

Rozszerzona metoda oceny niepewności pośrednich pomiarów wieloparametrowych i układów do tych pomiarów

Część 1. Wpływ korelacji i niepewności funkcji przetwarzania – zależności podstawowe

Zygmunt Lech Warszawa

Sieć Badawcza Łukasiewicz – Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP, Al. Jerozolimskie 202, 02-486 Warszawa

Jacek Puchalski

Główny Urząd Miar, ul. Elektoralna 2, 00-001 Warszawa

Streszczenie: Dwuczęściowa praca przedstawia dotychczasowe wyniki prac autorów dotyczące wyznaczania niepewności pośrednich pomiarów wieloparametrowych. W niniejszej części 1. omówiono zależność współczynnika korelacji dwu wielkości od względnego stosunku ich odchyień od estymatorów mierzandów o niepewnościach typów A i B oraz zależność macierzy kowariancji pośrednio wyznaczanego mierzandów wyjściowego przy skorelowaniu wielkości mierzandów wejściowego. Zaproponowano szerszy model matematyczny niż rekomendowany w Suplemencie 2 Przewodnika GUM. Uwzględnia on niepewności i korelację zarówno mierzonych wielkości wejściowych jak i ponadto parametrów funkcji ich przetwarzania. Może służyć do oceny dokładności nie tylko samych pomiarów wieloparametrowych ale i układów realizujących takie pomiary. W części 2. zostanie omówiony przykład zastosowania modelu rozszerzonego do opisu pośrednich pomiarów parametrów dwójnika poprzez czwórnik pasywny z uwzględnieniem niepewności i skorelowania jego elementów.

Słowa kluczowe: pomiary wielowymiarowe, multimierzand, propagacja wariancji, macierz kowariancji, niepewność, współczynnik korelacji, skorelowania odchyień o niepewnościach typów A oraz B, niepewności funkcji przetwarzania

1. Wprowadzenie

W 1993 r. w międzynarodowym przewodniku wyznaczania niepewności pomiarów o angielskim akronimie GUM [1] wprowadzono nowe pojęcie „niepewność” do oceny dokładności pomiarów. Pojawiła się wówczas niejednorodność z dotychczas stosowanym opisem dokładności przyrządów, urządzeń i systemów pomiarowych przez błędy pomiarowe. Producenci aparatury pomiarowej podają nadal maksymalny dopuszczalny błąd przyrządu MPE (ang. *maximum permissible error*) [3]. Przy założeniu równomiernego rozkładu odchy-

leń od estymatora wartości mierzonej, z przedziału \pm tego błędu wyznacza się odchylenie standardowe jako składową niepewności typu B pomiarów tym przyrządem.

Rekomendowana w Suplemencie 2 [2] do przewodnika GUM metoda wyznaczania niepewności pomiarów pośrednich wieloparametrowych powstała głównie z potrzeby jednolitego opisu dokładności pomiarów w obszarze miar i innych pomiarów laboratoryjnych. Jednak dotyczy ona tylko przypadków, w których funkcję przetwarzania wyników tych pomiarów realizuje się obliczeniowo z dokładnością o niepewnościach zwykle pomijalnych w praktyce, czyli wystarczająco dokładnie [5]. Metoda ta nie obejmuje wielu pośrednich pomiarów wieloparametrowych realizowanych całkowicie instrumentalnie przez wyspecjalizowane wieloparametrowe przyrządy lub systemy pomiarowe. Ich dokładność zależy zarówno od niepewności i korelacji wielkości bezpośrednio mierzonych na wejściu, jak i od nierozpatrywanych dotychczas niepewności parametrów układu realizującego funkcję przetwarzania pozyskiwanych danych oraz od parametrów torów przesyłu sygnałów. Pierwszy z autorów zainicjował w [8] opracowanie takiego rozszerzenia metody podanej w Suplemencie 2, aby za pomocą niepewności, można było jednolicie szaco-

Autor korespondujący:

Zygmunt Lech Warszawa, zlw1936@gmail.com

Artykuł recenzowany

nadesłany 14.08.2019 r., przyjęty do druku 27.09.2019 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0

wać dokładność wieloparametrowych pomiarów pośrednich wykonywanych zarówno kilkoma osobnymi przyrządami z obliczeniami realizowanymi zewnątrz, jak i wyspecjalizowanych zintegrowanych instrumentalnych układów i systemów pomiarowych realizujących w pełni cały proces tych pomiarów. Wpływ korelacji wielkości bezpośrednio mierzonych omówili autorzy szczegółowo [9–13]. Poniżej przedstawia się rozszerzoną metodę oceny niepewności, która w opisie dokładności wyników pośrednich pomiarach wieloparametrowych uwzględnia zarówno niepewności i korelacje multimenzurandu mierzonego na wejściu.

2. Podstawowy model matematyczny pośrednich pomiarów wieloparametrowych

Estymatory y_1, y_2, \dots, y_m wartości elementów (ang. *observables*) mierzonego pośrednio m -wymiarowego menzurandu $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_m]^T$ wyznacza się z estymatorów x_1, x_2, \dots, x_n mierzonych bezpośrednio n -wielkości menzurandu $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$ wg ogólnego wzoru [2]:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (1)$$

gdzie: $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ – wielowymiarowa funkcja przetwarzania menzurandu \mathbf{X} w określonych warunkach wpływających na pomiary.

W metodzie podanej w Suplemencie 2 przewodnika GUM funkcję $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ traktuje się jako dokładną. Dotyczy to przypadków, gdy operacje przetwarzania wyników pomiarów \mathbf{X} wykonywane są z odpowiednio dużą precyzją, np. na komputerze zewnętrznym lub też zastosowanym w systemie pomiarowym.

Niniejszy tekst dotyczy przetwarzania wyników pomiarów. Dalej będą więc stosowane estymatory x_i, y_j wartości X_i, Y_j $i=1, \dots, n, j=1, \dots, m$ parametrów metrologicznych elementów menzurandów \mathbf{X}, \mathbf{Y} .

Niewielkie przyrosty Δx_i i Δy_j liczone jako odchylenia od estymatorów x_i, y_j (dawniej zwane błędami pozornymi) powiązane są macierzową zależnością liniową wynikającą z różniczki zupełnej:

$$\Delta \mathbf{Y} \approx \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \cdot \Delta \mathbf{X}(\mathbf{X}) \equiv \mathbf{S}(\mathbf{X}) \cdot \Delta \mathbf{X}(\mathbf{X}) \quad (2)$$

$$\text{gdzie: } \mathbf{S} \equiv \begin{bmatrix} S_{11} & \dots & S_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ S_{m1} & \dots & S_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

czyli

$$S_{ji} = \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \quad (2a)$$

Przyrosty Δx_i i Δy_j pojedynczych wartości elementów menzurandów \mathbf{X} i \mathbf{Y} są liczbami mianowanymi. Natomiast przy opisie dokładności przyrządów i układów pomiarowych czułości S_{ji} , zdeterminowane i losowe odchylenia $\Delta x_i, \Delta y_j$ oraz niepewności u_{x_i}, u_{y_j} są funkcjami zależnymi od wartości x_i . Propagację niepewności w pośrednich pomiarach wieloparametrowych opisuje się łącznie dla wszystkich wielkości macierzowo. Z różniczki zupełnej wielowymiarowego równania (1) wynika zależność (3):

$$\mathbf{U}_Y = \mathbf{S}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{U}_X(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{X})^T \quad (3)$$

w której $\mathbf{U}_X, \mathbf{U}_Y$ są macierzami kowariancji menzurandów \mathbf{X} i \mathbf{Y} . Ich elementy wyznacza się dla estymatorów x_i i y_j wszystkich wartości X_i i Y_j obu menzurandów. Macierze te są następujące:

$$\mathbf{U}_X = \begin{bmatrix} u_{x_1}^2 & \dots & \rho_{x_1n} u_{x_1} u_{x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{xn1} u_{x_n} u_{x_1} & \dots & u_{x_n}^2 \end{bmatrix}, \quad (3a)$$

$$\mathbf{U}_Y = \begin{bmatrix} u_{y_1}^2 & \dots & \rho_{y_1m} u_{y_1} u_{y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{yml} u_{y_m} u_{y_l} & \dots & u_{y_m}^2 \end{bmatrix}. \quad (3b)$$

