

ARYTMETYKA FINANSOWA DLA STUDENTÓW WYDZIAŁÓW INŻYNIERSKICH POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ. DOŚWIADCZENIA PO DWÓCH LATACH PROWADZENIA PRZEDMIOTU

Renata DŁUGOSZ ¹, Monika LINDNER ²

1. Centrum Nauczania Matematyki i Fizyki Politechniki Łódzkiej
tel.: (42) 6313620 e-mail: renata.dlugosz@p.lodz.pl
2. Centrum Nauczania Matematyki i Fizyki Politechniki Łódzkiej
tel.: (42) 6313620 e-mail: monika.lindner@p.lodz.pl

Streszczenie: W artykule omówiono doświadczenia z dwóch lat prowadzenia przedmiotu „Arytmetyka finansowa” dla studentów wybranych kierunków na Wydziale Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska Politechniki Łódzkiej. Przedstawiono trudności i pomysły na ich przezwyciężenie, przede wszystkim w kontekście pracy zdalnej. Podano sposoby motywowania studentów pokolenia Z (ery cyfrowej) do aktywnego udziału w procesie zdalnego uczenia się.

Słowa kluczowe: arytmetyka finansowa, nauka zdalna, Excel.

1. WPROWADZENIE

Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska Politechniki Łódzkiej kształci studentów na czterech kierunkach: Architektura, Budownictwo, Sieci i Instalacje w Inżynierii Środowiska (od 2021 roku Inżynieria środowiska w budownictwie) oraz Planowanie Przestrzenne. Wydziałowi zależy na kształceniu specjalistów, którzy bez problemów znajdą pracę lub założą własną firmę i będą bezkonkurencyjni w swojej dziedzinie. Uczelnia od wielu lat analizując sytuację gospodarczą stara się dostosować swoją ofertę do oczekiwań zarówno studentów jak i pracodawców. Zespół ekspertów tworzących programy z matematyki od roku 2019 dla II semestru studiów I-go stopnia zaproponował dla uczelni szeroki wybór modułów. Wśród nich znalazła się Matematyka ekonomiczna oraz Statystyka.

Według danych zebranych w ankietach z Biura Karier Politechniki Łódzkiej z ostatnich 5 lat średnio 55% absolwentów uczelni chce założyć w przyszłości własną firmę. Ankiety wypełniane były drogą elektroniczną i zbierane przez Elektroniczny System Badania Losów Zawodowych Absolwentów Politechniki Łódzkiej.

Tabela 1. Zestawienie danych z Biura Karier PŁ

Rok	Liczba absolwentów zarejestrowanych ogółem	Liczba wypełnionych ankiet	Absolwenci chcący założyć działalność gospodarczą liczbowo [%]
2020	1980	1523	838 (55%)
2019	2217	1656	923 (56%)
2018	2353	1863	991 (53%)
2017	2412	1917	1090 (57%)
2016	2341	1901	1070 (56%)

Studenci w ankietach deklarowali między innymi otwarcie biur architektonicznych, geodezyjnych i konstrukcyjnych. Stąd też władze kierunku Sieci i Instalacje w Inżynierii Środowiska oraz Planowania Przestrzennego postawiły od 2020 roku w semestrze II na Statystykę i Arytmetykę Finansową (wcześniej Matematyka Finansowa na Politechnice Łódzkiej była wykładana tylko na kierunku Matematyka Stosowana oraz na Wydziale Zarządzania i Inżynierii Produkcji), by absolwenci tych kierunków na początku kariery zawodowej byli dobrze przygotowani do prowadzenia swojej działalności gospodarczej i nie musieli zatrudniać (przynajmniej na początek) doradców finansowych. Jak również po to, by studenci inwestując pieniądze lub planując w przyszłości zaciągnąć kredyt lub pożyczkę mogli podejmować najlepsze decyzje. Oba przedmioty są ze sobą powiązane, ponieważ zmienna losowa jest ważnym narzędziem przy wycenie instrumentów finansowych, szczególnie instrumentów pochodnych. Wiadomo, że [1] pierwszy model losowy (czyli stochastyczny) wyceny instrumentów finansowych na giełdzie paryskiej został zaproponowany przez Louisa Bacheliera w pracy doktorskiej zatytułowanej *Théorie de la spéculation*, obronionej 29 marca 1900 roku.

