

Analiza skuteczności wyznaczania poziomej krzywizny osi toru z wykorzystaniem ruchomej cięciwy

Władysław KOC¹

Streszczenie

W artykule podjęto zagadnienie wyznaczania krzywizny poziomej toru kolejowego, zwracając uwagę, że najczęściej odbywa się to w sposób pośredni – na podstawie strzałek pomierzonych od cięciwy rozciągniętej wzdłuż toru. Dalsze wykorzystanie tej metody nie miałyby uzasadnienia, gdyby istniała metoda bezpośredniego wyznaczania krzywizny. Przedstawiono więc założenia nowej metody wyznaczania krzywizny poziomej opisanej w „Archives of Civil Engineering”, iss. 4/2020. Podstawę tej metody stanowią zmiany kątów nachylenia ruchomej cięciwy w kartezjańskim układzie współrzędnych. Podjęto dwie istotne kwestie szczegółowe: wpływu długości cięciwy na uzyskiwane wartości krzywizny oraz możliwości określania położenia punktów granicznych pomiędzy poszczególnymi elementami geometrycznymi. Analizowane warianty wynikały z rodzaju zastosowanych krzywych przejściowych. Stwierdzono, że długość cięciwy nie odgrywa istotnej roli przy wyznaczaniu krzywizny i nie stwarza ograniczeń w stosowaniu opisanej metody. Jednocześnie zwrócono uwagę na precyzję określenia charakteru krzywizny oraz zgodność z przebiegiem teoretycznym na krzywych przejściowych. Z analizy wynika, że w metodzie ruchomej cięciwy określenie położenia punktów granicznych pomiędzy poszczególnymi elementami geometrycznymi jest możliwe, przy czym wymagana długość cięciwy musi być dostosowana do rodzaju krzywej przejściowej.

Słowa kluczowe: droga kolejowa, krzywizna pozioma, ruchoma cięciwa, metodyka pomiarów

1. Wprowadzenie

Określanie i ocena kształtu osi toru w płaszczyźnie poziomej decyduje o możliwej do uzyskania prędkości jazdy pociągów. Operacja ta polega na wyznaczeniu podstawowych parametrów geometrycznych trasy: położenia oraz długości odcinków prostych, położenia łuków kołowych wraz z określeniem ich promienia i długości oraz położenia krzywych przejściowych wraz z określeniem ich rodzaju i długości.

Zasady przeprowadzania odpowiednich pomiarów są podobne w różnych zarządach kolejowych [3, 5–7, 22–24]. Stosowane metody mają bardzo długą tradycję i chociaż podlegają różnym innowacjom, cechuje je duża pracochłonność i związana z tym konieczność ponoszenia znacznych nakładów finansowych. Radykalną poprawę istniejącej sytuacji powinna zapewnić rozwijana w Polsce od ponad 10 lat metoda mobilnych pomiarów satelitarnych [13–18, 27–30]. W wyniku pomiarów otrzymuje się zestaw danych liczbowych, które po odpowiedniej obróbce tworzą zbiór współrzędnych w odpowiednim układzie kartezjańskim; w Polsce jest to państwowy układ

odniesień przestrzennych PL-2000 [26]. Celem realizowanego obecnie projektu badawczego BRIK [4, 33] jest uzyskanie rozwiązania wdrożeniowego.

Skoro problem wyznaczenia współrzędnych trasy został już rozwiązany, to obecnie kluczową kwestią jest identyfikacja występujących elementów geometrycznych. Stosowana w tym celu metoda opiera się na tzw. wykresie krzywizn [9, 21], który jest najczęściej wykorzystywanym narzędziem przyporządkowania punktów toru do odcinków o zdefiniowanym położeniu geometrycznym. Z modelowego punktu widzenia, wykres ten jest tożsamy z wykresem strzałek poziomych i wykresem przechyłki, jeśli ona występuje.

W praktyce inżynierskiej identyfikację charakteru krzywizny poziomej, występującej w danym układzie geometrycznym toru, najczęściej przeprowadza się w sposób pośredni – na podstawie strzałek pomierzonych od cięciwy rozciągniętej wzdłuż toru. W artykule opisano możliwości wykorzystania wykresu strzałek poziomych do szacowania wartości krzywizny toru, następnie przedstawiono założenia do nowej metody wyznaczania krzywizny poziomej, opisanej

¹ Prof. dr hab. inż.; Politechnika Gdańska, Katedra Transportu Szynowego i Mostów; e-mail: kocwl@pg.edu.pl.

