

KARTY KONTROLNE \bar{X} i R DLA ROZKŁADÓW SKOŚNYCH – STUDIUM PRZYPADKU

Słowa klucze:

rozkład skośny, karty kontrolne, karty kontrolne Shewharta, metoda korekcji asymetrii, metoda CS

1. Wstęp

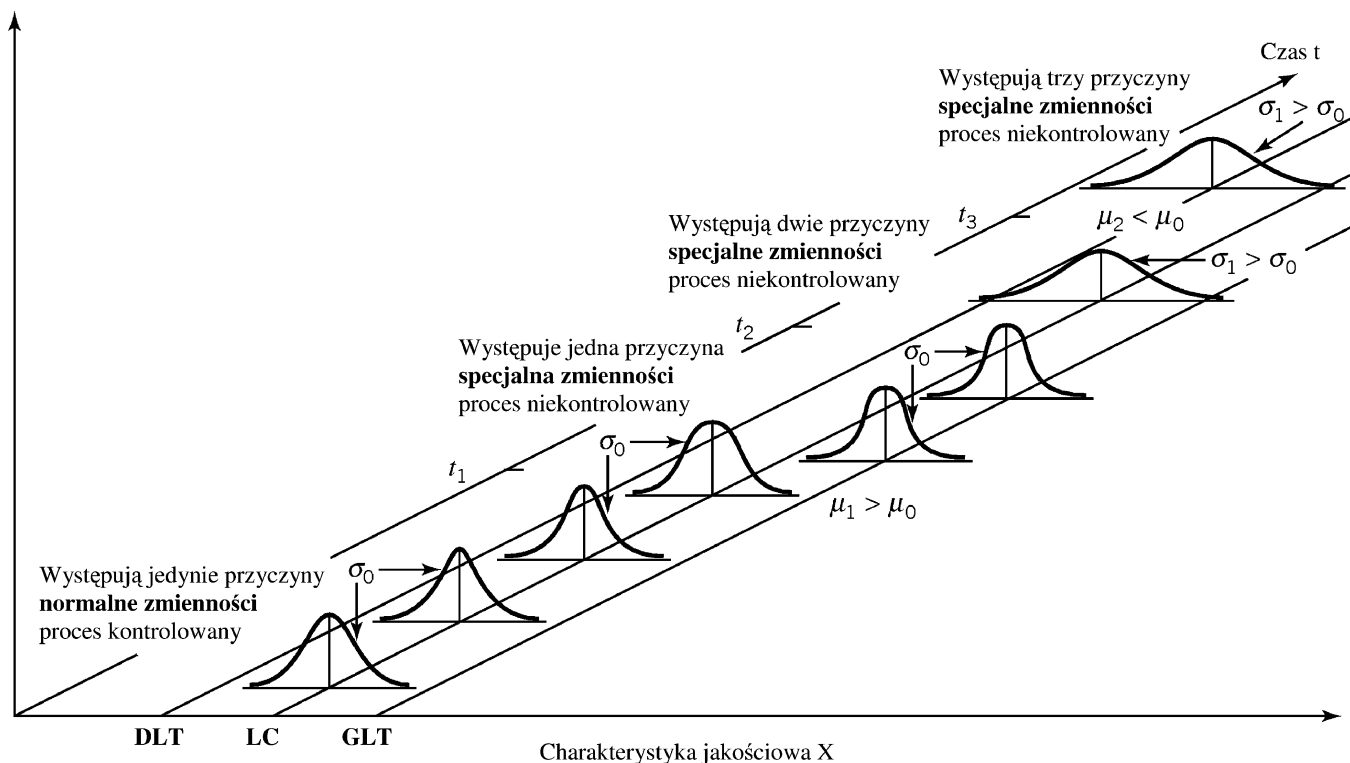
Aby wyroby spełniały stawiane wymagania, na ogół powinny być wytwarzane w procesie, który jest stabilny i powtarzalny. Analiza stabilności procesów produkcyjnych (w tym stabilności badanych charakterystyk) jest jednym z kluczowych aspektów ciągłego doskonalenia jakości. Nie jest jednak możliwe produkowanie określonego typu wyrobu w tym samym przedsiębiorstwie i w identycznych warunkach, w taki sposób, aby uzyskać idealne parametry tego produktu z uwagi na działanie zakłóceń zmienności badanej charakterystyki. Zmienności te można podzielić na [10]:

- losowe (ang. *Chance Causes; Common Cause*), które tworzą zbiór wielu małych, głównie nieuniknionych czynników, a ich obecność nie wpływa na przewidywalność procesu (statystyczną stabilność – proces uregulowany),
- specjalne (ang. *Assignable Causes; Special Cause*), które tworzą zbiór czynników zaburzających naturalny przebieg procesu, a ich obecność powoduje zaburzenia w procesie poprzez np. dryf wartości średniej czy też

zmianę długoterminowej wariancji (proces statystycznie niestabilny – proces zderegulowany).

Występowanie przyczyn specjalnych jest widoczne na kartach kontrolnych jako np. przekroczenie granic kontrolnych bądź pojawiające się trendy. Norma PN-ISO 8258+AC1 [11, s. 14] zawiera opis ośmiu sytuacji, które mogą świadczyć o występowaniu statystycznej niestabilności procesu. Głównymi czynnikami pojawienia się przyczyn specjalnych mogą być np. błędy operatora, wadliwy surowiec lub też niewłaściwe ustawienie maszyny. Wpływ przyczyn losowych oraz specjalnych na kontrolę nad procesem zilustrowano na rysunku 1.