Wariancje, jako kwadraty standardowych niepewności u_{x_i}, u_{y_j} znajdują się na głównych przekątnych obu macierzy kowariancji, zaś współczynniki korelacji ρ_{xik} ($i, k=1, \dots, n, i \neq k$) oraz ρ_{yjl} ($j, l=1, \dots, m, j \neq l$) występują w wyrazach niediagonalnych symetrycznie względem tych przekątnych jako iloczyny z niepewnościami. Współczynniki te mają istotne znaczenie, gdy oszacowane wartości i niepewności menzurandu \mathbf{Y} będą następnie użyte wspólnie.

W opisie dokładności wielu przyrządów i układów pomiarowych stosuje się też niepewności względne u_{rel} . Przyrządy cyfrowe i przetworniki o liniowej charakterystyce) mają stałą czułość S w całym zakresie pomiarowym ($X_{i \text{ max}} - X_{i0}$). Moduł ich maksymalnego dopuszczalnego błędu MPE [3] można przedstawić jako sumę, tj.:

$$|\Delta_{X_i}|_{\text{max}} = |\Delta_{X_{i0}}|_{\text{max}} + |\Delta_{(X_i - X_{i0})}|_{\text{max}} \equiv |\Delta_{X_{i0}}|_{\text{max}} + \varepsilon_{S_i} (X_i - X_{i0}).$$

gdzie: X_{i0} jest początkiem zakresu dla X_i ; $\varepsilon_{S_i} = \frac{|\Delta_{X_i}|_{\text{max}} - |\Delta_{X_{i0}}|_{\text{max}}}{X_i - X_{i0}}$.

Przy założeniu równomiernego rozkładu odchylenia w przedziale $\pm |\Delta_{X_i}|_{\text{max}}$, z odchylenia standardowego wyznacza się dla przyrostów $(X_i - X_{i0})$ sygnału wyjściowego lub odczytu przyrządu lub kanału pomiarowego względną niepewność

$$u_{\text{rel}i \text{ max}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \varepsilon_{S_i} \equiv \delta_{S_i}.$$

Przez proste podstawienia w całym pomiarowym zakresie otrzymuje się dla niepewności równanie (4) podobne do (3) [6]:

$$\mathbf{U}_{\delta Y} = \mathbf{S}_{\delta}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{U}_{\delta X}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{S}_{\delta}(\mathbf{X})^T \quad (4)$$

w którym $\mathbf{S}_{\delta}(\mathbf{X}) \equiv \left[\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{x_i}{y_j} \right]$ dla $i = 1, \dots, n$ oraz $j = 1, \dots, m$,

a $\mathbf{U}_{\delta X}, \mathbf{U}_{\delta Y}$ – to macierze kowariancji.

Niepewności względne $\delta_{x_i} = \frac{u_{x_i}}{x_i}$, $\delta_{y_j} = \frac{u_{y_j}}{y_j}$ znajdują się

w tych samych miejscach w macierzach $\mathbf{U}_{\delta X}, \mathbf{U}_{\delta Y}$ jak niepewności bezwzględne u_{x_i}, u_{y_j} w macierzach $\mathbf{U}_X, \mathbf{U}_Y$. Można też niepewności bezwzględne odnosić do zakresu oraz stosować wzory niejednorodne, aby z nich, np. wyznaczać bezpośrednio niepewności względne lub vice versa.

W ogólnym przypadku pośrednich pomiarów wieloparametrowych, poprzez przetworzenie danych pomiarowych wielkości X_i jako elementów menzurandu \mathbf{X} , wyznacza się estymatory wartości y_j oraz estymatory ich niepewności u_{y_j} i współczynników korelacji ρ_{yjl} ($j, l=1, \dots, m, j \neq l$) dla wszystkich elementów menzurandu \mathbf{Y} . Otrzymuje się je po przetworzeniu wielokrotnie powtórzonych surowych wartości obserwacji pomiarowych uży-

skanych w danych warunkach otoczenia przyrządów i otoczenia obiektu mierzonego, stałych lub zmieniających się, w tym w określony sposób. Znane, niepożądane wpływy koryguje się przez poprawki. Tak skorygowane dane pomiarowe traktuje się już jako losowe i przetwarza się je statystycznie.

Dla przejrzystości dalszego wywodu przytoczy się pokrótce zasady oceny dokładności pomiarów wg przewodnika GUM [1]. Do tego celu służy niepewność rozszerzona $U(P)$ o określonym prawdopodobieństwie pokrycia P , np. 95% lub 99%. Jest to połowa szerokości symetrycznego przedziału wokół estymatora wartości mierzonej, np. wartości średniej dla obserwacji w próbce. Jeśli funkcja rozkładu gęstości prawdopodobieństwa jest znana, np. funkcja Gaussa dla rozkładu normalnego, to niepewność rozszerzoną U wyznacza się analitycznie z odchylenia standardowego średniej z danych próbki i współczynnika rozszerzenia k_p dla określonego P . Dla rozkładów danych pomiarowych otrzymywanych eksperymentalnie niepewność rozszerzoną U wyznacza się numerycznie metodą Monte Carlo wg Suplementu 1 do GUM.

Dla każdej wielkości mierzonej będącej elementem multimenzurandu podstawą do wyznaczenia niepewności rozszerzonej U jest wg GUM [1] niepewność standardowa u zdefiniowana jako odchylenie standardowe rozkładu wypadkowego dla splotu dwóch statystycznie niezależnych rozkładów odchylenia od estymatora wartości tej wielkości o standardowych niepewnościach typu A i typu B, oznaczonych odpowiednio jako u_A i u_B . Pierwszy z tych rozkładów opisuje statystycznie rozrzut eksperymentalnie otrzymanych wartości obserwacji pomiarowych. Drugi jest rozkładem hipotetycznym, który randomizuje przewidywane zmiany wyników różnego pochodzenia, czyli dodatkowe odchylenia, w tym zwykle stałe albo wolnozmiennie w trakcie kolejnego eksperymentu gromadzenia wyników pomiarów, lecz nieznanne co do wartości. Odchylenia te mogą pojawiać się jako losowe w długim okresie użytkowania przyrządu lub systemu pomiarowego wskutek przypadkowo zmiennych, ale dopuszczalnych warunków otoczenia, innych niż przy kalibracji przyrządu i w pomiarach kontrolnych oraz jako skutek zmian wewnętrznych parametrów. W modelu matematycznym zastosowanym w GUM [1] przyjęto założenie, że zbiory wartości opisanych oboma rozkładami odchylenia typu A i B są nieskorelowane, gdyż tak zwykle jest w praktyce. Wówczas dla każdej wielkości mierzonej x_i standardowa niepewność u_i rozkładu wypadkowego jako ich splotu i jej składowe u_{Ai} i u_{Bi} jako odchylenia standardowe obu rozkładów, są sumą geometryczną:

$$u_i = \sqrt{u_{Ai}^2 + u_{Bi}^2} \quad (5)$$

Estymator x_i wartości X_i i jego niepewność składową u_{Ai} wyznacza się statystycznie z próbki danych, np. jako wartość średnią dla rozkładu normalnego [1] lub inną dla znanych rozkładów [7].