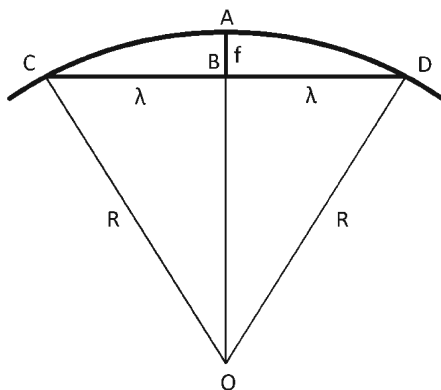
w pracy [12]. Podjęto w nim dwie istotne kwestie szczegółowe: wpływu długości cięciwy na uzyskiwane wartości krzywizny oraz możliwości określania położenia punktów granicznych pomiędzy poszczególnymi elementami geometrycznymi.

2. Możliwości wykorzystania wykresu strzałek poziomych

Wartość strzałki poziomej f określa się dla danego punktu na długości toru, położonego w odległości l od punktu początkowego. Jest to zatem funkcja $f(l)$, co oznacza, że występuje analogia zarówno do definicji krzywizny $k(l)$, jak również do sposobu prezentowania profilu podłużnego linii kolejowej.

Na rysunku 1 przedstawiono ideę dokonywania pomiaru strzałek poziomych w torze kolejowym. Strzałka pozioma f w punkcie A , położonym w odległości l od punktu początkowego danego odcinka toru, jest to odległość tego punktu od środka cięciwy CD (tj. punktu B), przy czym końce cięciwy (czyli punkty C i D) są tak ustawione, że punkt A rzutuje się prostopadłe na cięciwę CD w punkcie B . W przypadku łuku kołowego, z pomierzonej wartości strzałki można wyznaczyć krzywiznę za pomocą wzoru, w którym λ oznacza połowę długości cięciwy:

$$k = \frac{2f}{\lambda^2 + f^2}, \quad (1)$$



Rys. 1. Wyjaśnienie zasady pomiaru strzałek poziomych [opracowanie własne]

Na łuku kołowym, krzywizna jest odwrotnością promienia, co można zapisać następująco:

$$R = \frac{\lambda^2 + f^2}{2f}. \quad (2)$$

W praktyce, wartość f^2 – w porównaniu do wartości λ^2 – jest bardzo mała, dlatego do powszechnego użytku stosuje się wzór uproszczony:

$$f = \frac{\lambda^2}{2R}, \quad (3)$$

przy czym to uproszczenie, przy obecnych możliwościach obliczeniowych, nie ma już żadnego uzasadnienia.

Na krzywych przejściowych, bezpośrednio przejście z pomierzonej strzałki na krzywiznę jest nieuprawnione, jednak nadal powszechnie stosuje się uproszczenie polegające na założeniu, że odcinek krzywej powiązany z cięciwą jest łukiem kołowym i można dla niego stosować zależności (1) ÷ (3).

Metoda wykresu strzałek jest wciąż bardzo popularna na kolei. Wykres strzałek jest bardzo podobny do wykresu krzywizny, dlatego niektórzy traktują tę metodę jako sposób wyznaczania krzywizny toru. Z formalnego punktu widzenia jest to oczywiście nieuzasadnione. Wartości strzałek wyznacza się w milimetrach, jednostką krzywizny zaś jest rad/m. Ponadto, należy uwzględnić fakt, że sporządzony wykres strzałek $f(l)$ pokazuje co prawda wartości pomierzonych strzałek poziomych, jednak nie są na nim określone kierunki, w których te strzałki mierzono. Linie odniesienia stanowią kierunki ustawienia cięciwy, które się stale zmieniają.

Należy zaznaczyć, że pomiar strzałek (poziomych i pionowych) jest od wielu lat podstawą metod diagnostycznych odnoszących się do oceny stanu geometrycznego torów kolejowych [19–20, 25, 31–32]. Był on stosowany w wagonach pomiarowych, obecnie zaś wykorzystują go drezyny pomiarowe. Występujące w tych pomiarach określenia „wykres nierówności poziomych” i „wykres nierówności pionowych” w rzeczywistości oznaczają wykresy strzałek pomierzonych w odpowiednim toku szynowym. Podobna sytuacja występuje również w komercyjnych programach wspomagających projektowanie dróg szynowych, m.in. [1, 2, 8]. Jako podstawę wyjściową do obliczania parametrów geometrycznych układów krzywoliniowych toru w płaszczyźnie poziomej, wykorzystano wygenerowane „wykresy krzywizn”. Jednak, jak się wydaje, zastosowano własną interpretację pojęcia krzywizny, wykorzystującą zapewne wykres strzałek.