Do czasu t_1 na proces oddziałują jedynie przyczyny losowe zmienności procesu, a zatem proces jest uregulowany. Widać wyraźnie, że wartość średnia procesu \bar{x} pokrywa się z linią centralną LC, a odchylenie standardowe σ_0 mieści się w zakresie dolnej i górnej linii tolerancji (odpowiednio DLT, GLT). Od momentu t_1 w procesie pojawiają się specjalne przyczyny zmienności, co powoduje dryf wartości średniej ($\mu_1 > \mu_0$ lub $\mu_2 < \mu_0$) i zwiększenie wartości odchylenia standardowego ($\sigma_1 > \sigma_0$). Tak jak wspomniano wcześniej, specjalne przyczyny zmienności pojawiają się na karcie kontrolnej jako wyniki istotnie wyróżniające się spośród pozostałych, zatem na tej podstawie możliwe jest śledzenie przebiegu procesu i ocena, czy ewentualne wahania średniej lub



Rys. 1. Wpływ przyczyn normalnych i przyczyn specjalnych zmienności na kontrolę nad procesem [10, s. 182]

innej miary statystycznej kontrolowanych charakterystyk są na tyle znaczne, że oznaczają rozregulowanie procesu. Wykorzystywanie kart kontrolnych w praktyce wymaga dobrego przygotowania pod względem „zdroworozsądkowego” wniosku statystycznego (pojedyncze sygnały nie muszą prowadzić do całkowitego wstrzymania procesu). Dodatkowo należy pamiętać o czterech zasadach stosowania klasycznych kart kontrolnych [7-8, 14]:

- empiryczny rozkład danych pomiarowych badanej charakterystyki powinien zachować charakter rozkładu normalnego lub zbliżonego do normalnego, z uwagi na metodę wyznaczania granic kontrolnych,
- przyczyny zmienności naturalnej procesu powinny być niezależne (brak autokorelacji) – w przypadku braku spełnienia założenia o braku autokorelacji należy wykorzystać specjalne karty kontrolne,
- proces powinien być zdolny jakościowo (wskaźnik zdolności jakościowej $c_p > 1,33$), z uwagi na to, że w przypadku niespełnienia tego warunku mogą pojawić się sygnały mogące świadczyć o deregulacji procesu w pierwszych etapach jego realizacji,
- wybór rodzaju karty kontrolnej powinien być uzależniony od natury przebiegu kontrolowanego procesu, a także od względów ekonomicznych (m.in. koszty pobierania próbek).

Celem artykułu jest wyznaczanie granic kontrolnych dla karty \bar{X} oraz R w oparciu o metodę korekcji asymetrii, w przypadku rozkładów skośnych badanej charakterystyki jakościowej wyrobu, z uwzględnieniem zagrożeń związanych z błędnym doбором metody wyznaczania tych granic kontrolnych. W tym celu przeprowadzono analizę danych pomiarowych pochodzących z przedsiębiorstwa produkującego stelaże siedzisk samochodowych, a obliczenia przeprowadzono z wykorzystaniem programu Statistica oraz Excel.

2. Istotność założenia o normalnym charakterze danych pomiarowych

W praktyce często założenia o normalności rozkładu badanej charakterystyki jakościowej są naruszone. Wpływ braku normalności na postać i wnioski wynikające z wykresu kontrolnego na karcie kontrolnej może być znaczący [16]. Wytypowano sześć przyczyn braku normalności danych pomiarowych [3]:

- występowanie wartości ekstremalnych, wynikających m.in. z błędów pomiarowych, a także wątpliwych wyników pomiarowych (ang. *Outliers*) – duża liczba ekstremalnych wartości w zestawie danych może spowodować uzyskanie rozkładu skośnego,
- „rozwarstwienie procesu”, czyli nałożenie się dwóch lub więcej procesów – dane mogą nie mieć charakteru rozkładu normalnego z uwagi na zmienność, pochodzenie z dwóch różnych stanowisk pracy lub natury procesu (częste przesunięcie), wówczas rozkład może mieć charakter dwu- lub wielomodalny,
- niewystarczająca rozróżnialność danych, na którą wpływ mają m.in. błędy zaokrągleń lub urządzenia pomiarowe o słabej dokładności,
- sortowanie danych,

- wartości bliskie zeru lub naturalnej granicy tolerancji, co może skutkować powstawaniem rozkładów skośnych,
- natura procesu, np. procesy chemiczne, procesy obróbki skrawaniem.

3. Rozkłady skośne w pomiarach jakości

Najczęściej występującymi rozkładami danych pomiarowych, poza rozkładem normalnym, są rozkłady skośne. Dla skośnych populacji ryzyko typu I (prawdopodobieństwo pojawienia się fałszywego sygnału na karcie kontrolnej) wzrasta wraz ze wzrostem wartości wskaźnika asymetrii k_3 , z uwagi na rozbieżność zmienności rozkładu normalnego oraz rozkładu asymetrycznego [5]. W przypadku, gdy dane pomiarowe mają charakter rozkładu skośnego można wykorzystać jedno z czterech rozwiązań [5-6, 15]:

- zwiększyć liczebność próby nawet do tysiąca, co może być bardzo kosztowne i nieopłacalne, zwłaszcza w przypadku produkcji wieloasortymentowej,
- zlekceważyć skośność rozkładu i wykorzystać klasyczne karty kontrolne, co może prowadzić do pojawienia się fałszywych sygnałów,
- założyć, że badany rozkład populacji jest znany i wykorzystać odpowiednią kartę zgodnie z rozkładem, co może również doprowadzić do niewłaściwej oceny stabilności procesu,
- założyć, że badany rozkład populacji nie jest znany i wykorzystać metody heurystyczne.

4. Przegląd wybranych metod heurystycznych wyznaczania granic kontrolnych dla rozkładów skośnych

W literaturze można znaleźć kilka metod heurystycznych wykorzystywanych do wyznaczania granic kontrolnych dla karty \bar{X} oraz R w przypadku rozkładów skośnych. Pierwsza z nich dotyczy analizy percentyli rozkładu skośnego dla średniej próbkowej i rozstępu próbkowego. Druga z kolei bazuje na korekcji asymetrii w oparciu o wskaźnik skośności próbkowej (ang. *Correction Skewness Method*, CS Method) [13]. Inne podejście dotyczy metody wariancji ważonej (ang. *Weighted Variance Method*, WV Method) [6], metody ważonego odchylenia standardowego (ang. *Weighted Standard Deviations Method*, WSD Method) [9], czy też wykorzystania tzw. adaptacyjnych kart kontrolnych (ang. *Adaptive \bar{X} , R Control Charts*) [9].