Przejdźmy do doświadczeń po dwóch latach prowadzenia Arytmetyki Finansowej na obu wcześniej wspomnianych kierunkach.

2. ORGANIZACJA PRZEDMIOTU

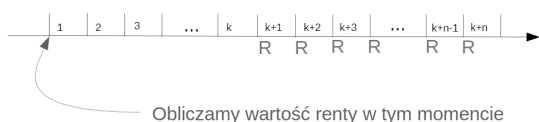
Przedmiot był realizowany w formie wykładu i ćwiczeń. Na obu kierunkach wykład zajmował 45 min. tygodniowo. Ćwiczenia były realizowane w wymiarze tygodniowym 90 min. (na kierunku Sieci i Instalacje) oraz 45 min. (na kierunku Planowanie Przestrzenne). W rezultacie nacisk położono głównie na zastosowania, a teoria była prezentowana na wykładzie w minimalnym zakresie koniecznym do rozumienia i budowy modeli. Ćwiczenia poświęcone były rozwiązywaniu zadań i problemów. Zgodnie z efektami uczenia się dla kierunku studiów pierwszego stopnia Sieci i Instalacje w Inżynierii Środowiska (patrz [2]) realizowane były następujące treści programowe: teoria oprocentowania, obliczanie wartości obecnej i przyszłej strumieni pieniężnych, wyznaczanie stopy nominalnej, stopy efektywnej, stopy dyskontowej,

równoważnych stóp procentowych i dyskontowych, obliczanie czasu trwania lokaty przy różnych rodzajach oprocentowania (prostym, składanym, ciągłym), renty kapitałowe, obliczanie wartości obecnej i skumulowanej, obliczanie wysokości raty, wyznaczanie czasu trwania różnych rodzajów rent kapitałowych, spłata pożyczek i kredytów. Wyznaczanie wysokości raty kapitału, obliczanie raty odsetek i bieżącego długu, całkowitego oprocentowania oraz kosztu kredytu przy różnych metodach jego spłaty. Wycena obligacji, obliczanie kwoty kuponu, wycena akcji, obliczanie ceny akcji o stałych dywidendach. Obliczanie ceny akcji o zmiennych dywidendach. Na kierunku Planowanie Przestrzenne ze względu na mniejszą liczbę godzin nie poruszono tematu instrumentów finansowych. Wykład najczęściej rozpoczynał się od przedstawienia teorii, kolejno omawiane były stosowane metody i wzory. Mnogość wzorów pojawiających się na wykładzie przerażała studentów, stąd dla ich prawidłowego zrozumienia podawane były liczne przykłady, również w Excelu, pokazujące praktyczne sposoby wykorzystania omawianej problematyki.

Po zajęciach synchronicznych wykład był udostępniany jako plik w formacie pdf na platformie zdalnego nauczania. Cyklicznie umieszczane były również arkusze zadań. Zadania były rozwiązywane wspólnie przez studentów w trakcie ćwiczeń oraz samodzielnie. Studenci zainteresowani omawianą problematyką mogli poszerzyć swoje wiadomości korzystając z konsultacji, podręczników do Matematyki Finansowej a także Internetu. W celu ujednoczenia terminologii i oznaczeń na wykładzie podana została literatura [3] i [4].