Do pomiaru strzałek, należy dysponować odpowiednim sprzętem pomiarowym (w tym zakresie producenci zapewniają szeroką gamę asortymentu) oraz odnosić się do elementu konstrukcyjnego, który fizycznie istnieje. Nie można zatem dokonywać opisanego pomiaru dla osi toru kolejowego, gdyż strzałka powinna być mierzona dla wybranego toku szynowego, obydwa końce cięciwy zaś muszą się znajdować na tym toku. Jest to sytuacja typowa dla przyrządów pomiarowych stosowanych w diagnostyce toru. Gdyby jednak końce cięciwy były zlokalizowane na osi toru, wówczas możliwe byłoby wyznaczanie

strzałki toru. Taka sytuacja występuje wówczas, kiedy dysponuje się współrzędnymi osi toru (projektowymi lub pomierzonymi), natomiast cięciwą stanowi przesuwająca się baza sztywne wagonu pomiarowego, wyznaczona przez osie czopów skrętu jego wózków (w przypadku wagonu wózkowego) lub punkty przecięcia podłużnej osi wagonu z osiami zestawów kołowych (w przypadku wagonu dwuosowego) [33].

Na podstawie wykresu $f(l)$ można określić położenie odcinków prostych oraz odcinków położonych na łukach kołowych i krzywych przejściowych. Parametry charakterystyczne, tj. początki i końce tych odcinków, są odniesione do długości l . Na odcinkach prostych nie stanowi to problemu, jednak na odcinkach łukowych już tak nie jest. Trasę kolejową wyznaczają bowiem współrzędne punktów, które są określone w kartezjańskim układzie współrzędnych (wynika to z wymagań tyczenia osi toru). Przejście z układu liniowego zmiennej l do układu współrzędnych płaskich x, y (w lokalnym układzie współrzędnych) lub Y, X (w układzie PL-2000) jest utrudnione i stwarza problemy przy interpretacji układu geometrycznego. Dlatego należałoby dążyć do tego, aby identyfikację kształtu geometrycznego toru wykonywać w układzie współrzędnych prostokątnych. Podważałoby to oczywiście sens dalszego wykorzystywania do tego celu metody wykresu strzałek, gdyby istniała metoda bezpośredniego wyznaczania krzywizny.

3. Nowa metoda wyznaczania krzywizny toru

Miarą zakrzywienia trasy jest stosunek kąta, o jaki zmienia się kierunek osi podłużnej pojazdu po przebyciu pewnego łuku, do długości tego łuku. Zgodnie z definicją, krzywiznę krzywej K w punkcie M nazywa się granicą, do której dąży stosunek kąta ostrego $\Delta\Theta$, zawartego między stycznymi do krzywej K w punktach M i M_1 , do długości łuku Δl , gdy punkt M_1 dąży po krzywej K do punktu M .

$$k = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\Theta}{\Delta l} \right|, \quad (4)$$

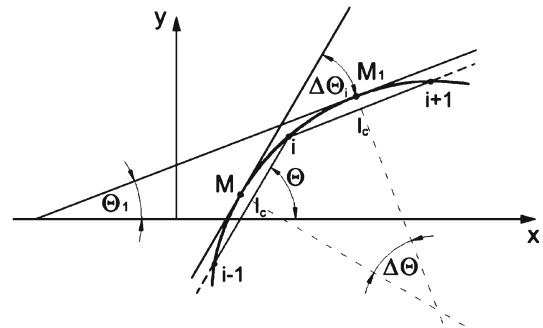
Praktyczny sposób określania krzywizny (dla nie-dużych wartości Δl) polega na wykorzystaniu wzoru uproszczonego:

$$k(l) \cong \frac{\Delta\Theta}{\Delta l}. \quad (5)$$

Z definicji krzywizny wynika konieczność operowania kątami nachylenia stycznej do układu geometrycznego. W przypadku dysponowania zapisem analitycznym danej krzywej nie stanowi to żadnego problemu, jednak w rzeczywistym, najczęściej zdeformowanym w wyniku eksploatacji torze kolejowym, okre-

ślenie występującego położenia prostych stycznych jest bardzo utrudnione. Zupełnie inaczej wygląda sytuacja w odniesieniu do rozciągniętych cięciw pomiarowych, których położenie jest zawsze jednoznacznie ustalone.