4.1. Metoda analizy percentyli rozkładu

Metoda polega na wyznaczeniu stałych na karcie kontrolnej w oparciu o wartości $Z_{0,00135}$ oraz $Z_{0,99865}$ percentyla dla rozkładu próbkowego \bar{x} (brane są granice kontrolne w zakresie $\pm 3\sigma$, w których powinno znaleźć się 99,73% wszystkich pomiarów). Niech x_1, x_2, \dots, x_n będą losowymi próbkami o dowolnym rozkładzie z parametrem skali σ oraz parametrem położenia $\bar{x}=0$. Niech DLK, GLK oznaczają odpowiednio dolną i górną linię kontrolną. Wówczas można zapisać symbolicznie prawdopodobieństwo, że pomiar znajdzie się w zakresie linii kontrolnych karty \bar{x} oraz R jako zależność:

$$\begin{aligned} P(DLK \leq \bar{x} \leq GLK) &= 0,9973 \\ P(DLK \leq R \leq GLK) &= 0,9973. \end{aligned} \quad (1)$$

Następnie, dokonując standaryzacji rozkładu oraz zakładając, że $DLK=Z_{0,00135}$, $GLK=Z_{0,99865}$ zależność (1) można przekształcić do postaci:

gdzie: A^*_{2p} , A^{**}_{2p} , D^*_{3p} , D^{**}_{3p} – stałe wyznaczone na podstawie percentyli rozkładu skośnego.

$$\begin{aligned} P(A^*_{2p}\bar{x} \leq \bar{x}_i \leq A^{**}_{2p}\bar{x}) &= 0,9973 \\ P(D^*_{3p}\bar{R} \leq R_i \leq D^{**}_{3p}\bar{R}) &= 0,9973, \end{aligned} \quad (2)$$

Niewątpliwą wadą tego podejścia jest konieczność identyfikacji rozkładu (np. rozkład gamma, Wibulla itp.) oraz konieczność indywidualnego wyznaczenia stałych A^*_{2p} , A^{**}_{2p} , D^*_{3p} , D^{**}_{3p} dla tego rozkładu. Metodę wyznaczania tych stałych na przykładzie rozkładu półlogistycznego można znaleźć w pracy Rao i Kantama [13, s. 439, 441] lub na przykładzie rozkładu Lomax w artykule Rao, Durgamamba, Rao [12, s. 57, 60].

4.2. Metoda wariancji ważonej (WSD method)

Metoda wariancji ważonej jest jedną z heurystycznych metod wyznaczania granic kontrolnych, która bazuje na skośności badanej charakterystyki [6]. W przypadku, gdy rozkład badanej charakterystyki jest prawostronnie asymetryczny, wówczas odległość pomiędzy GLK, a LC jest większa niż dystans pomiędzy DLK, a LC. Jeżeli z kolei rozkład jest symetryczny, wówczas odległość zarówno górnej, jak i dolnej linii kontrolnej od linii centralnej jest identyczna.

Prawdopodobieństwo, że wartość badanej charakterystyki jakościowej X będzie mniejsza lub równa jej średniej próbkowej $\mu_x = \bar{x}$ można estymować przy wykorzystaniu zależności [9]:

$$\hat{P}_X = P(X \leq \mu_X) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \delta(\bar{x} - x_{ij})}{nm}, \quad (3)$$

gdzie:

n – liczba próbek,
 m – liczebność próbki,

$$\delta(X) = \begin{cases} 1, & X \geq 0 \\ 0, & X < 0. \end{cases}$$

Niech d'_2 oraz d'_3 będą stałymi wyznaczonymi na podstawie WSD dla rozkładu skośnego i odpowiadają stałym d_2 i d_3 w przypadku rozkładu normalnego. Wówczas granice kontrolne karty średniej \bar{X} , wyznaczone przy użyciu metody WSD mają postać wyrażenia (4) [1]:

$$\begin{aligned} GLK &= \bar{x} + \frac{3\bar{R}}{d'_2\sqrt{n}}\sqrt{2\hat{P}_X} = \bar{x} + W_g\bar{R} \\ LC &= \bar{x} \\ DLK &= \bar{x} - \frac{3\bar{R}}{d'_2\sqrt{n}}\sqrt{2(1 - \hat{P}_X)} = \bar{x} - W_d\bar{R}, \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie:

\bar{x} – średnia ze średnich próbkowych,
 \bar{R} – średni rozstęp próbkowy.

Z kolei granice kontrolne karty rozstępu R wyznaczone przy metody WSD mają postać [1]:

$$\begin{aligned} GLK &= \bar{R} \left[1 + 3 \frac{d'_3}{d'_2} \sqrt{2\hat{P}_X} \right] = V_g\bar{R} \\ LC &= \bar{R} \\ DLK &= \bar{R} \left[1 - 3 \frac{d'_3}{d'_2} \sqrt{2(1 - \hat{P}_X)} \right]^+ = V_d\bar{R}. \end{aligned} \quad (5)$$

Wartości stałych W_g , W_d , V_g , V_d w zależności od wartości \hat{P}_X oraz liczebności próby m można znaleźć m.in. w [1, s. 122, 124]. Może się jednak okazać, że z punktu widzenia aplikacyjnego metoda wyznaczania wartości \hat{P}_X jest dość skomplikowana i czasochłonna.

4.3. Metoda korekcji asymetrii (CS method)

Metoda korekcji asymetrii bazuje na rozwinięciu Cornisha-Fishera [4], na podstawie którego określono korekcję asymetrii [9]:

$$\begin{aligned} c_4^* &= \frac{\frac{4}{3}s_3(\bar{x})}{1+0,2s_3^2(\bar{x})} \\ d_4^* &= \frac{\frac{4}{3}s_3(\bar{R})}{1+0,2s_3^2(\bar{R})}, \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie:

c_4^* – stała korekcji asymetrii dla karty \bar{X} ,
 d_4^* – stała korekcji asymetrii dla karty R ,
 $s_3(\bar{x})$ – współczynnik skośności średniej próbkowej,
 $s_3(\bar{R})$ – współczynnik rozstępu próbkowego.