3. OBA KURSY W TRAKCIE PANDEMII

W marcu 2020 roku rozpoczął się semestr, w którym po raz pierwszy miałyśmy poprowadzić zajęcia z Arytmetyki Finansowej na obu kierunkach. Zaplanowane metody i formy pracy musiały ulec zmianie w sytuacji zdalnego nauczania. Już trzeci wykład odbył się synchronicznie w trybie zdalnym w formie webinarium, ćwiczenia zaś na Teams lub w Webpokojach. Doświadczenia z pierwszego kursu opisałyśmy w artykule [5]. Niestety kolejny kurs z Matematyki Finansowej również odbył się zdalnie. Korzystając z doświadczeń po pierwszym kursie, do drugiego mogłyśmy się lepiej przygotować. Przede wszystkim miałyśmy bardzo dobrze opanowane platformy do nauczania zdalnego. W poprzednim roku większość zadań było wstępnie rozwiązanych, a na zajęciach tylko je omawiano. W tym każdy student miał dostęp do edytowalnej tablicy i to studenci rozwiązywali zadania na forum. Ponieważ dysponowałyśmy już wieloma materiałami dydaktycznymi w formie pdf, wystarczyło je ulepszać. Tu pomocna była opinia studentów z poprzedniego kursu. Zagadnienia związane z wpłatami „z dołu” lub „z góry”, zgodnych z okresem kapitalizacji lub nie, rentami, planami spłaty długu czy obliczenia dotyczące dyskontowania weksli tłumaczyłyśmy z wykorzystaniem osi czasu.



Od pierwszych zajęć kładłyśmy nacisk na znaczenie czasu w ocenie efektywności inwestycji. Sporządzanie osi

czasu praktycznie przy każdym zadaniu ułatwiało jego rozwiązanie.

4. METODY NAUCZANIA I FORMY PRACY

Według nas nauczanie zdalne jest skuteczne, gdy jest synchroniczne oraz zarówno nauczyciel i student w równym stopniu zainteresowani są osiągnięciem wyznaczonych zadań programowych. Jeżeli student nie bierze świadomego i aktywnego udziału w procesie nauczania, to następstwem tego jest brak zrozumienia przedmiotu. Student niezadający sobie sprawy z celu poszczególnych rozważań matematycznych uczy się mechanicznego wykonania pewnych działań. Takie postępowanie prowadzi do tego, że student może opanować w większym lub mniejszym stopniu wykładany materiał bez świadomości celu i sensu działań [6]. Chcąc temu zapobiec musiałyśmy trafnie wybrać odpowiednie metody nauczania, zwłaszcza w kontekście pracy zdalnej. Uczestnicy zajęć siedzieli przy komputerach z dostępem do Excela. W rezultacie wybrane zajęcia można było prowadzić metodą praktyczną. Z jednej strony pozwalało to na przeprowadzanie rachunków w rzeczywistej skali. (Na przykład rozpisac plan spłaty długu na 5 lat. Korzystając z kredy i tablicy ograniczylibyśmy się raczej do rozliczenia kilku pierwszych rat.)

Z drugiej strony dużą część zadań można było rozwiązać na wiele sposobów. Przykładowo zadanie

Podać obecną wartość renty złożonej z ośmiu płatności po 200zł płatnych na koniec każdego miesiąca, przy miesięcznej efektywnej stopie procentowej wynoszącej 0,3%

można było:

1. Rozwiązać wprost ze wzoru podanego i wyprowadzonego na wykładzie:

$$A = R \frac{1 - v^n}{i} = Ra_{\ddot{n}|i}$$

gdzie R , v , i oraz n oznaczają odpowiednio wysokość raty, czynnik dyskontujący, efektywną stopę procentową odpowiednią do okresu oraz liczbę okresów.

2. Rozwiązać siłowo przy użyciu Excela poprzez zdyskontowanie kolejnych płatności do chwili obecnej i zsumowanie wyników:

	nr	rata	zdyskontowana
stopa 0,003	1	200	199,4017946
	2	200	198,8053785
	3	200	198,2107462
wsp. dyskontujący 0,997008973	4	200	197,6178926
	5	200	197,0268121
	6	200	196,4374996
	7	200	195,8499498
	8	200	195,2641573
SUMA			1578,61

3. Rozwiązać korzystając z gotowej funkcji Excela:
=PV(0,003; 8; -200)

Fakt, że trzy sposoby dają ten sam wynik jest bardziej przekonujący dla studentów niż wyprowadzenie wzoru w oparciu o sumę ciągu geometrycznego i daje im pewną satysfakcję.