Pojawiła się koncepcja, aby przy wyznaczaniu krzywizny toru nie operować stycznymi lecz odpowiadającymi cięciwami. Założono przy tym, że dla rozpatrywanych niewielkich odcinków toru są one do siebie równoległe, punkty styczności zaś rzutują się prostopadłe na środek danej cięciwy. Znalazło to swój wyraz w zaproponowanej metodzie zmiany kątów nachylenia cięciwy pomiarowej (określonej jako metoda ruchomej cięciwy), którą przedstawiono w pracy [12]. Na rysunku 2 pokazano schemat ideowy wyznaczania krzywizny proponowaną metodą.



Rys. 2. Schemat ideowy wyznaczania krzywizny metodą ruchomej cięciwy [opracowanie własne]

Krzywiznę w punkcie i wyznacza się z następującego wzoru:

$$k_i = \frac{\Delta\Theta_i}{l_c}, \quad (6)$$

w którym l_c oznacza długość cięciwy, zaś kąt $\Delta\Theta_i$ wynika z różnicy kątów nachylenia cięciw zbiegających się w punkcie i , czyli:

$$\Delta\Theta_i = \Theta_{i+(i+1)} - \Theta_{(i-1)+i} \quad (7)$$

Stosowanie opisanej procedury wymaga dysponowania współrzędnymi danej krzywej w układzie kartezjańskim (zapisanej analitycznie lub w sposób dyskretny), ponieważ wartości kątów $\Theta_{(i-1)+i}$ i $\Theta_{i+(i+1)}$ wynikają ze współczynników nachylenia prostych opisujących obydwie cięciwy.

W pracy [12] przedstawiono weryfikację zaproponowanej metody wyznaczania krzywizny na jednoznacznie zdefiniowanym elementarnym układzie geometrycznym torów, złożonym z łuku kołowego i dwóch symetrycznie ustawionych krzywych przejściowych (tego samego rodzaju i tej samej długości), obliczonym według zasad analitycznej metody projektowania [10]. Rozpatrzono kilka przypadków geo-

metrycznych dla różnych prędkości jazdy pociągów, przy czym zróżnicowano także rodzaje zastosowanych krzywych przejściowych oraz kąty zwrotu trasy. Uzyskano całkowitą zgodność otrzymanych wykresów krzywizny z wykresami będącymi podstawą odpowiadającego rozwiązania geometrycznego. Dotyczyło to zarówno odcinków łuku kołowego, jak również rejonów krzywych przejściowych.

Wskazano również na możliwość określenia krzywizny toru za pomocą proponowanej metody, zarówno w odniesieniu do osi odciętych w kartezjańskim układzie współrzędnych, jak również do parametru długości w układzie liniowym. Należy jednak spełnić jeden podstawowy warunek – niezbędna jest znajomość współrzędnych punktów danego rejonu trasy w układzie kartezjańskim. Najczęściej będą to wartości określone na podstawie pomiarów.

Zwrócono również uwagę, że proponowana metoda stwarza duże możliwości aplikacyjne. Praktyczny aspekt przedstawionych rozważań ujawnić się może wówczas, gdy charakterystyki geometryczne, wyznaczone na drodze pomiarów osi toru, nie będą znane i celem podstawowym stanie się wyznaczenie tych charakterystyk. W tej sytuacji opisana metoda idealnie odpowiada założeniom mobilnych pomiarów satelitarnych. Pomiary te wyznaczają współrzędne osi toru w układzie współrzędnych prostokątnych, w bardzo dużej liczbie i w bardzo krótkim czasie.

W pracy [12] wykorzystywano cięciwę pomiarową o przyjętej długości $l_c = 5$ m oraz wyznaczano krzywiznę $k(x)$. W niniejszym artykule podjęto dwie istotne kwestie szczegółowe: wpływu długości cięciwy na uzyskiwane wartości krzywizny oraz możliwości określania położenia punktów granicznych pomiędzy poszczególnymi elementami geometrycznymi. W odróżnieniu od pracy [12], w artykule operuje się krzywizną $k(l)$.