W przypadku rozkładu symetrycznego ($s_3 = 0$), wartości granic kontrolnych, wyznaczonych metodą korekcji asymetrii, są takie same jak w przypadku granic obliczonych dla klasycznych kart Shewharta. W przypadku asymetrii prawostronnej ($s_3 > 0$) różnica pomiędzy wartością GLK i LC jest większa niż różnica pomiędzy wartościami DLK i LC. Jednakże cały zakres granic kontrolnych będzie w dalszym ciągu wynosił 6σ (sześć wartości odchylenia standardowego). Niech $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{im}$, $i=1,2,\dots,m$ będą próbkami o liczebności m charakterystyki o rozkładzie ze średnią μ , odchyleniem standardowym σ oraz współczynnikiem skośności s_3 . Wówczas granice kontrolne karty średniej \bar{X} , wyznaczone przy użyciu metody korekcji asymetrii mają postać [2, 4]:

$$\begin{aligned} GLK &= \bar{x} + \left(3 + \frac{4s_3}{3\sqrt{m}} \right) \frac{\bar{R}}{d_2^*\sqrt{m}} = \bar{x} + A_g^*\bar{R} \\ LC &= \bar{x} \\ DLK &= \bar{x} + \left(-3 + \frac{4s_3}{3\sqrt{m}} \right) \frac{\bar{R}}{d_2^*\sqrt{m}} = \bar{x} + A_d^*\bar{R}, \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie:

$$s_3^* = \frac{1}{mn-3} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_{ij} - \bar{x}}{\sqrt{\frac{1}{mn-1} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2}} \right)^3 -$$

– estymator współczynnika skośności ze średnich próbkowych,

$d_2^* = \frac{\mu_R}{\sigma_x}$ – stała dla danej skośności rozkładu charakterystyki, wyznaczona w oparciu o korekcję asymetrii i odpowiadająca stałej d_2 w przypadku rozkładu normalnego.

Z kolei granice kontrolne karty rozstępu R wyznaczone przy użyciu metody korekcji asymetrii mają postać [4]:

$$GLK = \left[1 + (3 + d_4^*) \frac{d_3^*}{d_2^*} \right] = D_4^* \bar{R}$$

$$LC = \bar{R} \tag{8}$$

$$DLK = \left[1 + (-3 + d_4^*) \frac{d_3^*}{d_2^*} \right]^+ = D_3^* \bar{R},$$

gdzie: d_2^* , d_3^* , d_4^* – stałe dla danej skośności rozkładu charakterystyki, wyznaczone w oparciu o korekcję asymetrii i odpowiadające stałym d_2 , d_3 , d_4 w przypadku rozkładu normalnego.

W tabeli 1 zestawiono wartości stałych d_2^* , d_3^* i d_4^* niezbędne do wyznaczenia granic kontrolnych karty \bar{X} oraz R , dla wybranych wartości współczynnika $s_3 = \{0,0,4;0,8;1,2;1,6;2,0;2,4\}$ oraz liczebności próbki $m = \{3,5,7\}$. Metody wyznaczania tych wartości można znaleźć m.in. w [4, s. 7-9].

5. Studium przypadku

Przeprowadzona analiza metod heurystycznych pozwoliła na wybór najmniej skomplikowanej metody z uwagi na aplikacyjność w przedsiębiorstwach produkcyjnych. Dodatkowo, badania przeprowadzone przez Cahna i Cui, wykazały, że ryzyko typu I dla CS jest bliższe standardowej wartości 0,27% niż w przypadku pozostałych prezentowanych metod, a zatem skuteczność tego podejścia jest znacznie większa [4]. W związku z tym, w studium przypadku do wyznaczenia wartości granic kontrolnych wykorzystano metodę korekcji asymetrii.

Badanie przeprowadzono w przedsiębiorstwie produkcyjnym oferującym stelaże siedzisk samochodowych, a pomiary, dotyczące analizowanych charakterystyk, pobierane

były zgodnie z wewnętrznymi procedurami przez sześć kolejnych dni.

Proces produkcji składa się z dwóch etapów – przed i po lakierowaniu. W etapie I wyróżnia się pięć istotnych operacji. Ponadto wybrano trzy pomiary charakterystyki, które mają najistotniejszy wpływ na jakość i bezpieczeństwo wyrobu gotowego:

- formowanie rury przedniej (długość rury po formowaniu – charakterystyka 1; pomiar 1),
- spawanie rury przedniej i zgrzewanie oporowe,
- nitowanie elementów na przedniej rurze (odległość pomiędzy wkrętami elementów na przedniej rurze – charakterystyka 2; pomiar 2),
- „rozkloszowanie” tylnej rury (średnica kołnierza po rozkloszowaniu – charakterystyka 3; pomiar 3),
- dopasowanie płyty siedziska.

W drugim etapie procesu wyróżnić można pięć operacji. Dodatkowo, wybrano jeden pomiar charakterystyki, który ma najistotniejszy wpływ na jakość i bezpieczeństwo wyrobu gotowego:

- lakierowanie,
- zakładanie sprężyn,
- montaż szyn i dźwigni,
- składanie końcowe;
- weryfikacja bezpieczeństwa przez określenie siły przesuwu (siła przesuwu – charakterystyka 4; pomiar 4).

Analizę rozpoczęto od sprawdzenia charakteru rozkładu empirycznego badanych charakterystyk przy wykorzystaniu testu Shapiro-Wilka na poziomie istotności $\alpha=0,05$ (rys. 2).