Niepewność składową u_{Bi} szacuje się zaś na podstawie subiektywnej wiedzy o przewidywanych zakresach i rozkładach wielkości wpływających oraz ich oddziaływaniach. Wprowadzenie u_{Bi} jest równoznaczne z dodaniem zbioru dodatkowych odchylenia. Niepewność u_{Bi} randomizuje spodziewane oddziaływania tych wpływów, których wartości bieżące w przeprowadzanych pomiarach nie są znane i brakuje informacji, aby obliczyć dla nich poprawki i skorygować wartość estymatora. W znanych warunkach pracy o ograniczonym zakresie zmian wielkości wpływających, można przyjąć mniejszą wartość niepewności składowej u_B niż to wynika z danych producenta dla pełnego zakresu dopuszczalnych warunków pracy przyrządu oraz badanego obiektu [4, 7].

W pomiarach wieloparametrowych, z danych pomiarowych wyznacza się niepewności u_{Axi} dla każdej z bezpośrednio mierzonych wielkości x_i menzurandu \mathbf{X} . Dla danych mierzonych

zbyt gęsto uwzględnia się autokorelację [6] oraz szacuje się heurystycznie niepewności u_{Bxi} i oblicza się standardowe niepewności złożone u_i wg wzoru (5). Następnie tworzy się macierz kowariancji \mathbf{U}_X . Rozrzuty wartości obserwacji dla każdego elementu x_i zależą zarówno od wpływów warunków otoczenia na układ pomiarowy i obiekt badany, jak i od zmian parametrów wewnętrznych. Jeśli wielkości x_i multimenzurandu są skorelowane, to ich współczynniki korelacji wyznacza się z wyników synchronicznie poprowadzonych pomiarów lub z wiedzy o badanym procesie. Skorelowania występują dla zbiorów odchylenia opisanych niepewnościami tylko jednego typu: A bądź B. Ich współczynniki korelacji oznaczymy, podobnie jak niepewności składowe, odpowiednio indeksami dolnymi A i B. Elementy multimenzurandu wejściowego \mathbf{X} w ogólnym przypadku mogą być w różnym stopniu skorelowane. Dotyczy to zarówno współczynnika ρ_A , jak i ρ_B . Wpływają one na dokładność wyników pomiaru elementów menzurandu wyjściowego \mathbf{Y} wyznaczanych pośrednio z pomiarów \mathbf{X} . Współczynniki korelacji ρ_A można wyznaczyć eksperymentalnie, jeśli poprowadzi się pomiary menzurandu \mathbf{X} tak, by obserwacje mierzonych wielkości uzyskiwać synchronicznie i w znanych chwilach. Wyniki heurystycznych oszacowań niepewności typu B i współczynników korelacji ρ_B mogą być zróżnicowane, gdy mierzy się różne wartości, na różnych zakresach jednego miernika lub różnymi przyrządami pomiarowymi. W ocenie skorelowania odchylenia opisanych niepewnościami typu B trzeba w jak największym stopniu wykorzystać pozyskaną wiedzę o takich pomiarach i nawet, jeśli jest to celowe, wykonać też uzupełniające eksperymenty.

Wartości wyznaczanych pośrednio estymatorów y_i dla wielkości Y_i (obserwabli) menzurandu \mathbf{Y} oraz macierz kowariancji \mathbf{U}_Y z niepewnościami i współczynnikami korelacji uzyskuje się ze wzorów (1)–(4). Rozważania na przykładzie menzurandu 2D ($n = m = 2$) przedstawiono w kolejnym rozdziale.

3. Skorelowane pomiary 2D

Pomiary dwuelementowego (2D) menzurandu $\mathbf{X} = [X_1, X_2]$ są szczególnym przypadkiem pomiarów wieloparametrowych opisywanych ogólnie wzorami (1)–(4). Stosuje się je, gdy kilka wielkości mierzonych jest ze sobą powiązanych w obiekcie pomiarowym lub przez oddziałujące na nich wielkości zewnętrzne. W pomiarach dwuparametrowych (2D) niepewności dwu wielkości X_1 i X_2 , oznaczone jako u_{x1} i u_{x2} są sumami geometrycznymi niepewności składowych typu A i B opisanymi równaniami:

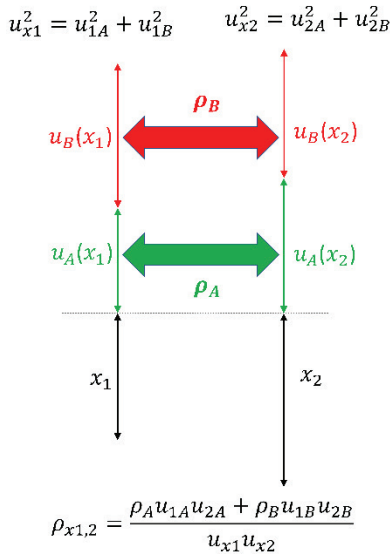
$$u_{x1}^2 = u_{1A}^2 + u_{1B}^2 \quad (6a)$$

$$u_{x2}^2 = u_{2A}^2 + u_{2B}^2 \quad (6b)$$

W ogólnym przypadku wyniki pomiarów X_1, X_2 mają różne wartości niepewności u_{1A} i u_{2A} oraz u_{1B} i u_{2B} . Jeśli eksperymenty te odbywają się w jednakowych lub podobnych warunkach wpływających, to wielkości mierzone X_1, X_2 mogą być skorelowane. Zbiory wartości ich odchylenia opisane niepewnościami składowymi każdego typu, tj. u_{1A}, u_{2A} oraz u_{1B}, u_{2B} , mogą być wówczas powiązane ze sobą współczynnikami korelacji o wartościach $1 > \rho_A > -1$ oraz $1 > \rho_B > -1$. Przykładem jest tu skorelowanie napięć i prądów mierzonych dla tego samego obiektu, w tych samych warunkach i przy zasilaniu z niestabilizowanej sieci elektrycznej.

Niepewności i skorelowania odchylenia wielkości x_1, x_2 menzurandu 2D ilustruje rys.1.

Aby w pomiarach 2D wyznaczyć standardowe niepewności u_{y1}, u_{y2} i współczynnik korelacji $\rho_{y1,2}$ wykorzystuje się macierzowy zapis prawa propagacji wariancji (3) lub (4). Jeśli wnioski z pomiarów mają dotyczyć warunków badania oraz użytkowania obiektu



Rys. 1. Niepewności składowe mierzand 2D i współczynniki korelacji: ρ_A oraz ρ_B między zbiorami odchyłek obserwacji pomiarowych obu wielkości o niepewnościach u_A oraz zbiorami odchyłek o niepewnościach u_B szacowanych heurystycznie
 Fig. 1. Uncertainties of type A and B of the 2D measurand and correlation coefficient ρ_A – between sets of observed data deflections of uncertainties u_A and ρ_B – of heuristic deflections u_B

innych niż podczas kalibracji przyrządu, to oprócz niepewności standardowych u_{1A} , u_{2A} , wyznaczonych z bieżących rozrzutów wartości obserwacji, trzeba też uwzględnić przewidywane zmiany niepewności u_{1B} , u_{2B} .