4. Wpływ długości cięciwy na uzyskiwane wartości krzywizny

Wpływ długości ruchomej cięciwy rozpatrywano dla elementarnego układu geometrycznego wykorzystywanego w pracy [12], wyznaczonego według zasad analitycznej metody projektowania [10]. Przyjęto kąt zwrotu trasy $\alpha = \pi/4$ rad oraz prędkość jazdy pociągów $V = 120$ km/h (z której wynika promień łuku kołowego $R = 800$ m przy przechyśle na łuku $h = 85$ mm). Analizowane warianty wynikały z rodzaju zastosowanych krzywych przejściowych. Długości tych krzywych były zróżnicowane i wynikały z konieczności zachowania wartości dopuszczalnych odpowiednich parametrów kinematycznych. Przyjęto następujące rodzaje krzywych przejściowych:

- kłotoidę (wariant I) o długości 105 m, opisaną równaniami parametrycznymi:

$$x(l) = l - \frac{1}{40R^2l_k^2}l^5 + \frac{1}{3456R^4l_k^4}l^9 - \frac{1}{599040R^6l_k^6}l^{13}, \quad (8)$$

$$y(l) = \frac{1}{6Rl_k}l^3 - \frac{1}{336R^3l_k^3}l^7 + \frac{1}{42240R^5l_k^5}l^{11}; \quad (9)$$

- krzywą Blossa (wariant II) o długości 150 m, opisaną równaniami parametrycznymi:

$$x(l) = l - \frac{1}{14R^2l_k^4}l^7 + \frac{1}{16R^2l_k^5}l^8 - \frac{1}{72R^2l_k^6}l^9 + \frac{1}{312R^4l_k^8}l^{13} - \frac{1}{168R^4l_k^9}l^{14} + \frac{1}{240R^4l_k^{10}}l^{15} - \frac{1}{768R^4l_k^{11}}l^{16}, \quad (10)$$

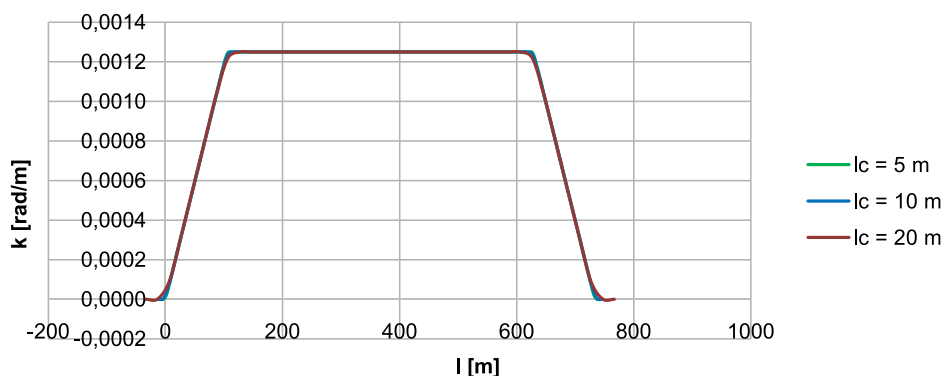
$$y(l) = \frac{1}{4Rl_k^2}l^4 - \frac{1}{10Rl_k^3}l^5 - \frac{1}{60R^3l_k^6}l^{10} + \frac{1}{44R^3l_k^7}l^{11} - \frac{1}{96R^3l_k^8}l^{12} + \frac{1}{624R^3l_k^9}l^{13} + \frac{1}{1920R^5l_k^{10}}l^{16}; \quad (11)$$

- krzywą zaproponowaną w pracy [11] (wariant III) o długości 135 m, opisaną równaniami parametrycznymi:

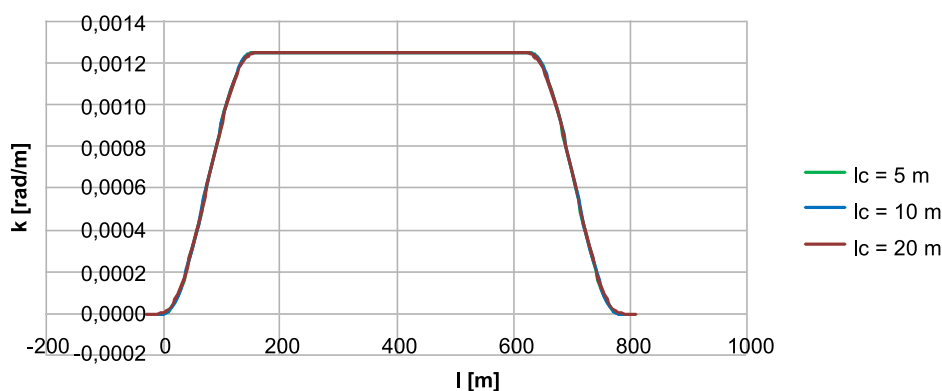
$$x(l) = l - \frac{1}{40R^2l_k^2}l^5 - \frac{1}{36R^2l_k^3}l^6 + \frac{5}{504R^2l_k^4}l^7 + \frac{1}{96R^2l_k^5}l^8 + \left(\frac{1}{3456R^4l_k^4} - \frac{1}{288R^2l_k^6} \right)l^9 + \frac{1}{1440R^4l_k^5}l^{10} + \frac{1}{6336R^4l_k^6}l^{11} - \frac{19}{31104R^4l_k^7}l^{12}, \quad (12)$$