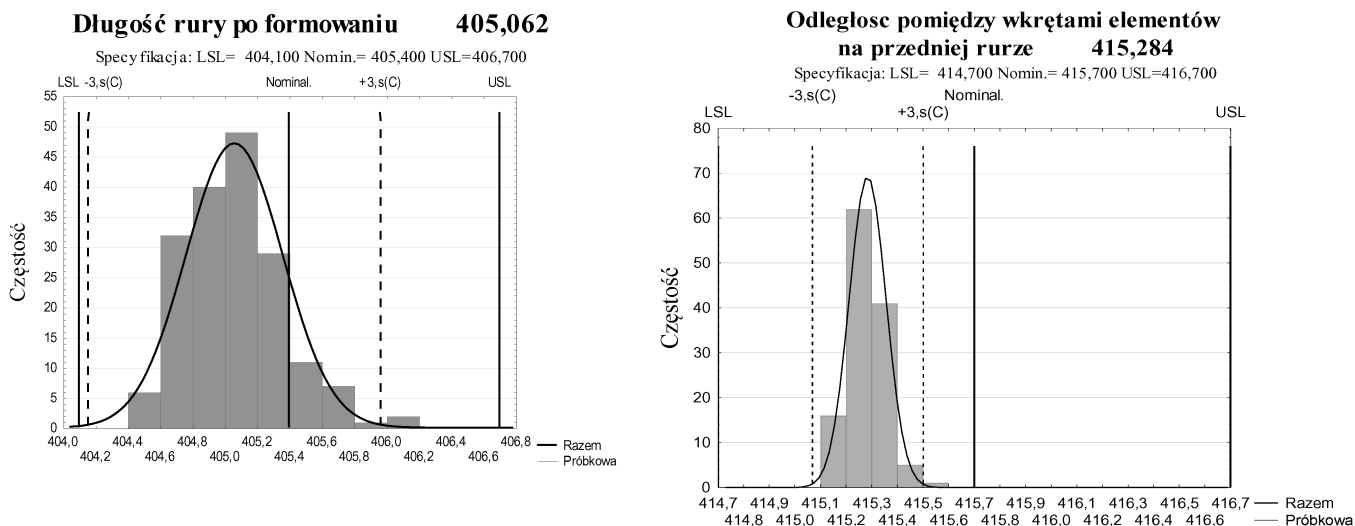
Wyniki testu przedstawione w tabeli 2 oraz histogramy rozkładu badanych charakterystyk (rys. 2) wyraźnie pokazują, że średnica kołnierza po rozkloszowaniu oraz siła przesuwu wykazują charakter rozkładu normalnego ($p > \alpha$), a długość rury po formowaniu i odległość pomiędzy wkrętami elementów na przedniej rurze nie mogą być opisane przez

s_3	m= 3			m= 5			m= 7		
	d_2^*	d_3^*	d_4^*	d_2^*	d_3^*	d_4^*	d_2^*	d_3^*	d_4^*
0,00	1,68	0,90	0,66	2,32	0,85	0,55	2,70	0,82	0,50
0,40	1,68	0,90	0,86	2,31	0,87	0,71	2,69	0,85	0,68
0,80	1,66	0,93	1,07	2,28	0,93	0,96	2,66	0,92	0,95
1,20	1,62	0,98	1,25	2,24	1,01	1,18	2,60	1,01	1,16
1,60	1,57	1,04	1,38	2,18	1,09	1,32	2,55	1,11	1,30
2,00	1,52	1,10	1,45	2,12	1,17	1,41	2,49	1,21	1,39
2,40	1,48	1,14	1,48	2,06	1,24	1,46	2,43	1,30	1,44

Tab. 1. Wartości stałych d_2^* , d_3^* , d_4^* dla wybranych wartości współczynnika skośności s_3 oraz liczebności próby m

Zmienna	Testy normalności		
	N	W	p
długość rury po formowaniu	177	0,9695	0,0006
odległość pomiędzy wkrętami elementów na przedniej rurze	125	0,9749	0,0198
średnica kołnierza po rozkloszowaniu	129	0,9804	0,0587
siła przesuwu	57	0,9686	0,1442

Tab. 2. Wyniki testu normalności dla badanych charakterystyk



Rys. 2. Histogramy dla badanych charakterystyk

rozkład normalny ($p < \alpha$). W zaistniałej sytuacji, w dalszej części badania pominięto średnicę kołnierza po rozkłoszowaniu oraz siłę przesuwu.

Dalej wyznaczono wartość współczynników skośności s_3 (tab. 3) oraz wartości zdolności jakościowej c_p oraz c_{pk} , przy wykorzystaniu metody Clements’a zmodyfikowanej o metodę percentyli Burra typu XII (tab. 4).

Wartości z tabeli 4 wyraźnie wskazują, że warunki dotyczące zdolności jakościowej są zachowane ($c_p > 1,33$), a zatem możliwe jest wyznaczenie granic kontrolnych dla karty \bar{X} oraz R metodą korekcji asymetrii na podstawie zależności (7, 8) oraz stałych z tabeli 1.

W pierwszej kolejności wyznaczania granic kontrolnych dane dotyczące charakterystyki 1 zgrupowano w trójelementowe próbki, a dla charakterystyki 2 w pięcioelementowe próbki (zgodnie z wewnętrznymi procedurami przedsiębiorstwa) i na podstawie równań z (7), wyznaczono wartość estymatora współczynnika skośności ze średnich próbkowych $s_3(\bar{x})$ i rozstępów $s_3(R)$ (tab. 5).

Następnie z tabeli 1 odczytano wartości d^*_2 , d^*_3 oraz d^*_4 odpowiednio dla $s_3(\bar{x})$, $s_3(R)$ oraz $m=3$ oraz $m=5$, po czym obliczono na podstawie zależności (7, 8) współczynniki A^*_g , A^*_d , D^*_4 i D^*_3 (tab. 6).

zmienna	Statystyki opisowe			
	N ważnych	Średnia	Odch. std	Skośność
długość rury po formowaniu	177	405,0620	0,2997	0,6547
odległość pomiędzy wkrętami elementów na przedniej rurze	129	415,2839	0,0719	0,5526

Tab. 3. Wybrane wartości statystyk opisowych dla charakterystyki 1 i charakterystyki 2

	c^*_p	c^*_{pk}
długość rury po formowaniu	1,529	1,453
odległość pomiędzy wkrętami elementów na przedniej rurze	4,432	3,526

Tab. 4. Wartości wskaźników zdolności jakościowych wyznaczonych met. Clements’a zmodyfikowaną o metodę percentyli Burra typu XII

	$s_3(\bar{x})$	$s_3(R)$
długość rury po formowaniu	0,629	0,33
odległość pomiędzy wkrętami elementów na przedniej rurze	0,91	0,32