Macierz kowariancji wg wzoru (3a) dla mierzand 2D ma następujące postacie:

$$U_{x1,2} = \begin{bmatrix} u_{x1}^2 & \rho_{x1,2} u_{x1} u_{x2} \\ \rho_{x1,2} u_{x1} u_{x2} & u_{x2}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1A}^2 + u_{1B}^2 & \rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B} \\ \rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B} & u_{2A}^2 + u_{2B}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1A}^2 & \rho_A u_{1A} u_{2A} \\ \rho_A u_{1A} u_{2A} & u_{2A}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1B}^2 & \rho_B u_{1B} u_{2B} \\ \rho_B u_{1B} u_{2B} & u_{2B}^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Z ostatniej postaci macierzy $U_{x1,2}$ we wzorze (7) wynika, że można ją przedstawić jako sumę

$$U_{x1,2} = U_{x1,2A} + U_{x1,2B} \quad (7a)$$

Na głównej przekątnej macierzy $U_{x1,2}$ występują niepewności zgodne z regułą sumowania wariancji wg (6a) i (6b), czyli dla kwadratów niepewności typu A i typu B obu mierzand wielkości.

Współczynnik korelacji między wielkościami x_1 i x_2 opisują wzory (9):

$$\rho_{x1,2} = \frac{\rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B}}{\sqrt{u_{1A}^2 + u_{1B}^2} \sqrt{u_{2A}^2 + u_{2B}^2}} = \frac{\rho_A u_{1A} u_{2A}}{u_{x1} u_{x2}} + \frac{\rho_B u_{1B} u_{2B}}{u_{x1} u_{x2}} \quad (8)$$

Jeśli dla stosunków niepewności składowych i standardowych u_{x1} , u_{x2} przyjmie się oznaczenia:

$$0 \leq k_{1B} \equiv \frac{u_{1B}}{u_{x1}} \leq 1, \quad 0 \leq k_{2B} \equiv \frac{u_{2B}}{u_{x2}} \leq 1$$

to z wzorów (6a, 6b) otrzymuje się

$$\frac{u_{1A}}{u_{x1}} \equiv k_{1A} = \sqrt{1 - k_{1B}^2}, \quad (9a)$$

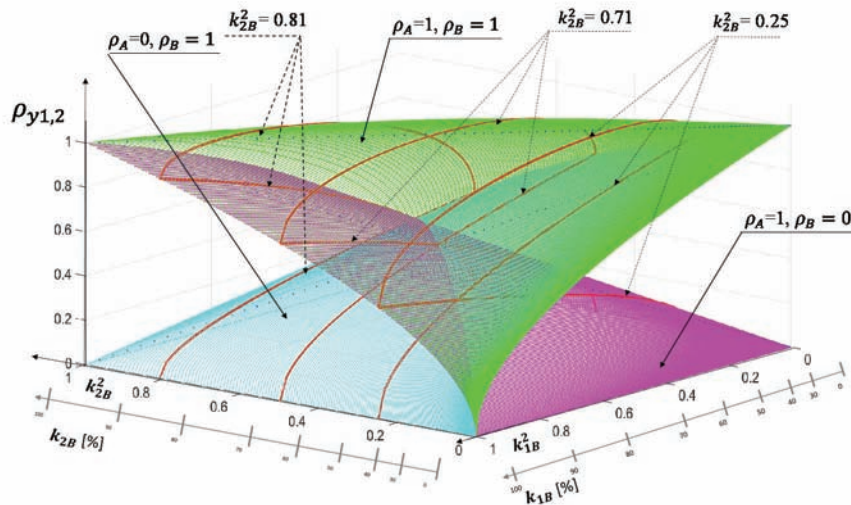
$$\frac{u_{2A}}{u_{x2}} \equiv k_{2A} = \sqrt{1 - k_{2B}^2}. \quad (9b)$$

Powyższe stosunki niepewności spełniają warunek

$$\left(\frac{u_{iB}}{u_{xi}}\right)^2 + \left(\frac{u_{iA}}{u_{xi}}\right)^2 = k_{iB}^2 + k_{iA}^2 = 1, \quad i = 1, 2$$

Zaś po przekształceniach otrzymuje się prostszą postać wzoru (8)

$$\rho_{x1,2} = \rho_A \sqrt{1 - k_{1B}^2} \sqrt{1 - k_{2B}^2} + \rho_B k_{1B} k_{2B}. \quad (10)$$



Rys. 2. Zależności współczynnika korelacji dwu wielkości $\rho_{y1,2} = f(k_{1B}, k_{2B})$ dla trzech współczynników korelacji ρ_A, ρ_B składowych ich odchyłek o niepewnościach typu A lub B
 Fig. 2. Relations of correlation coefficient of two quantities $\rho_{y1,2} = f(k_{1B}, k_{2B})$ for three pairs of correlation coefficients ρ_A, ρ_B of their deviation components with uncertainty type A or B

Zależności współczynnika korelacji $\rho_{y_{1,2}} = f(k_{1B}^2, k_{2B}^2)$ dla różnych wartości par współczynników ρ_A, ρ_B przedstawione są na rysunku 2. Są to skośnie przebiegające i przecinające się płaszczyny krzywoliniowe. Z analizy w [9-13] wynika, że największą wartość współczynnika $\rho_{y_{1,2}}$ w całym zakresie k_{1B} ma krzywa o $\rho_A = 1, \rho_B = 1$, gdy $k_{1B} = k_{2B}$. Zbadano też rzadziej występujące w praktyce pomiarowej przypadki o ujemnych współczynnikach korelacji $\rho_A < 0, \rho_B < 0$.

Korelacja między wynikami pomiarów dwu skojarzonych wielkości, w tym tej samej wielkości mierzonej dwoma różnymi miernikami lub na dwóch różnych zakresach, czyli o różnych niepewnościach u_B , zależy od wartości tych niepewności. Jest ona tym większa, im większa jest niepewność pomiaru typu B w stosunku do niepewności typu A wyników wielkości mierzonych.

4. Niepewności składowe mierzandru wyjściowego Y

Przy stosowaniu przyrządów i układów pomiarowych w różnych warunkach otoczenia i przy różnym losowym rozrzucie obserwacji pomiarowych może być niezbędne wyodrębnienie wartości niepewności składowych u_A i u_B dla wielkości Y_i mierzandru wyjściowego Y oraz współczynników skorelowania ρ_A, ρ_B dla par odchyłeń tych wielkości. Przedstawi się to na przykładzie 2D mierzandru $\mathbf{X} = [X_1, X_2]^T$ o postaciach macierzy $U_{x_{1,2}}$ wg (7), tj. dla

$$U_{x_{1,2}} = \begin{bmatrix} u_{x1}^2 & \rho_{x_{1,2}} u_{x1} u_{x2} \\ \rho_{x_{1,2}} u_{x1} u_{x2} & u_{x2}^2 \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$u_{x1}^2 = u_{1A}^2 + u_{1B}^2, \quad u_{x2}^2 = u_{2A}^2 + u_{2B}^2,$$

$$\rho_{x_{1,2}} = \frac{\rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B}}{u_{x1} u_{x2}}.$$

Składowe macierze kowariancji $U_{x_{1,2A}}, U_{x_{1,2B}}$ wg (7a) dla zbiorów odchyłeń wielkości wejściowych o niepewnościach u_{iA} oraz u_{iB} ($i = 1, 2$) wynoszą odpowiednio:

$$U_{x_{1,2A}} = \begin{bmatrix} u_{1A}^2 & \rho_A u_{1A} u_{2A} \\ \rho_A u_{1A} u_{2A} & u_{2A}^2 \end{bmatrix} \quad (11a)$$

$$U_{x_{1,2B}} = \begin{bmatrix} u_{1B}^2 & \rho_B u_{1B} u_{2B} \\ \rho_B u_{1B} u_{2B} & u_{2B}^2 \end{bmatrix} \quad (11b)$$