$$y(l) = \frac{1}{6Rl_k}l^3 + \frac{1}{12Rl_k^2}l^4 - \frac{1}{20Rl_k^3}l^5 - \frac{1}{336R^3l_k^3}l^7 - \frac{1}{192R^3l_k^4}l^8 + \frac{1}{2592R^3l_k^5}l^9 + \frac{69}{19440R^3l_k^6}l^{10} + \left(\frac{1}{42240R^5l_k^5} - \frac{1}{6336R^3l_k^7} \right)l^{11} + \left(\frac{1}{13824R^5l_k^6} - \frac{1}{1152R^3l_k^8} \right)l^{12}. \quad (13)$$

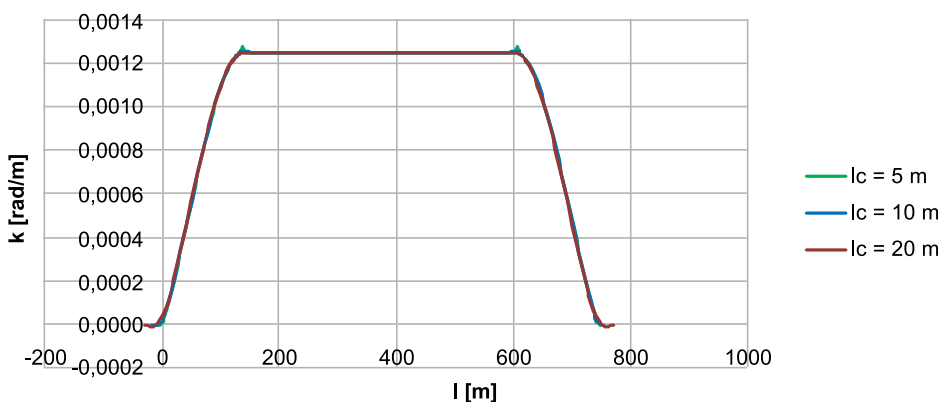
Na rysunkach 3, 4 i 5 przedstawiono wykresy rzędnych krzywizny $k(l)$ wyznaczone w rozpatrywanych wariantach dla przyjętych długości ruchomej cięciwy $l_c = 5$ m, 10 m i 20 m.



Rys. 3. Wykres rzędnych krzywizny $k(I)$ w wariantcie I dla przyjętych długości ruchomej cięciwy $l_c = 5$ m, 10 m i 20 m ($\alpha = \pi/4$ rad, $R = 800$ m, klotoida $l_k = 105$ m) [opracowanie własne]



Rys. 4. Wykres rzędnych krzywizny $k(I)$ w wariantcie II dla przyjętych długości ruchomej cięciwy $l_c = 5$ m, 10 m i 20 m ($\alpha = \pi/4$ rad, $R = 800$ m, krzywa Blossa $l_k = 150$ m) [opracowanie własne]



Rys. 5. Wykres rzędnych krzywizny $k(I)$ w wariantcie III dla przyjętych długości ruchomej cięciwy $l_c = 5$ m, 10 m i 20 m ($\alpha = \pi/4$ rad, $R = 800$ m, nowa krzywa $l_k = 135$ m) [opracowanie własne]

Jak widać, w każdym z wariantów wykresy krzywizny pokrywają się ze sobą. Oznacza to, że w zakresie $l_c = 5 \div 20$ m długość cięciwy nie odgrywa istotnej roli przy wyznaczaniu krzywizny i nie stwarza ograniczenia do stosowania opisanej metody.