Tab. 5. Wartości estymatorów współczynnika skośności s^*_3

	m	$s_3(\bar{x})$	A^*_g	A^*_d	$s_3(R)$	D^*_4	D^*_3
długość rury po formowaniu	3	0,4	1,13	0,92	0,0	2,93	0,00
	3	0,8	1,25	0,84	0,4	3,06	0,00
odległość pomiędzy wkrętami elementów na przedniej rurze	5	0,8	0,68	0,5	0,0	2,30	0,10
	5	1,2	0,74	0,46	0,4	2,40	0,14

Tab. 6. Wartości współczynników A^*_g , A^*_d , D^*_4 , D^*_3

Przy wykorzystaniu interpolacji liniowej:

$$f(x_1) = f(x_0) + \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} (x_1 - x_0), \quad (9)$$

$$x_0 < x_1 < x_2,$$

wyznaczono ostateczne wartości stałych A^*_g , A^*_d , D^*_4 i D^*_3 (tab. 7).

Na podstawie wartości z tabeli 7 oraz zależności (7, 8), wyznaczono wartości granic kontrolnych i narysowano wykresy kart kontrolnych \bar{X} i R (rys. 3).

Analizując wykresy z rysunku 3. widać wyraźnie, że w przypadku asymetrii prawostronnej różnica między wartościami GLK i LC jest większa niż różnica pomiędzy DLK i LC. Dodatkowo, w przypadku długości rury po formowaniu, występują zaburzenia procesu (rys. 3a). Na karcie średniej \bar{X} pojawiają się trendy (rosnący od pomiaru 1 do pomiaru 17, a następnie malejący od pomiaru 17 do 30), dodatkowo dwa pomiary przekraczają granice kontrolne (górną – pomiar 17 oraz dolną – pomiar 38). Można również zaobserwować, że od pomiaru 39 punkty na karcie średniej znajdują się poniżej lub na LC (z wyjątkiem pomiaru 48), co jest również sygnałem, że proces uległ zaburzeniu. Z kolei analizując kartę rozstępu R (rys. 3a), można zauważyć, że pojawiają się „skoki” rozstępu zwłaszcza dla początkowych pomiarów, co potwierdza, że należy przeanalizować przyczyny pojawiających się sygnałów na karcie kontrolnej i ewentualnie wprowadzić działania doskonalące. Wykresy kontrolne dla odległości pomiędzy wkrętami elementów na przedniej rurze nie wskazują na destabilizację procesu (rys. 3b), jednakże widoczne są niewielkie „skoki” zarówno wartości średniej \bar{x} , jak i rozstępu R (pomiar 6-9 oraz 18-20).

6. Podsumowanie

W praktyce, założenia o normalności rozkładu badanej charakterystyki jakościowej mogą być niespełnione, co ma z kolei duży wpływ na niewłaściwą ocenę stabilności procesu. Analiza literaturowa wykazała, że najczęściej występującymi rozkładami danych pomiarowych, poza rozkładem normalnym, są rozkłady skośne. W przypadku wystąpienia rozkładów skośnych można wybrać jedno z czterech podejść: zwiększyć liczebność próby nawet do tysiąca, zlekceważyć skośność rozkładu i wykorzystać klasyczne karty kontrolne, założyć, że badany rozkład populacji jest znany i wykorzystać odpowiednią kartę zgodnie z rozkładem bądź założyć, że badany rozkład populacji nie jest znany i wykorzystać metody heurystyczne. Wykorzystanie jednej z trzech pierwszych metod może okazać się nieopłacalne

(np. z uwagi na konieczność poniesienia dodatkowych kosztów pobierania próbek), a nawet doprowadzić do niewłaściwej oceny stabilności procesu. W przypadku prawostronnej asymetrii prawy ogon rozkładu jest dłuższy, a zatem obszar pomiędzy LC i GLK powinien być szerszy niż pomiędzy LC i DLK. Zlekceważenie skośności rozkładu może spowodować, że na karcie kontrolnej mogą pojawić się fałszywe sygnały świadczące o deregulacji procesu, w szczególności przekroczenie GLK.

„Złotym środkiem” w tej sytuacji mogą być metody heurystyczne, tj. metoda analizy percentyli rozkładu, metoda wariancji ważonej lub też metoda korekcji asymetrii. Wybór odpowiedniej metody heurystycznej powinien opierać się na prostocie zastosowania oraz skuteczności. Analiza literaturowa wykazała, że największą skuteczność wykazuje metoda korekcji asymetrii, z uwagi na to, że ryzyko typu I dla CS jest bliższe standardowej wartości 0,27% niż w przypadku pozostałych metod. Dodatkowo, studium przypadku wyraźnie pokazuje, że CS może być z powodzeniem adaptowalny w przedsiębiorstwach produkcyjnych ze względu na swoją prostą do wykorzystania formę.