W ogólnym przypadku w pomiarach wieloparametrowych o dowolnej liczbie n wielkości mierzonych i m wielkościach pośrednio wyznaczanych, macierze kowariancji U_X i U_Y można przedstawić jako dwie sumy:

$$U_X = U_{XA} + U_{XB} \quad (12a)$$

$$U_Y = U_{YA} + U_{YB} \quad (12b)$$

Składniki obu macierzy kowariancji znajduje się po linearyzacji funkcji $Y = F(X)$ przez macierz S wg wzorów (uproszczono zapis S i U_X , nie podkreśla się możliwości występowania zależności od X):

$$U_{YA} = S U_{XA} S^T \quad (12c)$$

$$U_{YB} = S U_{XB} S^T \quad (12d)$$

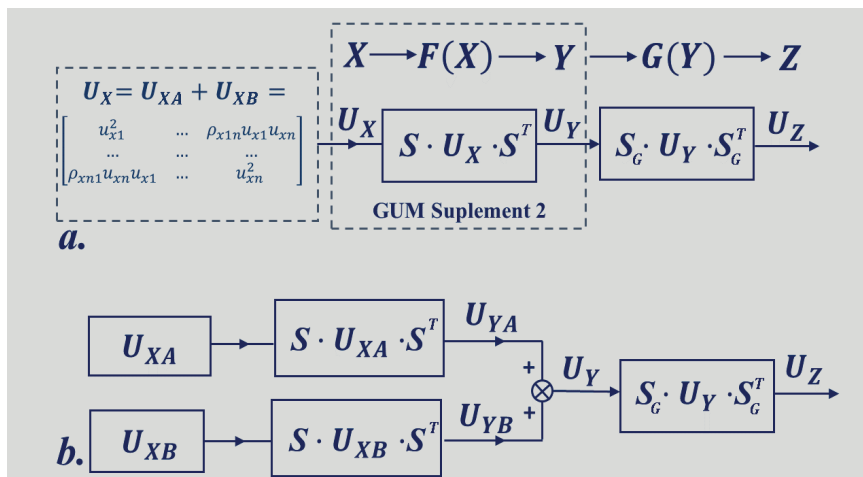
Macierz kowariancji U_Y mierzandru wyjściowego można wyznaczać dwojako, tj.:

- oszacować, jak poprzednio $U_X = U_{XA} + U_{XB}$ i z niej bezpośrednio otrzymać U_Y (rys. 3a) lub
- najpierw wyznaczyć z macierzy U_{XA} i U_{XB} wyjściowe macierze składowe U_{YA} i U_{YB} (rys. 3b).

Otrzymuje się:

$$U_Y = S U_X S^T = S (U_{XA} + U_{XB}) S^T \quad (13)$$

$$U_Y = U_{YA} + U_{YB} = S U_{XA} S^T + S U_{XB} S^T \quad (14)$$



Rys. 3. Schematy przetwarzania niepewności w wieloparametrowych pomiarach pośrednich i dwa sposoby a, b wyznaczania wyjściowej macierzy kowariancji U_Y i jej macierzy składowych U_{YA}, U_{YB} wg macierzowego prawa propagacji variancji

Fig. 3. Schemes of uncertainty processing in multi-parameter indirect measurements and two methods: a, b for determining the output covariance matrix U_Y and its component matrixes U_{YA}, U_{YB} according to the matrix law of variance propagation

Oba sposoby są równoważne. Sprawdzono to numerycznie dla modelu o 2D mierzandach \mathbf{X} i \mathbf{Y} .

Z macierzy \mathbf{U}_{yA} , \mathbf{U}_{yB} jako składników macierzy \mathbf{U}_y we wzorze (14) można wyznaczyć niepewności składowe elementów mierzand wyjściowego i współczynniki korelacji zbiorów odchyłeń każdego z typów A i B. Na przykład dwuelementowy mierzand wyjściowy \mathbf{Y} ma macierz kowariancji

$$\mathbf{U}_{y1,2} = \begin{bmatrix} u_{y1A}^2 + u_{y1B}^2 & \rho_{yA} u_{y1A} u_{y2A} + \rho_{yB} u_{y1B} u_{y2B} \\ \rho_{yA} u_{y1A} u_{y2A} + \rho_{yB} u_{y1B} u_{y2B} & u_{y2A}^2 + u_{y2B}^2 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Tę macierz można podzielić na następujące macierze składowe typu A i B:

$$\mathbf{U}_{y1,2} = \mathbf{U}_{y1,2A} + \mathbf{U}_{y1,2B} = \begin{bmatrix} u_{y1A}^2 & \rho_{yA} u_{y1A} u_{y2A} \\ \rho_{yA} u_{y1A} u_{y2A} & u_{y2A}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{y1B}^2 & \rho_{yB} u_{y1B} u_{y2B} \\ \rho_{yB} u_{y1B} u_{y2B} & u_{y2B}^2 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Na rysunku 3 podano schematy a i b przetwarzania niepewności wejściowych i wyznaczania wyjściowej macierzy kowariancji jako sumy jej macierzy składowych wg macierzowego prawa propagacji wariancji w pomiarach pośrednich wieloparametrowych. Ogólnie w tych pomiarach macierz kowariancji jest sumą przetwarzanych oddzielnie macierzy kowariancji odchyłeń wielkości wejściowych o niepewnościach A i B.

Przykład. Niepewności mierzand 2D w postaci sumy i różnicy wielkości X_1, X_2

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 + X_2 & X_1 - X_2 \end{bmatrix}^T. \quad (17)$$

Z zależności (3), (6a, b) i (8) wynika, że dla estymatorów x_1, x_2 o parametrach typu A wyznaczonych z pomiarów oraz typu B wyznaczonych heurystycznie otrzymuje się:

$$u_{(x_1+x_2)} = \sqrt{u_0^2 + 2(\rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B})} \quad (18)$$

$$u_{(x_1-x_2)} = \sqrt{u_0^2 - 2(\rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B})} \quad (19)$$

gdzie:

$$u_0^2 = u_{1A}^2 + u_{1B}^2 + u_{2A}^2 + u_{2B}^2$$

oraz

$$\rho_{(x_1+x_2, x_1-x_2)} = \frac{u_{x_1}^2 - u_{x_2}^2}{u_{x_1+x_2} u_{x_1-x_2}} \quad (20)$$

Rozpatrzone zostaną cztery przypadki szczególnie wzorów (18) i (19):

a. Współczynnik korelacji wielkości wejściowych $\rho_{x1,2} = 1$, gdy

$$\rho_A = 1, \rho_B = 1 \text{ i } \frac{u_{1A}}{u_{1B}} = \frac{u_{2A}}{u_{2B}}.$$

Wówczas:

$$u_{(x_1+x_2)} = \sqrt{u_0^2 + 2u_{x1}u_{x2}} = \sqrt{u_{x1}^2 + u_{x2}^2 + 2u_{x1}u_{x2}} = u_{x1} + u_{x2}$$

$$u_{(x_1-x_2)} = \sqrt{u_0^2 - 2u_{x1}u_{x2}} = \sqrt{u_{x1}^2 + u_{x2}^2 - 2u_{x1}u_{x2}} = |u_{x1} - u_{x2}|$$

