

## Sylwia HOŻEJOWSKA

e-mail: ztpsf@tu.kielce.pl

Katedra Matematyki, Wydział Zarządzania i Modelowania Komputerowego, Politechnika Świętokrzyska, Kielce

## Wyznaczanie dwuwymiarowego pola temperatury wrzącej cieczy w przepływie przez pionowy minikanal

### Wstęp

Postęp technologiczny zmierzający w kierunku miniaturyzacji urządzeń wymusza jednocześnie zachowanie pełnej użyteczności tychże urządzeń. W ten trend wpisują się badania prowadzące do opracowania miniatury wymienników ciepła, które wykorzystując zmianę fazy czynnika chłodniczego dają wysoką gęstość strumienia ciepła przy małej różnicy temperatur między powierzchnią i ogrzewanym czynnikiem chłodniczym.

### Badania eksperymentalne

Eksperymentalna strona zagadnienia, omówiona dalej skrótowo, opisana została dokładniej w [Piasecka, 2013; Piasecka i in., 2012]. Najważniejszym elementem stanowiska badawczego jest moduł pomiarowy z pionowym minikanalem o przekroju prostokąta, przez który przepływa czynnik chłodniczy FC-72. Jedną ze ścian minikanalu stanowi folia grzejna z superstopu Haynes-230 z rozmieszczonymi równomiernie mikro wgłębieniami, wykonanymi techniką laserową. Folia zasilana jest prądem stałym o regulowanym natężeniu. Na folii grzejnej napyłono cienką warstwę termoczułych ciekłych kryształów, które pozwalają otrzymać dwuwymiarowy rozkład temperatury powierzchni. Szybka izoluje folię grzejną od pomieszczenia zewnętrznego. Druga szyba, izolująca minikanal ze strony przeciwnej, umożliwia obserwację struktur przepływu oraz pomiar stopnia zapełnienia. Do minikanalu wpływa pod znanym ciśnieniem ciecz o temperaturze niższej niż temperatura saturacji. W trakcie przepływu przez minikanal ciecz ogrzewana jest przez folię grzejną, której temperatura przekracza znacznie temperaturę saturacji płynu. Przy wylocie z minikanalu mierzona jest temperatura i ciśnienie powstałej mieszaniny. Mierzone jest również napięcie i natężenie prądu w folii grzejnej oraz natężenie przepływu płynu w minikanale.

### Model matematyczny

W modelu matematycznym dla uproszczenia uwzględniono wymiar wzdłuż kierunku przepływu ( $x$ ) oraz wymiar prostopadły do niego ( $y$ ) odnoszący się do szerokości modułu pomiarowego składającego się ze szkła, folii grzewczej i minikanalu z cieczą. Obliczenia numeryczne odnoszą się do centralnej części modułu tak, że zjawiska fizyczne występujące na krawędziach bocznych modułu nie mają wpływu na parametry termodynamiczne w badanym segmencie. Indeksy dolne  $M$ ,  $P$ ,  $F$ ,  $G$  występujące we wzorach w dalszej części pracy odnoszą się odpowiednio do minikanalu, cieczy, folii grzejnej i szkła. Przyjęto, że przepływ cieczy w minikanale jest stacjonarny i laminarny ( $Re = 833$ ) z jedną niezerową składową  $u(y)$  wektora prędkości równoległą do osi minikanalu, którą przybliżono funkcją dachową taką jak w pracy [Hożejowska i in., 2012b].

Założono, że faza ciekła przy wrzeniu pęcherzykowym w minikanale spełnia równanie zachowania energii

$$\Delta T_p = \frac{c_p \rho_p}{\lambda_p} u(y) \frac{\partial T_p}{\partial x} \quad (1)$$

gdzie:

 $\Delta$  – operator Laplace'a, $T$  – temperatura [K], $c$  – ciepło właściwe cieczy [J/(kgK)], $\rho$  – gęstość [kg/m<sup>3</sup>], $\lambda$  – przewodność cieplna [W/(mK)], $u$  – składowa wektora prędkości cieczy [m/s].