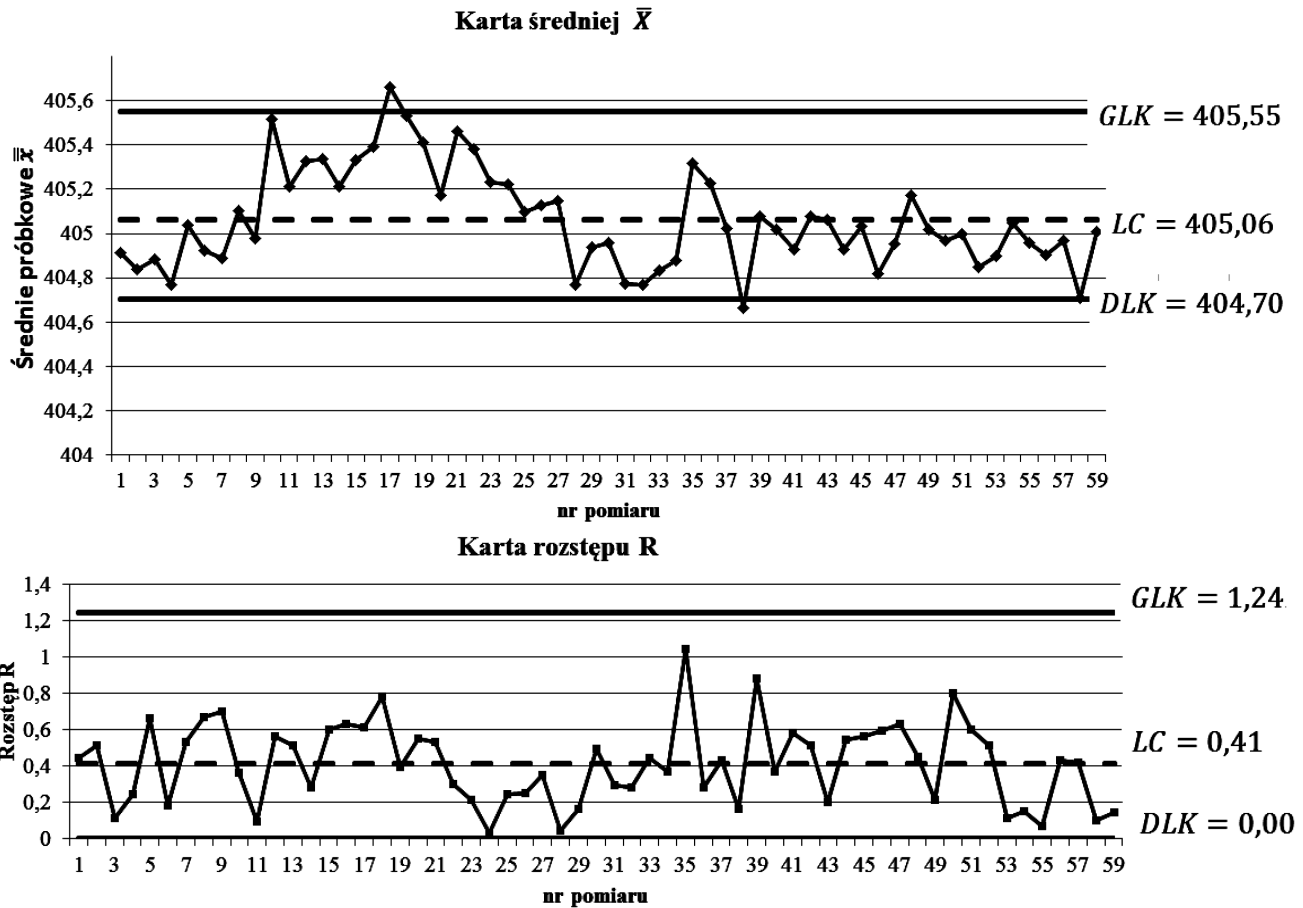
Literatura:

- [1] Bai D.S., Choi I.S., *X and R Control charts for skewed populations*. “Journal of Quality Technology”, 27, 1995, pp. 120-131.
- [2] Betül K., Yazici B., *Individuals control chart in case of non-normality*. “Journal of Modern Applied Statistical Method”, vol. 5, iss. 2, article 28, 2006, pp. 542-550.
- [3] Buthmann A., *Dealing with non-normal data: Strategies and Tools*, dostępny: <http://www.isixsigma.com/tools-templates/normality/dealing-non-normal-data-strategies-and-tools/> [dostęp: 10.11.2014].
- [4] Chan L.K., Cui, H.J., *Skewness correction \bar{X} and R charts for skewed distributions*. “Naval Research Logistics”, 50, pp. 1-19.
- [5] Chang Y.S., Bai S., *Control charts for positively-skewed populations with Weighted Standard Deviation*. “Quality and Reliability Engineering International”, 17, 2001, pp. 397-406.
- [6] Choobineh F., Ballard J. L., *Control-Limits of QC Charts for Skewed Distributions Using Weighted-Variance*. “IEEE transactions on reliability”, vol. R-36, no. 4, 1987, pp. 473-477.
- [7] Greber T., *Statystyczne sterowanie procesami – doskonalenie jakości z pakietem STATISTICA*. Wydawnictwo StatSoft, Kraków 2000.
- [8] Hamrol A., *Strategie i praktyki sprawnego działania*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2015.

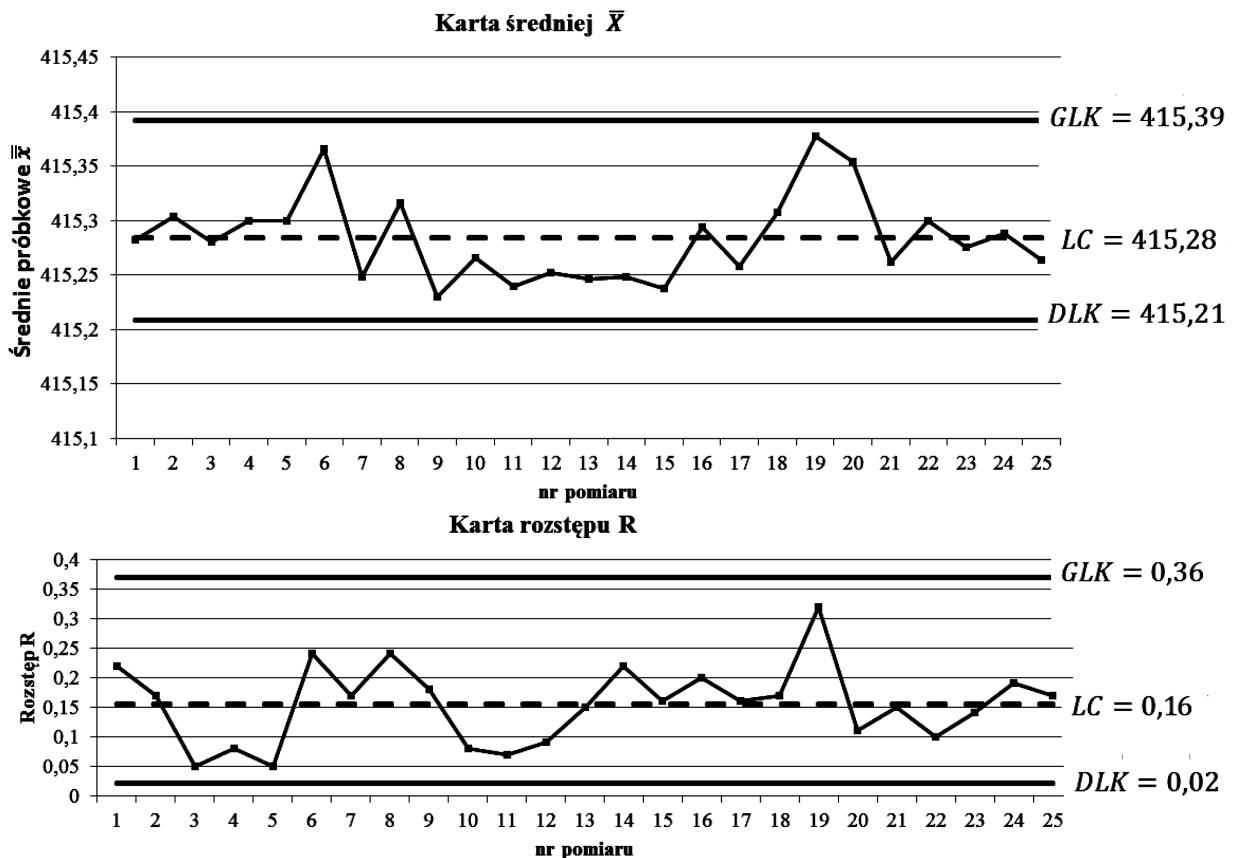
	m	$s_3(\bar{X})$	A^*_g	A^*_d	$s_3(R)$	D^*_4	D^*_3
długość rury po formowaniu	3	0,629	1,1987	0,8742	0,33	3,0373	0,0000
odległość pomiędzy wkrętami elementów na przedniej rurze	5	0,91	0,6971	0,4886	0,32	2,3805	0,1322