Korzystanie z Excela podczas zajęć przynosiło wiele korzyści:

1. Studenci uzyskiwali takie same wyniki, a nie podobne jak przy użyciu kalkulatora.

2. Zwiększyła się liczba zadań rozwiązywanych na zajęciach. I tak np. zamiast 5 zadań rozwiązanych podczas jednego spotkania w ubiegłym roku dotyczącego kredytów krótkoterminowych, w tym roku takich zadań z użyciem arkusza kalkulacyjnego rozwiązano 8, w tym niektóre z podpunktami. Poniżej podajemy przykładowe zadanie:

Kredyt w wysokości 87000 zł ma być spłacony w ciągu 3 lat w trzech ratach rocznych z dołu z efektywną stopą procentową $i = 6,5\%$. Podaj plan spłaty długu dla
a) płatności malejących (równych rat kapitałowych),
b) równych płatności (równych rat kapitałowo odsetkowych).

Rozwiązanie a)

s	87000				
i	6,50%				
k	29000				

Nr	S_{n-1}	Odsetki I_n	Rata całkowita P_n	Rata kapitałowa K_n	Zadłużenie S_n
1	87000,00	5655	34655	29000	58000,00
2	58000,00	3770	32770	29000	29000,00
3	29000,00	1885	30885	29000	0,00
RAZEM		11310	98310	87000	

(tabela jest wypełniana zgodnie z regułą:
 $K_n + I_n = P_n$, $S_n = S_{n-1} - K_n$, $I_n = S_{n-1} * i$)

Rozwiązanie b)

Obliczamy ile powinna wynosić taka rata. Dług 87000 traktujemy jak wartość obecną A renty o stałych płatnościach płatnej z dołu przy stopie i

$v = 0,938967$ $R = (87000 \cdot i) \cdot (1 - v^3) = 32849,08607$

Nr	S_{n-1}	Odsetki I_n	Rata całkowita P_n	Rata kapitałowa K_n	Zadłużenie S_n
1	87000,00	5655,00	32849,09	27194,09	59805,91
2	59805,91	3887,38	32849,09	28961,70	30844,21
3	30844,21	2004,87	32849,09	30844,21	0,00
RAZEM		11547,26	98547,26	87000,00	

(tabela jest wypełniana zgodnie z regułą:
 $I_n = S_{n-1} * i$, $K_n = P_n - I_n$, $S_n = S_{n-1} - K_n$)

3. Studenci poznali i stosowali między innymi funkcje finansowe w Excelu takie jak:

a) FV, która oblicza wartość przyszłą inwestycji przy założeniu stałych płatności (rata), danej wartości aktualnej i stałej stopie procentowej (stopa).

b) PV, zwracająca wartość bieżącą inwestycji, która jest całkowitą sumą bieżącej wartości szeregu przyszłych płatności (całkowita obecna wartość przyszłych płatności).

c) PMT, która oblicza ratę w zależności od stopy, okresu spłaty, wysokości inwestycji.

d) RATE, która oblicza wielkość stopy procentowej.

e) IRR, która oblicza wewnętrzną stopę zwrotu z inwestycji.

Prowadząc zajęcia starałyśmy się przynajmniej część problemów zakotwiczyć w doświadczeniu słuchaczy.

W szczególności liczyliśmy RRSO dla kredytów konsumenckich oraz obliczaliśmy wartość netto inwestycji (NPV) dla przykładowych startupów, które studenci mogliby założyć. W tym ostatnim przypadku trudnością dla uczniów okazało się pojęcie oczekiwanej stopy zwrotu.

Nie pomagała tu aktualna sytuacja ekonomiczna – obecnie stopy procentowe są ogólnie rekordowo niskie (a w pewnych sytuacjach – ujemne), co sprawia, że część zadań w nowych dekoracjach wychodzi mało spektakularnie. Chcąc prowadzić zajęcia blisko aktualnego doświadczenia zamierzamy w przyszłym roku większy nacisk położyć na wpływ inflacji na inwestycje kapitałowe.