Dla równ. (1) zakłada się, że znana jest temperatura cieczy na wlocie i wylocie z minikanalu oraz, że na styku folia-ciecz spełnione są następujące warunki [Bohdal, 2000; Hożejowska i in., 2012a]:

$$-T_p(x, 0) = \begin{cases} T_F(x, 0), & \text{jeśli } T_F(x, 0) < T_{sat}(x) \\ T_{sat}(x), & \text{jeśli } T_F(x, 0) \geq T_{sat}(x) \end{cases} \quad \text{dla } 0 \leq x \leq L \quad (2)$$

$$-\lambda_L \frac{\partial T_p}{\partial y} = \lambda_F [1 - \varphi(x)] \frac{\partial T_F}{\partial y} \quad \text{dla } y = 0 \text{ i } 0 \leq x \leq L \quad (3)$$

gdzie:

 $T_{sat}$  – temperatura saturacji [K], $L$  – wysokość minikanalu [m], $\varphi$  – stopień zapełnienia.

Sposób wyznaczania stopnia zapełnienia został szczegółowo opisany w pracy [Hożejowska i in., 2012b; Piasecka, 2013].

Metodą Trefftza wyznaczono również dwuwymiarowe rozkłady temperatury szkła  $T_G$  oraz folii grzejnej  $T_F$  w sposób opisany szczegółowo w pracy [Hożejowska i in., 2009].

### Metoda Trefftza

Ideą metody Trefftza jest aproksymacja nieznanego rozwiązania równ. (1) kombinacją liniową funkcji Trefftza spełniających to równanie w sposób dokładny. Dla równ. (1), przy założonym dachowym profilu prędkości, wyprowadzono funkcje Trefftza w sposób opisany w [Hożejowska i in., 2012b]. Nieznaną temperaturę cieczy  $T_p$  przybliżono kombinacją liniową nowo wyprowadzonych funkcji Trefftza. Współczynniki kombinacji wyznaczono minimalizując funkcjonal opisujący błąd średniokwadratowy z jakim aproksymata  $T_p$  spełnia założone warunki brzegowe. [Hożejowska i in., 2012b]. Otrzymana w ten sposób aproksymata  $T_p$  spełnia dokładnie równ. (1), zaś przyjęte warunki brzegowe w sposób przybliżony.

W celu weryfikacji wyników otrzymanych metodą Trefftza z nowo wyprowadzonymi funkcjami Trefftza, równ. (1) rozwiązano przyjmując dodatkowe uproszczenie [Madejski, 1998]:

$$\frac{\partial T_p}{\partial x} = \frac{Dq_v \delta_F}{AGc_p} \quad (4)$$

gdzie:

 $\delta$  – grubość folii grzejnej [m], $A$  – pole przekroju minikanalu [m<sup>2</sup>], $D$  – obwód wewnętrzny minikanalu [m], $G$  – strumień masy [kg/(m<sup>2</sup>s)].

Podstawiając równ. (4) do równ. (1) otrzymano równanie, którego rozwiązanie przedstawiono w postaci

$$T_p \approx \sum_{n=0}^M b_n h_n(x, y) + \frac{D\rho_F q_v \delta_F}{AG\lambda_p} \Delta^{-1}[u(y)] \quad (5)$$

gdzie:

 $b_n$  – współczynniki aproksymacji, $h_n$  – wielomiany harmoniczne, $M$  – liczba wielomianów harmonicznych, $\Delta^{-1}$  – operator odwrotny do operatora Laplace'a.

Sposób obliczania  $\Delta^{-1}$  dla jednomianów opisano szczegółowo w pracy [Ciałkowski i in., 2000]. Współczynniki  $b_n$  obliczono minimalizując funkcjonal błędów, który jak poprzednio określa błąd średniokwadratowy, z jakim aproksymata (5) spełnia przyjęte warunki brzegowe.

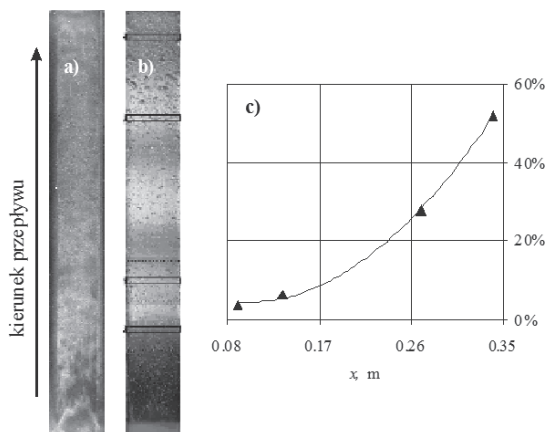
Prezentowane dwa podejścia numerycznego wyznaczania aproksymaty temperatury cieczy prowadzą do rozwiązania zagadnienia odwrotnego w cieczy.