Tab. 7. Wartości współczynników A^*_g , A^*_d , D^*_4 , D^*_3 wykorzystywanych do wyznaczenia granic kontrolnych

a)



b)



Rys. 3. Karty kontrolne \bar{X} i R dla a) długość rury po formowaniu, b) odległości pomiędzy wkrętami elementów na przedniej rurze

- [9] Karagöz D., Hamurkaroglu C., *Control Charts for Skewed Distributions: Weibull, Gamma, and Lognormal*. "Metodološki zvezki", vol. 9, no. 2, 2012, pp. 95-106.
- [10] Montgomery D.C., *Introduction to Statistical Quality Control*. John Wiley & Sons, Inc., 6th Edition, New York 2009.
- [11] PN-ISO 8258+AC1: *Karty kontrolne Shewharta*. Polski Komitet Normalizacyjny, Warszawa 1996.
- [12] Rao S.B., Durgamamba A.N., Rao S.R., *Variable control Charts Based on Percentiles Of Size Biased Lomax Distribution*. ProbStat Forum, vol. 7, 2014, pp. 55-64.
- [13] Rao S.B., Kantam R.R.L., *Mean and range charts for skewed distributions – a comparison based on half logistic distribution*. "Pakistan Journal of Statistics", vol. 28(4), 2012, pp. 437-444.
- [14] Rewilak J., *Metoda doboru środków pomiarowych w Statystycznym Sterowaniu Procesem*. Rozprawa doktorska, Kraków 2002.
- [15] Samanta B., Bhattacharjee A., *Problem of non-normality in statistical quality control: a case study in a surface mine*. "The Journal of The South Agrican Institute of Mining and Metallurgy", vol. 104/ 2004, pp. 257-264.
- [16] Schoonhoven M., Does R. J. M. M., *The \bar{X} Control Chart under Non-Normality*. "Quality and Reliability Engineering International", vol. 26, 2010, pp. 167-176.

X AND R CONTROL CHART FOR SKEWED DISTRIBUTION – CASE OF STUDY

Key words:

skewed distribution, control chart, Shewhart control chart, skewed correction method, CS method

Abstract:

To meet the requirements, the products generally should be produced by a process that is stable and repetitive. It is however impossible to produce a certain type of product, in the same company and under the same conditions in such way to produce the get perfect parameters of this product, due to the occurrence of assignable causes. To analyze the stability of the production process (in order to detect assignable causes and statistical process control) used to Shewhart control charts, which are based on the assumption that the distribution of the quality characteristic (so called process distribution) is normal distributed or approximately normal distributed.

However, the review of the literature has shown that in practice, the assumption of normality of many quality characteristics this condition doesn't hold, which in turn affects the improper assessment of the process stability. The most common distributions of measurement data, (beyond the normal) is skewed. For skewed population Type I Risk probabilities grow larger as the skewness increases. In this case four approach are plausible: increase the sample size up to a thousand, ignore skewness and use the classic Shewhart control charts, assume that the population distribution of the population is known and take a charts in accordance

with the distribution or assume that the distribution of the population is not known and the use of heuristic methods. However, the use of one of the first three methods may prove to be uneconomical (e.g. due to the need to incur additional costs) and even result in incorrect assessment of the stability of the process. "Golden middle" in this situation can be heuristic methods, i.e. method of analysis percentiles distribution, variance weighted method or the method of correction of asymmetry, that were briefly described in this paper.

The analysis of heuristic methods allowed for the choice of the least complicated due to the applicability in manufacturing companies. Additionally the studies carried out by the Cahn and Cui, showed that the Type I Risk probabilities of CS method is closer to the standard value of 0.27% than the other presented methods and, therefore, the effectiveness of this approach is much better, so in case study the author used CS method.

The main aim of the paper is determine the control limits for the \bar{X} and R charts based on the skewness correction (SC) method, including the risks associated with incorrect choice of method for determining the control limits. For this purpose, measurement data from a company producing automotive seat frames was analyze. All calculations were made in Statistica and Excel environment.

Mgr Izabela CZABAK-GÓRSKA

Politechnika Opolska

Wydział Inżynierii Produkcji i Logistyki

Institut Innowacyjności Procesów i Produktów

Katedra Inżynierii Jakości Produkcji i Usług

i.czabak-gorska@po.opole.pl