Przy uwzględnieniu całkowitej korelacji wielkości mierzonych, z geometrycznego sumowania niepewności otrzymuje się proste zależności algebraiczne, tj. dla sumy tych wielkości sumę ich niepewności, a dla różnicy – moduł różnicy tych niepewności.

b. Nie ma skorelowania między x_1, x_2 , tj. $\rho_{x1,2} = 0$

Niepewności sumy i różnicy są jednakowe i wynoszą

$$u_{(x_1+x_2)} = u_{(x_1-x_2)} = u_0.$$

c. Odchylenia o niepewnościach u_{1A}, u_{2A} nie są skorelowane gdy ($\rho_A = 0$; $1 > \rho_B \neq 0$)

$$u_{(x_1+x_2)} = \sqrt{u_0^2 + 2\rho_B u_{1B} u_{2B}},$$

$$u_{(x_1-x_2)} = \sqrt{u_0^2 - 2\rho_B u_{1B} u_{2B}}.$$

Niepewność sumy wielkości wejściowych jest większa niż poprzednio i osiąga maximum dla $\rho_B = 1$. Zaś dla różnicy tych wielkości niepewność jest wówczas najmniejsza.

d. Pomiary obu wartości x_1, x_2 wykonuje się tym samym, lub zbliżonym przyrządem albo czujnikiem i w tych samych warunkach. Wówczas współczynnik korelacji $\rho_B \rightarrow 1$ i można przyjąć $\rho_B = 1$. Wartości obserwacji nie są skorelowane ($\rho_A = 0$). Wypadkowe niepewności u_B sumy i różnicy wynikają wówczas z kwadratów dwumianów ($u_{1B} \pm u_{2B}$) i należy stosować następujące wzory

$$u_{(x_1+x_2)} = \sqrt{u_{1A}^2 + u_{2A}^2 + (u_{1B} + u_{2B})^2},$$

$$u_{(x_1-x_2)} = \sqrt{u_{1A}^2 + u_{2A}^2 + (u_{1B} - u_{2B})^2}.$$

Podobne postacie wzorów otrzymuje się dla niepewności względnych iloczynu i ilorazu x_1, x_2 .

Z eksperymentalnych danych pomiarowych wyznaczyć można jedynie współczynnik korelacji ρ_A . Uzyskuje się go z wartości synchronicznie pobieranych obserwacji pomiarowych dwu wielkości x_1, x_2 w stałych warunkach wpływających. Jeśli takich pomiarów nie wykonano, lub nie są one możliwe, to należy przyjąć, że zbiory odchyłeń obu wielkości mierzonych mają najbardziej niekorzystny przypadek współczynnika korelacji ρ_A , tj. dający największą niepewność składową.

Oszacowanie wartości współczynnika ρ_B jest heurystyczne i opiera się głównie na wiedzy oraz subiektywnym doświadczeniu wykonującego pomiary. Gdy brakuje informacji jak oszacować liczbowo jego wartości, należy przyjmować najbliższą z wartości krańcowych 1, 0, -1.

5. Model pomiarów n -parametrowych rozszerzony o wpływ niepewności funkcji przetwarzania $U_p \neq 0$

5.1. Ogólny przypadek skorelowania

W ogólnym przypadku estymatory wartości, niepewności i współczynników korelacji elementów y_j mierzanego pośrednio wieloparametrowego mierzand \mathbf{Y} zależą też od niepewności parametrów p_i układu realizującego wielowymiarową funkcję przetwarzania $\mathbf{F}(\mathbf{X})$. Parametry tego układu można opisać ogólnie

nie k -wymiarowym wektorem \mathbf{P} . Mogą one podlegać zmianom deterministycznym i losowym w zależności od warunkach pomiarów, użytych egzemplarzy przyrządów i zastosowanej procedury pomiarowej. W każdym z eksperymentów pomiarowych realizacje funkcji $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ mogą odbiegać od jej postaci znamionowej. Opisuje to zmodyfikowane ogólne równanie (1) dla wartości mierzand \mathbf{Y} oraz równanie (22) dla jego przyrostów:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \quad (21)$$

$$\Delta \mathbf{Y} = \Delta \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \mathbf{S}_{\mathbf{X},\mathbf{P}} \cdot [\Delta \mathbf{X}, \Delta \mathbf{P}]^T \quad (22)$$

gdzie: $\mathbf{S}_{\mathbf{X},\mathbf{P}}$ o wymiarze $[m \times (n+k)]$ jest macierzą linearyzującą funkcję (21).

Dla przetwarzania danych pomiarowych wg funkcji (21) prawo propagacji wariancji ma postać ogólną:

$$\mathbf{U}_{\mathbf{Y},\mathbf{P}} = \mathbf{S}_{\mathbf{X},\mathbf{P}} \cdot \mathbf{U}_{\mathbf{X},\mathbf{P}} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{X},\mathbf{P}}^T \quad (23)$$

gdzie $\mathbf{U}_{\mathbf{X},\mathbf{P}}$, $\mathbf{U}_{\mathbf{Y},\mathbf{P}}$ – wyjściowa i wyjściowa macierze kowariancji oraz macierz wrażliwości $\mathbf{S}_{\mathbf{X},\mathbf{P}}$.

Macierz czułości $\mathbf{S}_{\mathbf{X},\mathbf{P}}$ ze wzoru (23) linearyzująca funkcję $\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ spełnia zależność:

$$\mathbf{S}_{\mathbf{X},\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{S}_p \end{bmatrix} \quad (23a)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{X},\mathbf{P}}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^T \\ \mathbf{S}_p^T \end{bmatrix} \quad (23b)$$

Zrandomizowane odchylenia od estymatorów wartości elementów mierzand wyjściowego \mathbf{Y} powstają jako wynik splotów rozkładów odchylenia mierzand \mathbf{X} i odchylenia parametrów \mathbf{P} układu realizującego funkcję $\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{P})$. Ich macierze kowariancji sumują się.

Macierz kowariancji $\mathbf{U}_{\mathbf{Y}}$ wynika z linearyzacji funkcji $\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ i w ogólnym przypadku opisana jest następującym równaniem propagacji:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{\mathbf{Y},\mathbf{P}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{S}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_X & \mathbf{U} \\ \mathbf{U}^T & \mathbf{U}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}^T \\ \mathbf{S}_p^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{S}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_X \mathbf{S}^T + \mathbf{U} \mathbf{S}_p^T \\ \mathbf{U}^T \mathbf{S}^T + \mathbf{U}_p \mathbf{S}_p^T \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{S} \mathbf{U}_X \mathbf{S}^T + \mathbf{S} \mathbf{U} \mathbf{S}_p^T + \mathbf{S}_p \mathbf{U}^T \mathbf{S}^T + \mathbf{S}_p \mathbf{U}_p \mathbf{S}_p^T \end{aligned} \quad (24)$$

w którym:

- macierze czułości odpowiednio o rozmiarach: $\mathbf{S} [m \times n]$ i $\mathbf{S}_p [m \times k]$, tj.:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (24a)$$

$$\mathbf{S}_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial p_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial p_k} \end{bmatrix} \quad (24b)$$

- macierze kowariancji wielkości wejściowych o rozmiarze $[n \times n]$ i parametrów układu $[k \times k]$

$$\mathbf{U}_X = \begin{bmatrix} u_{x_1}^2 & \dots & \rho_{x_1 n} u_{x_1} u_{x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{x n 1} u_{x_n} u_{x_1} & \dots & u_{x_n}^2 \end{bmatrix}, \quad (24c)$$

$$\mathbf{U}_p = \begin{bmatrix} u_{p_1}^2 & \dots & \rho_{p_1 k} u_{p_1} u_{p_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{k 1} u_{p_k} u_{p_1} & \dots & u_{p_k}^2 \end{bmatrix}. \quad (24d)$$

gdzie u_{x_i} – niepewności parametrów układu przetwarzającego; $\rho_{p_{ij}}$, ($i \neq j$, $i, j = 1, \dots, k$) – współczynniki korelacji między nimi,