Inną formą aktywizacji studentów była praca metodą projektu dotyczącego obliczania NPV (wartości obecnej

netto). Wybór projektu nie był przypadkowy. Wartość bieżąca netto (NPV) jest metodą dynamiczną, służącą ocenie efektywności ekonomicznej inwestycji a więc bardzo przydatna przy prowadzeniu własnej działalności gospodarczej. Studenci w maksymalnie trzysobowych grupach mieli za zadanie zaprojektować hipotetyczną inwestycję, która miałaby być realizowana przez co najmniej 5 okresów. Nakłady inwestycyjne, stopa dyskonta oraz strumienie przychodów pieniężnych miały być dowolne (ale realistyczne). Dodatkowym zadaniem było podsumowanie opłacalności inwestycji oraz sformułowanie wniosków dotyczących ulepszenia projektu. Praca metodą projektu to strategia dydaktyczna, która łączy w sobie wiele technik, dlatego kalkulacje miały być przeprowadzone ręcznie oraz w arkuszu kalkulacyjnym Excel. Studenci musieli przygotowane wcześniej projekty zaprezentować na zajęciach. Projekt nie był bardzo skomplikowany, dlatego studenci na przygotowanie mieli tydzień. Projekt w tym semestrze potraktowaliśmy jako próbę do włączenia tej formy pracy ze studentami jako stałego elementu nauczania na tym przedmiocie. Dlatego w tym roku było to zadanie dla chętnych. Motywacją do udziału w projekcie było podwyższenie o jeden stopień oceny z zadania dotyczącego obliczania NPV. Projekty przygotowała i omówiła jedna czwarta studentów roku. Studenci zaproponowali wiele różnych inwestycji. Rozważali różne warianty kredytów, przy różnej wymaganej stopie zwrotu z uwzględnieniem inflacji lub bez. W ten sposób przekazali pozostałym studentom dużo praktycznej wiedzy. Zajęcia, na których omawiane były projekty okazały się bardzo ciekawe, umiejętności obliczania NPV zostały wyćwiczone (również w Excelu) i efektywnie utrwalone, co pokazały wyniki kolokwium.

5. PORÓWNANIE WERYFIKACJI

Przejdźmy do weryfikacji efektów uczenia się. Okazała się ona najłagodniejszym elementem zdalnego nauczania po pierwszym roku (patrz [4]). Przypomnijmy, że w roku poprzednim wszystkie kolokwia przeprowadziłyśmy na koniec semestru w formie testu na platformie Wikamp. Zgodnie z warunkami uzyskania zaliczenia zajęć, zamieszczonymi w Karcie warunków realizacji przedmiotu dla obu kierunków [5], studenci musieli uzyskać pozytywne oceny z każdego z zadań na kolokwium.

Zakres pierwszego kolokwium dla obu kierunków obejmował obliczanie wartości obecnej i przyszłej strumieni pieniężnych, wyznaczanie stopy nominalnej, stopy efektywnej, stopy dyskontowej, równoważnych stóp procentowych i dyskontowych, obliczanie czasu trwania lokaty przy różnych rodzajach oprocentowania (prostym, składanym, ciągłym), renty kapitałowe, obliczanie wartości obecnej i skumulowanej, obliczanie wysokości raty. Natomiast drugie kolokwium dla Kierunku Planowania Przerzennego zawierało zadania dotyczące spłaty pożyczek i kredytów, wyznaczania wysokości raty kapitału, obliczania raty odsetek i bieżącego długu, całkowitego oprocentowania oraz kosztu kredytu przy różnych metodach jego spłaty. Dla kierunku Sieci i Instalacje drugie kolokwium zostało poszerzone o zagadnienia dotyczące wyceny akcji i obligacji.

Studenci mieli do rozwiązania razem 6 zadań wielokrotnego wyboru i mogli rozwiązywać w zależności od stopnia trudności: na ocenę 3 zadania łatwiejsze z podpunktu a oraz na wyższą oceną - z podpunktu b.

Ponieważ na przygotowanie testów wszystkich terminów zaliczeń miałyśmy mało czasu, a taka forma sprawdzania wiedzy była dla nas nowością, zadania były mało rozbudowane technicznie.

W bieżącym roku akademickim wiadomo było od samego początku, w jaki sposób sprawdzana będzie wiedza studentów. W rezultacie można było systematycznie rozbudowywać bazę zadań testowych. Tym razem do każdego testu (zadania) przygotowaliśmy już po kilkanaście zadań bardziej rozbudowanych technicznie. (zadania z podpunktów b zawierały po kilkanaście odpowiedzi). Prawdopodobieństwo powtórzenia się zadania u studentów zmniejszyło się znacząco. Czy i jak to wpłynęło na wyniki zaliczenia testów? Czy na podstawie zestawienia procentowego zaliczenia przez studentów poszczególnych zadań w pierwszym terminie dla obu kursów można wyciągnąć jakieś wnioski? Przyjrzyjmy się poniższej tabeli.