W pracy [Hożejowska i in., 2012a] wyprowadzono funkcje Trefftza dla równania zachowania energii przy parabolicznym profilu prędkości.

Funkcje te zastosowano do wyznaczenia temperatury cieczy przy wrzeniu pęcherzykowym i pęcherzykowo-korkowym.

### Wyniki

Wyniki numeryczne otrzymano dla danych eksperymentalnych zamieszczonych w pracy [Piasecka, 2013]. Na rys. 1 pokazano obraz folii grzejnej zarejestrowany metodą ciekłokrystaliczną (Rys. 1a) oraz odpowiadające im struktury przepływu (Rys. 1b). Stopień zapełnienia wyznaczony w punktach o współrzędnych 0,09 m; 0,133 m; 0,27 m; 0,34 m, widocznych na rys. 1b, aproksymowano funkcją kwadratową (Rys. 1c). Liczba funkcji *Trefflta* i wielomianów harmonicznych użyta do wyznaczenia aproksymat była tak dobrana, aby aproksymaty  $T_G$ ,  $T_F$  i  $T_p$  były tego samego stopnia.

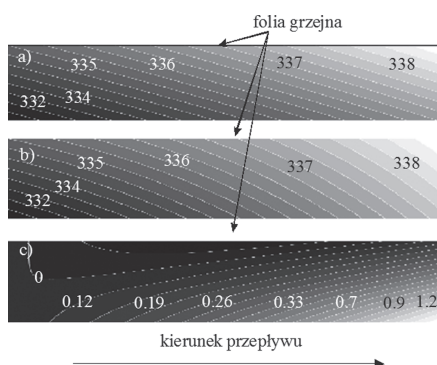


Rys. 1. a) Rozkład temperatury folii dla danych eksperymentalnych:  $Re = 833$ ,  $L = 0,35$  m,  $\delta = 0,001$  m,  $G = 229$  kg/(m<sup>2</sup>s),  $q_v = 2,56 \cdot 10^5$  kW/m<sup>3</sup>, b) struktury przepływu, c) stopień zapełnienia w funkcji długości minikanalu

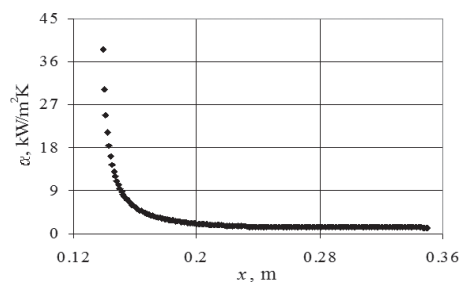
W pierwszej kolejności obliczono temperaturę szkła  $T_G$  oraz folii grzejnej  $T_F$  rozwiązując odpowiednio zagadnienie proste i odwrotne przewodnictwa ciepła. Następnie wyznaczono temperaturę cieczy  $T_p$  wykorzystując między innymi eksperymentalnie wyznaczony stopień zapełnienia oraz wyliczoną wcześniej temperaturę folii grzejnej. Dwuwymiarowe pole temperatury płynu wyznaczone opisanymi dwoma sposobami (metodą *Trefflta* oraz metodą *Trefflta* połączoną z metodą operacji odwrotnych) przedstawiono na rys. 2. Oba podejścia dają bardzo zbliżone wyniki. Największe różnice, rzędu 1 K, między aproksymatami temperatury cieczy otrzymanymi dwoma sposobami, są od strony szyby izolującej minikanal od pomieszczenia zewnętrznego, przy wylocie z minikanalu (Rys. 2c). Wynika to z faktu, że wyznaczenie temperatury cieczy w minikanale prowadziło do rozwiązania zagadnienia odwrotnego, bowiem od strony szyby izolującej nie przyjęto żadnego warunku dla cieczy.

Znajomość ciągłych rozkładów temperatury folii oraz cieczy pozwala wyznaczyć współczynnik przejmowania ciepła na styku folia grzejna – ciecz z warunku

$$-\lambda_F \frac{\partial T_F(x,0)}{\partial y} = \alpha(x)[T_F(x,0) - T_{ave}(x)] \quad (6)$$



Rys. 2. Dwuwymiarowy rozkład temperatury cieczy w minikanale wyliczony: a) metodą *Trefflta*, b) ze wzoru (5), c) różnica między temperaturą płynu obliczoną metodą *Trefflta* i ze wzoru (5)



Rys. 3. Współczynnik przejmowania ciepła na styku folia grzejna – ciecz w funkcji długości minikanalu

gdzie średnią temperaturę cieczy  $T_{ave}(x) = \frac{1}{0,5\delta_M} \int_0^{0,5\delta_M} T_p(x,y) dy$

obliczoną dla temperatury cieczy  $T_p$  wyznaczonej metodą *Trefflta* przyjęto jako temperaturę odniesienia. Na rys. 3 przedstawiono współczynnik przejmowania ciepła policzony ze wzoru (6).