- macierz „kowariancyjna” korelacji między wielkościami wejściowymi \mathbf{X} i parametrami \mathbf{P} układu przetwarzającego o rozmiarze $[n \times k]$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho_{x_1 p_1} u_{x_1} u_{p_1} & \dots & \rho_{x_1 p_k} u_{x_1} u_{p_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{x n p_1} u_{x_n} u_{p_1} & \dots & \rho_{x n p_k} u_{x_n} u_{p_k} \end{bmatrix}. \quad (24e)$$

gdzie $\rho_{x_{ij} p_j}$ ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$) – współczynniki korelacji wielkości wejściowych i parametrów układu,

Po wprowadzeniu oznaczenia $\mathbf{V} = \mathbf{S} \mathbf{U} \mathbf{S}_p^T$ oraz przekształceniach $\mathbf{V}^T = (\mathbf{S} \mathbf{U} \mathbf{S}_p^T)^T = \mathbf{S}_p (\mathbf{U} \mathbf{S})^T = \mathbf{S}_p \mathbf{U}^T \mathbf{S}^T$ równanie (24)

przyjmuje prostszą postać:

$$\mathbf{U}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{S} \mathbf{U}_X \mathbf{S}^T + \mathbf{S}_p \mathbf{U}_p \mathbf{S}_p^T + \mathbf{V} + \mathbf{V}^T \quad (25)$$

5.2. Przypadek nieskorelowanych wielkości wejściowych z parametrami układu przetwarzania

Rozpatrzmy przypadek prostszy, często występujący w praktyce pomiarowej, w tym w diagnostyce technicznej schematów elektrycznych, gdy odchylenia mierzonych wielkości \mathbf{X} oraz odchylenia parametrów \mathbf{P} układu przetwarzającego pomiary nie są ze sobą skorelowane (np. znajdują się w innych miejscach i oddziaływania wielkości zewnętrznych wpływających na każde z nich nie są ze sobą powiązane). Wówczas $\mathbf{V} = \mathbf{V}^T = \mathbf{0}$ i rozszerzona macierz kowariancji mierzand wejściowego $\mathbf{U}_{\mathbf{X},\mathbf{P}}$ o wymiarze $[(n+k) \times (n+k)]$ ze wzoru (24) ma dwa bloki równe $\mathbf{0}$, tj.:

$$\mathbf{U}_{\mathbf{X},\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_X & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & \mathbf{U}_p \end{bmatrix} \quad (26)$$

gdzie przez \mathbf{U}_X , \mathbf{U}_p oznaczono odpowiednio macierze kowariancji wielkości wejściowych \mathbf{X} o wymiarze $[n \times n]$ i parametrów \mathbf{P} układu o wymiarze $[k \times k]$.

Dla niewielkich przyrostów otrzymuje się

$$\Delta \mathbf{Y}(\mathbf{X}) = \Delta \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \mathbf{S}(\mathbf{X}) \cdot \Delta \mathbf{X} + \mathbf{S}_p \cdot \Delta \mathbf{P} \quad (27)$$

gdzie macierz \mathbf{S} o wymiarze $[m \times n]$ i macierz \mathbf{S}_P o wymiarze $[m \times k]$ wynikają z linearyzacji funkcji $\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ odpowiednio po zmiennych wejściowych w punkcie \mathbf{X} i po parametrach układu.

Obie macierze kowariancji \mathbf{U}_X i \mathbf{U}_P są symetryczne, a odchylenia elementów typu A każdej z nich w ogólnym przypadku mogą ze sobą korelować niezależnie od skorelowania odchyłeń z niepewnościami typu B.

Równanie propagacji wariancji, dla $\mathbf{U}_{Y,P}$ wg (26) przyjmuje postać

$$\mathbf{U}_{Y,P} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{S}_P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U}_X & [0] \\ [0] & \mathbf{U}_P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{S}^T \\ \mathbf{S}_P^T \end{bmatrix} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{U}_X \cdot \mathbf{S}^T + \mathbf{S}_P \cdot \mathbf{U}_P \cdot \mathbf{S}_P^T \quad (28)$$

Podobną postać macierzy kowariancji otrzymuje się dla niepewności względnych, tj.:

$$\mathbf{U}_{\delta Y,P} = \mathbf{S}_\delta \cdot \mathbf{U}_\delta \cdot \mathbf{S}_\delta^T + \mathbf{S}_{\delta P} \cdot \mathbf{U}_{\delta P} \cdot \mathbf{S}_{\delta P}^T \quad (29)$$

W przypadku pomiarów pośrednich wieloparametrowych, gdy parametry układu \mathbf{P} i wielkości mierzone \mathbf{X} nie są skorelowane, wzór (26) upraszcza się do postaci (28) i z niego wynika wzór (29) dla niepewności względnych. Wyjściowa macierz kowariancji $\mathbf{U}_{Y,P}$ staje się wówczas sumą tylko dwu wyrażeń. Pierwszy składnik zależy od niepewności mierzonych wejściowych \mathbf{X} tak, jak w ujęciu klasycznym wg GUM-S2 [2]. Drugi składnik dotyczy niepewności i współczynników korelacji parametrów \mathbf{P} układu realizującego funkcję przetwarzania $\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{P})$.

Wyznaczanie macierzy kowariancji $\mathbf{U}_{Y,P}$ mierzonych wyjściowych \mathbf{Y} należy przeprowadzać osobno dla odchyłeń opisanych niepewnościami typu A i typu B. Dla niepewności bezwzględnych otrzymuje się wówczas wzór:

$$\mathbf{U}_{Y,P} = \mathbf{S}(\mathbf{U}_{XA} + \mathbf{U}_{XB})\mathbf{S}^T + \mathbf{S}_P(\mathbf{U}_{PA} + \mathbf{U}_{PB})\mathbf{S}_P^T \quad (30)$$

oraz dla niepewności względnych – wzór (31):

$$\mathbf{U}_{\delta Y,P} = \mathbf{S}_\delta(\mathbf{U}_{\delta XA} + \mathbf{U}_{\delta XB})\mathbf{S}_\delta^T + \mathbf{S}_{\delta P}(\mathbf{U}_{\delta PA} + \mathbf{U}_{\delta PB})\mathbf{S}_{\delta P}^T \quad (31)$$

Stosowanie wzorów (29) i (30) ma dodatkową zaletę dla pomiarów tym samym układem w różnych warunkach wpływających. Wystarczy jedynie odpowiednio dostosować macierze \mathbf{U}_{XA} , \mathbf{U}_{PB} opisujące niepewności typu B.

6. Podsumowanie części 1.

Opracowano model matematyczny opisu propagacji niepewności w pomiarach pośrednich wieloparametrowych i opisu niepewności układów realizujących takie pomiary. Jest to rozszerzenie modelu rekomendowanego w Suplemencie 2 GUM [2]. Uwzględnia on zarówno niepewności jak i skorelowanie wielkości mierzonych na wejściu oraz parametrów wielowymiarowej funkcji przetwarzania.

Estymatory wartości wielkości wyjściowych są takie, jak w Suplemencie 2, gdyż wynikają ze wzoru (1). Natomiast niepewności i współczynniki korelacji wyznaczanych pośrednio wielkości wyjściowych jako elementów mierzonych \mathbf{Y} opisane są nową macierzą kowariancji $\mathbf{U}_{Y,P}$ i w ogólnym przypadku są inne.