Tabela 2: Porównanie zaliczeń w kolejnych latach

Zagadnienie	Zaliczenie rok 19/20	Zaliczenie rok 20/21
Wartość pieniądza w czasie	91%	86%
Równoważność stóp procentowych i dyskontowych	64%	72%
Renty	77%	72%
Spląty długów	73%	59%
NPV, IRR, RRSO	68%	78%
Instrumenty finansowe	64%	84%

Trudno odpowiedzieć na powyższe pytania, gdy do końca nie jesteśmy przekonane o samodzielności w rozwiązywaniu zadań. Przydział studentów nawet do kilku wirtualnych pokoi, w których pisali kolokwia przy włączonych kamerkach pod naszą obserwacją, nie daje 100% pewności ich uczciwości.

6. WNIOSKI DO DALSZEJ PRACY

W dzisiejszych czasach studenci mają coraz wyższe wymagania względem zajęć. Stąd - my nauczyciele musimy

aktualizować swoją wiedzę oraz sposoby jej przekazywania z wykorzystaniem nowych metod nauczania, w szczególności nowoczesnych technologii, które spełnią oczekiwania studentów. W następnych kursach z Arytmetyki Finansowej będziemy nadal:

- realizować treści programowe podczas zajęć (wykłady i ćwiczenia) oraz poprzez prace własne studentów,
- rozwiązywać zadania z użyciem arkusza kalkulacyjnego,
- do tematów lub zagadnień realizowanych przez studentów w ramach pracy samodzielnej podawać wskazówki dotyczące tematu, treści zadań, problemów lub projektów, odnośniki do literatury, artykuły, opracowania,
- w miarę możliwości czasowych organizować odpowiedzi na pytania oraz dyskusje na interesujące studentów tematy lub problemy.

oraz postaramy się:

- zwiększać liczbę samodzielnych krótkich projektów w tym *case study*,
- angażować wszystkich studentów do udziału w projektach, dlatego do oceny końcowej z ćwiczeń brać oceny z wagami odpowiednio: z kolokwium z 70% z obowiązkowego projektu 20% oraz za aktywność 10%.

7. BIBLIOGRAFIA

- Grała - Michalak J. Stochastyczne metody matematyki finansowej w zadaniach, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2016.
- Politechnika Łódzka. Programy studiów. <https://programy.p.lodz.pl>.
- Kellison S. G.: The theory of interest, Second Edition 1991.
- Jajuga K., Jajuga T. Inwestycje; PWN, Warszawa, 2006.
- Długosz R., Lindner M.: Zwycięstwo technik synchronicznych, Forum Akademickie 9/2020.
- Rabijewska B.: Wprowadzenie do wybranych zagadnień dydaktyki matematyki, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 1980.

FINANCIAL ARITHMETIC FOR STUDENTS OF ENGINEERING DEPARTMENTS OF THE LODZ UNIVERSITY OF TECHNOLOGY. EXPERIENCE AFTER TWO YEARS OF TEACHING THE COURSE

In the article the experience of two years of teaching the "Financial Arithmetic" course for students of selected faculties at the Faculty of Civil Engineering, Architecture and Environmental Engineering of the Łódź University of Technology is discussed. The authors were teaching this subject for two consecutive years. Due to the pandemic, the learning was conducted remotely. This resulted in many additional difficulties, including keeping students engaged and fair verification of their achievements. On the other hand, the fact that each of the students had their own computer with an accessible spreadsheet let the teachers to expand the practical part significantly. In the article difficulties and ideas for overcoming them were presented, mainly in the context of remote work. Some ways of motivating students of "Z generation" to actively participate in the process were given. Between them the project of the construction of student's own business plan was tested and described. The last part of the article presents plans for future improvements.

Keywords: financial arithmetic, remote education, Excel.