Jednocześnie zwraca uwagę precyzja określenia charakteru krzywizny oraz zgodność z przebiegiem teoretycznym na krzywych przejściowych. Obie krzy-

we w postaci klotoidy na rysunku 3 mają krzywiznę liniową, krzywe Blossa na rysunku 4 – krzywiznę w postaci litery S, zaś nowe krzywe przejściowe na rysunku 5 – krzywiznę wygładzoną w rejonach końcowych.

Stosunkowo niewielkie niezgodności rzędnych krzywizny na rysunkach 3, 4 i 5 występują jedynie w rejonach przejścia z odcinków prostych na krzywe przejściowe i z krzywych przejściowych na łuk ko-

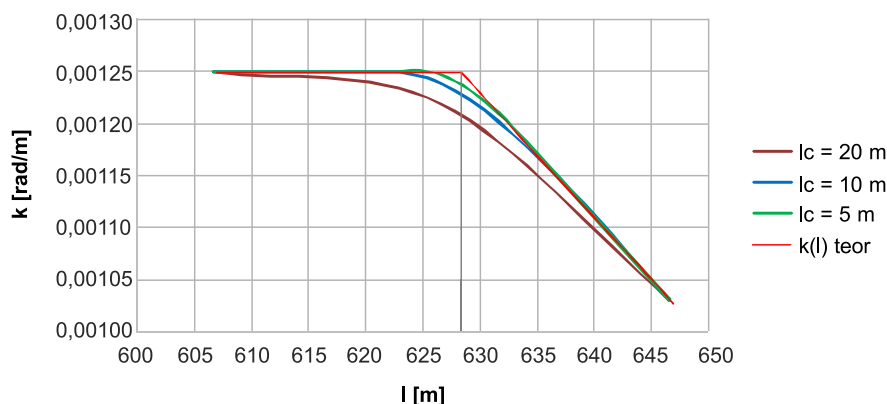
wy. Uwaga ta w najmniejszym stopniu nie odnosi się do krzywej Blossa. Szczególnie widoczne są pewne niewielkie zaburzenia w rejonach przejścia z krzywej przejściowej w łuk kołowy, które występują lokalnie na krzywej przejściowej z pracy [11] (rys. 5). Jak się okazuje, zaburzenia te można zredukować przez wydłużenie cięciwy pomiarowej; nie wydaje się to jednak celowe z uwagi na utratę możliwości znalezienia wyraźnej granicy pomiędzy krzywą przejściową i łukiem kołowym, co jest przedmiotem analizy w kolejnym punkcie artykułu.

5. Określenie położenia punktów granicznych pomiędzy poszczególnymi elementami geometrycznymi

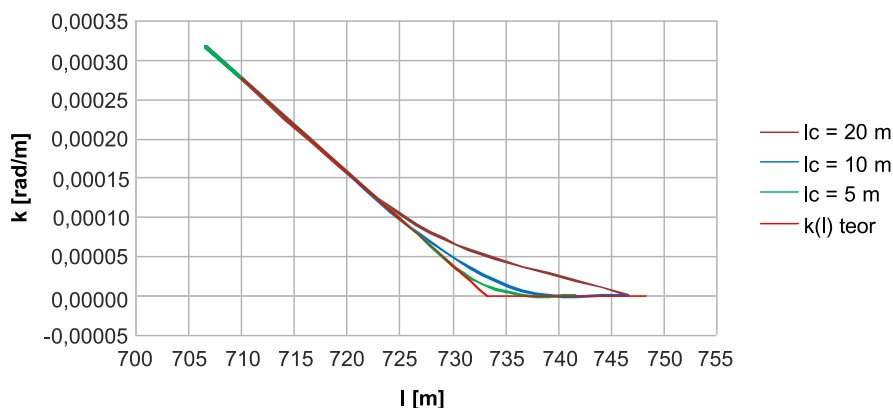
Jak wykazano, wyznaczenie krzywizny na długości toru nie jest specjalnym problemem. Pozostaje do wyjaśnienia kwestia lokalizacji miejsc połączenia elementów geometrycznych – odcinków prostych z krzywymi

przejściowymi oraz krzywych przejściowych z łukami kołowymi. Może się to okazać szczególnie istotne z praktycznego punktu widzenia. Na rysunku 6 przedstawiono wykresy rzędnych krzywizny $k(l)$ w rejonie przejścia z łuku kołowego na krzywą przejściową w postaci kłotoidy (wariant I) dla przyjętych długości ruchomej cięciwy $l_c = 5$ m, 10 m i 20 m, na rysunku 7 pokazano analogiczne wykresy sporządzone dla połączenia krzywej przejściowej z prostym odcinkiem toru. Rysunki te zawierają również wykres krzywizny teoretycznej.