Rozwojowi wrzenia pęcherzykowego towarzyszy wzrost stopnia zapełnienia, co powoduje spadek wartości współczynnika przejmowania ciepła (Rys. 3).

### Wnioski

W pracy zastosowano metodę *Trefflta* do modelowania przepływu laminarnego cieczy przy wrzeniu rozwiniętym w asymetrycznie ogrzewanym minikanale o przekroju prostokąta. W tym celu dla równania zachowania energii, odnoszącego się jedynie dla fazy ciekłej, wyprowadzono funkcje *Trefflta* przy dachowym profilu prędkości cieczy.

Temperaturę wrzącej cieczy wyznaczono rozwiązując równoległe zagadnienie odwrotne w folii grzejnej oraz cieczy. Wyniki porównano z uproszczonym modelem, gdzie rozwiązanie metodą *Trefflta* z użyciem funkcji harmonicznych połączono z metodą operacji odwrotnych. Obie zaproponowane metody wyznaczenia temperatury cieczy dają bardzo zbliżone wyniki.

Proponowane podejście może być zastosowane do wyznaczenia dwuwymiarowego pola temperatury, strumienia ciepła oraz współczynnika przejmowania ciepła w zagadnieniach prostych i odwrotnych w dwufazowym przepływie w zwartych wymiennikach ciepła.

Zaproponowane sposoby rozwiązywania zagadnień odwrotnych w cieczach dały pozytywne efekty. Dalsze prace ukierunkowano na zastosowanie metody *Trefflta* do wyznaczania temperatury fazy ciekłej, gazowej oraz ich mieszaniny w przepływach dwufazowych dla bardziej skomplikowanych modeli niż przedstawiono to w niniejszej pracy.

### LITERATURA

- Bohdal T., 2000. Modeling the process of bubble boiling on flows. *Archives of Thermodynamics*, **21**, 34-75
- Ciałkowski M.J., Frąckowiak A., 2000. *Funkcje cieplne i ich zastosowanie do rozwiązywania zagadnień przewodzenia ciepła i mechaniki*. Wyd. Pol. Poznańskiej
- Hożejowska S., Piasecka M., Hożejowski L., 2012b. *Trefflta method for solving two-dimensional temperature field of boiling fluid flowing along the minichannel* [in:] Proc. of Int. Conf. on Experimental Fluid Mechanics 2012, Hradec Kralove, Czech Republic, 20-23.11.2012, 268-274
- Hożejowska S., Piasecka M., Poniewski M.E., 2009. Boiling heat transfer in vertical minichannels. Liquid crystal experiments and numerical investigations. *Int. J. Thermal Sciences*, **48**, 1049-1059. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2008.11.013
- Hożejowska S., Poniewski M.E., 2012a. *Application of the Trefflta method for determining the temperature field of the flowing boiling liquid in a minichannel* [in:] Proc. of the 3<sup>rd</sup> Int. Conf. on Contemporary Problems of Thermal Engineering CPOTE, Gliwice, 18-20.09.2012, CD-No. 20
- Madejski J., 1998. *Teoria wymiany ciepła*, Wyd. Pol. Szczecińskiej
- Piasecka M., 2013. The use of enhanced surface in flow boiling heat transfer in a rectangular minichannels. *Experimental Heat Transfer* (w druku)
- Piasecka M., Hożejowska M., Poniewski M.E., 2004. Experimental evaluation of flow boiling incipience of subcooled fluid in a narrow channel. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, **25**, 159-172. DOI: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2003.11.017
- Piasecka, M., Maciejewska, B. 2012. The study of boiling heat transfer in vertically and horizontally oriented rectangular minichannels and the solution to the inverse heat transfer problem with the use of the Beck method and *Trefflta* functions. *Experimental Thermal and Fluid Science*, **38**, 19-32. DOI: 10.1016/j.exptthermflusci.2011.11.002