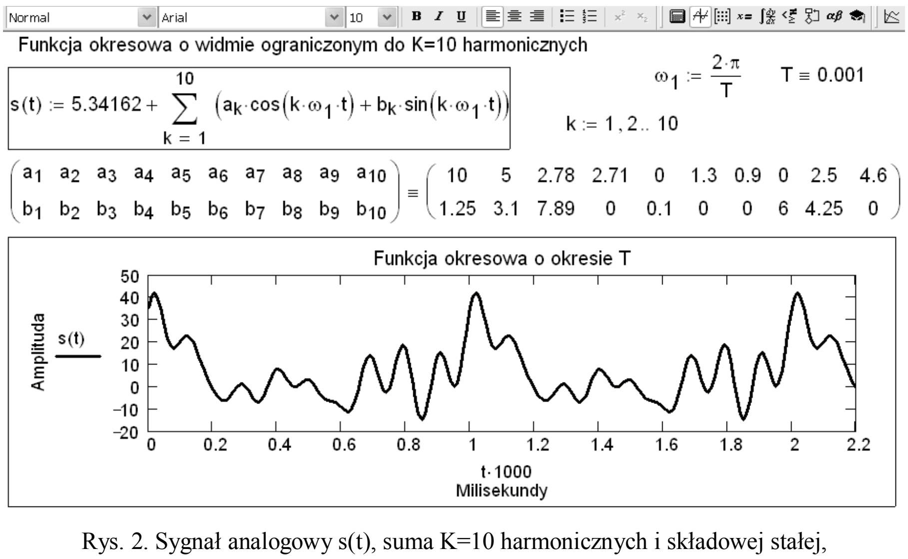
$$s(t_n)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{K}\left[a_k\cdot\cos(k\cdot\omega_1\cdot t_n)+b_k\cdot\sin(k\cdot\omega_1\cdot t_n)\right],\quad n=1,2,\ldots,2N$$

$$s_n=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{K=N}\left[a_k\cdot\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{N}n\right)+b_k\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{N}n\right)\right],\quad s_n-\text{próbki} \tag{7}$$

$$a_k=\frac{1}{N}\cdot\sum_{n=1}^{2N}s_n\cdot\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{N}n\right)\quad,\quad b_k=\frac{1}{N}\cdot\sum_{n=1}^{2N}s_n\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{N}n\right)$$

Przykładowo dana jest funkcja s(t) okresowa o okresie T jako suma składowej stałej oraz K=10 harmonicznych. Funkcja s(t) jest jednoznacznie określona współczynnikami a_k, b_k.

Sygnał analogowy s(t) określony jest w dowolnej chwili czasu. Widmo sygnału s(t) jest ograniczone do częstotliwości K-tej harmonicznej.



Rys. 2. Sygnał analogowy s(t), suma K=10 harmonicznych i składowej stałej, dane są współczynniki a_k, b_k

Obliczamy próbki funkcji s(t) w dyskretnych chwilach $t_n = n \cdot \Delta t$, w okresie T jest 2N próbek.

Przyjmijmy, że danych jest 2N próbek funkcji s(t). Obliczamy współczynniki szeregu Fouriera na podstawie danych próbek.

Dane są 2N próbki, obliczamy wartość średnią oraz współczynniki a[k , b[k

$N := 11 \qquad \Delta t := \frac{T}{2 \cdot N} \qquad n := 1, 2 .. 2 \cdot N \qquad t_n := n \cdot \Delta t$

$$\boxed{S_0 := \frac{1}{2 \cdot N} \cdot \sum_{n=1}^{2 \cdot N} s(t_n)} \qquad S_0 = 5.34162$$

$$\boxed{a_k := \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{2 \cdot N} \left(s(t_n) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{N} \cdot n \right) \right)} \qquad \boxed{b_k := \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{2 \cdot N} \left(s(t_n) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{N} \cdot n \right) \right)}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 & b_9 & b_{10} \end{pmatrix} =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10	5	2.78	2.71	0	1.3	0.9	0	2.5	4.6
2	1.25	3.1	7.89	0	0.1	0	0	6	4.25	0

Rys. 3. Przykład obliczenia współczynników szeregu Fouriera przy danych próbkach

LITERATURA

[1] Bolkowski S. Teoria obwodów elektrycznych. Stron: 584. WNT, 2007.

[2] Haykin S. Systemy telekomunikacyjne, Wydawnictwo KiŁ, Warszawa 1998.

[3] Tietze U. , Schenk H.: Układy półprzewodnikowe, WNT, W-a 1997.

[4] Lipiński W.: Obliczenia numeryczne w teorii sygnałów i obwodów elektrycznych. ZAPOL 2008, str. 1-316.

[5] Mikołajuk K., Trzaska Z. Elektrotechnika Teoretyczna, PWN Warszawa 1984.

EDUCATIONAL PRESENTATION OF SAMPLING OF PERIODIC SIGNALS

Shows the didactic presentation of the periodic waveform sampling with limited bandwidth. Numerical calculations were performed in Mathcad.