W ogólnym przypadku, gdy funkcja przetwarzania realizowana jest w układzie pomiarowym obciążonym niepewnościami otrzymano czteroskładnikowe równanie (24) dla wyjściowej macierzy kowariancji. Jeśli parametry funkcji przetwarzania nie są

zależne i nie są skorelowane z wartościami wielkości mierzonych na wejściu układu, otrzymuje się prostsze dwuskładnikowe równanie macierzy kowariancji dla niepewności bezwzględnych (28) i jego wariant (30) z wydzielonymi macierzami dla odchyłeń typu A i B. Pierwszy składnik jest taki jak w Suplemencie 2 [2] Przewodnika GUM. Równania wyjściowej macierzy kowariancji (29) i (31) otrzymane dla niepewności względnych mają też podobną strukturę.

W części 2. artykułu zostanie przedstawiony przykład ilustrujący zastosowanie rozszerzonej metody do wyznaczania niepewności pomiarów pośrednich wieloparametrowych z uwzględnieniem niepewności i korelacji parametrów \mathbf{P} układu realizującego funkcję przetwarzania. Będą to często występujące w pomiarach przemysłowych i w diagnostyce technicznej, pomiary za pośrednictwem układu o strukturze czwórnika. Część 2. będzie zawierać też wnioski końcowe.

Bibliografia

1. JCGM100:2008, Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement.
2. JCGM102:2011, Supplement 2 to the ‘GUM – Extension to any number of output quantities’.
3. EA-4/02 M: 2013 Wyznaczanie niepewności pomiaru przy wzorcowaniu (*Evaluation of the Uncertainty of Measurement in Calibration*).
4. Dorozhovets M., Warszawa Z.L., *Udoskonalenie metod wyznaczania niepewności wyników pomiaru w praktyce*. „Przegląd Elektrotechniki”, Nr 1, 2007, 1–13.
5. Warszawa Z.L., Ezhela V.V., *Zarys podstaw teoretycznych wyznaczania i numerycznej prezentacji wyników pomiarów pośrednich wieloparametrowych*. „Pomiary Automatyka Kontrola”, Vol. 57, Nr 2, 2011, 175–179.
6. Warszawa Z.L., Zięba A., *Niepewność typu A pomiaru o obserwacjach samo-skorelowanych*. „Pomiary Automatyka Kontrola”, Vol. 58, Nr 2, 2012, 157–161.
7. Warszawa Z.L., *Metody rozszerzenia analizy niepewności pomiarów*. Monografia, Oficyna Wydawnicza PIAP, Warszawa 2016.
8. Warszawa Z.L. Part 1; Warszawa Z.L., Puchalski J., Part 2, Mat. Konf. (CD): Problems and Progress of Metrology, ppm '18 Szczyrk 04–06 June 2018 r. Series: Conferences No. 22, Metrology Commission of Katowice Branch of the Polish Academy of Science, ISBN 978-83-7880-541-0.
9. Warszawa Z.L., Puchalski J., *Udoskonalona metoda wyznaczania niepewności w pomiarach wieloparametrowych. Część 1. Podstawy teoretyczne dla skorelowanych wielkości mierzonych*. „Pomiary Automatyka Robotyka”, R. 23, Nr 1, 2019, 47–58, DOI: 10.14313/PAR_231/47.
10. Warszawa Z.L., Puchalski J., *Udoskonalona metoda wyznaczania niepewności w pomiarach wieloparametrowych. Część 2. Przykłady pomiarów wielkości skorelowanych*, „Pomiary Automatyka Robotyka”, R. 23, Nr 2, 2019, 29–37, DOI: 10.14313/PAR_232/29.
11. Warszawa Z.L., Puchalski J., *Vector method of estimation the uncertainties of correlated multi-measurands*. Proceedings (Conference Digest) of Quantum and Precision Metrology QPM 2019 Conference Krakow, Poland, 17–19 June 2019, ISBN 978-83-939486-5-9 SIV 4.
12. Warszawa Z.L., Puchalski J., *Wektorowa metoda wyznaczania niepewności w pomiarach wieloparametrowych o skorelowanych składnikach typu A oraz B mierzonych*, „Przemysł Chemiczny”, Nr 7/2019, 1061–1068.
13. Warszawa Z.L., Puchalski J., *Niepewność wieloparametrowych pomiarów wielkości skorelowanych*. Zeszyty Naukowe Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej, Nr 65, 2019, 101–108.

Extended Method for Evaluation Uncertainties of Indirect Multi-Parameter Measurements and of Circuits for these Measurements

Part 1. Influence of Correlation and Uncertainties of Processing Function – Basic Formulas

Abstract: In the part 1 of article, the current results of the work are briefly presented regarding the impact of correlations in sets of deviations from estimators of directly measured quantities with uncertainty of types A and B on the accuracy of indirectly determined parameters of output multi-measurands. An extended mathematical model of the method contained in Supplement 2 of the GUM Guide was presented. This new extended model takes also into account the uncertainties of the processing function in multiparameter measurements and can also be used to describe the accuracy of instruments and systems that perform such measurements. Part 2 presents examples of using the extended method to describe intermediately measured parameters of a two-terminal net through a four-terminal network, considering the uncertainties of its elements.

Keywords: multivariate measurements, multimeasurand, propagation of variances, covariance matrix, vector propagation of uncertainties, correlation coefficient, correlations of deviations of type A or type B, uncertainties of processing function

doc. dr inż. Zygmunt Lech Warszawa

zlw1936@gmail.com

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Warszawskiej 1959, doktorat 1967, docent od 1970. Praca: Instytut Elektrotechniki 1958–1963 i 1994–1995, Politechnika Warszawska 1960–1970, Politechnika Świętokrzyska 1970–1978 (organizator i dziekan Wydziału Transportu w Radomiu), Organizator i kierownik: Ośrodka Aparatury Pomiarowej w Instytucie Meteorologii i Gospodarki Wodnej 1978–1982 oraz Zakładu Automatyzacji i Pomiarów w Instytucie Chemii Przemysłowej 1983–1992. Doradca Ministra Edukacji Narodowej 1992–1995, Politechnika Radomska 1983–2002. Obecnie główny specjalista w Przemysłowym Instytucie Automatyki i Pomiarów PIAP. Autor ponad 340 publikacji, 6 monografii, kilkudziesięciu prac badawczych i konstrukcyjnych, 11 patentów oraz promotor 2 doktorów. Prezes Polskiego Towarzystwa Metrologicznego. Członek stowarzyszenia PolSPAR oraz Akademii Metrologii Ukrainy.



dr inż. Jacek Puchalski

j.puchalski@gum.gov.pl

Absolwent Wydziału Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej (1986 r.) oraz Wydziału Elektroniki (1988 r.) Politechniki Warszawskiej. W latach 1987–1995 asystent na Politechnice Warszawskiej, w 1995 r. obronił pracę doktorską. Kolejne 10 lat pracował w branży nowych technologii w firmach produkujących i importujących kasy rejestrujące. Przygotowywał i uczestniczył w certyfikacji nowych modeli kas w Ministerstwie Finansów oraz prowadził szkolenia i serwis urządzeń fiskalnych. Od 2006 r. pracuje w Głównym Urzędzie Miar. Zajmował się zatwierdzeniem typu i oceną zgodności taksometrów elektronicznych i mierników prędkości w ruchu drogowym, a obecnie jako główny metrolog rozwija metody matematyczne szacowania niepewności pomiarowych.