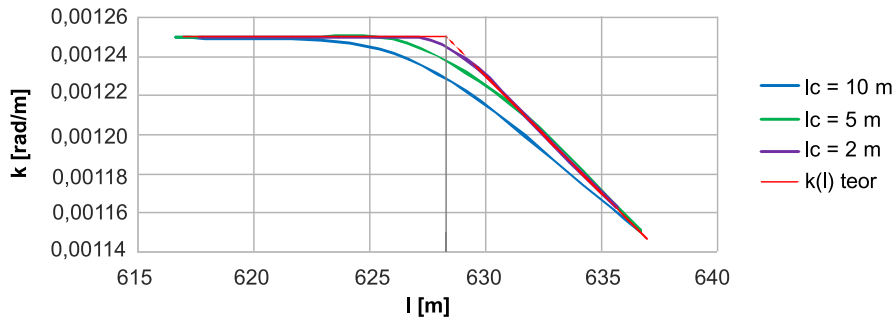
Z rysunków 6 i 7 jednoznacznie wynika, że długość cięciwy pomiarowa ($l_c = 20$ m) nie może być wykorzystywana do osiągnięcia zamierzonego celu. Dotyczy to również pozostałych rozpatrywanych wariantów. Cięciwa o długości $l_c = 5$ m również nie jest odpowiednia, dlatego należy zastosować cięciwę jeszcze krótszą, tj. $l_c = 2$ m. Na rysunkach 8 i 9 przedstawiono odpowiednie wykresy krzywizny $k(l)$. Poszukiwana wartość odciętej punktu połączenia na rysunku 8 wynosi $l = 628,3185$ m, a na rysunku 9 zaś $l = 733,3185$ m. Jak widać, cięciwa o długości $l_c = 2$ m jest bliska uzyskania takich właśnie wartości.



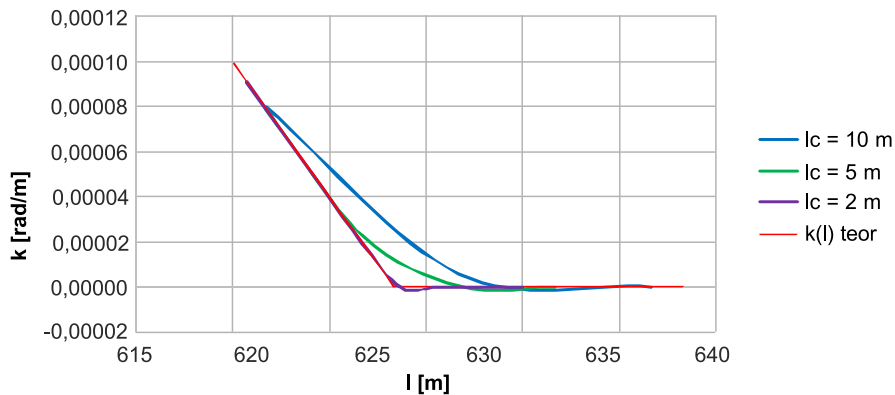
Rys. 6. Wykresy rzędnych krzywizny $k(l)$ w rejonie przejścia z łuku kołowego na krzywą przejściową w postaci kłotoidy (wariant I) dla przyjętych długości ruchomej cięciwy $l_c = 5$ m, 10 m i 20 m ($\alpha = \pi/4$ rad, $R = 800$ m, $l_k = 105$ m) [opracowanie własne]



Rys. 7. Wykresy rzędnych krzywizny $k(l)$ w rejonie przejścia z krzywej przejściowej w postaci kłotoidy na prostą (wariant I) dla przyjętych długości ruchomej cięciwy $l_c = 5$ m, 10 m i 20 m ($\alpha = \pi/4$ rad, $R = 800$ m, $l_k = 105$ m) [opracowanie własne]



Rys. 8. Wykresy rzędnych krzywizny $k(l)$ w rejonie przejścia z łuku kołowego na krzywą przejściową w postaci klotoidy (wariant I) dla przyjętych długości ruchomej cięciwy $l_c = 2$ m, 5 m i 10 m ($\alpha = \pi/4$ rad, $R = 800$ m, $l_k = 105$ m) [opracowanie własne]

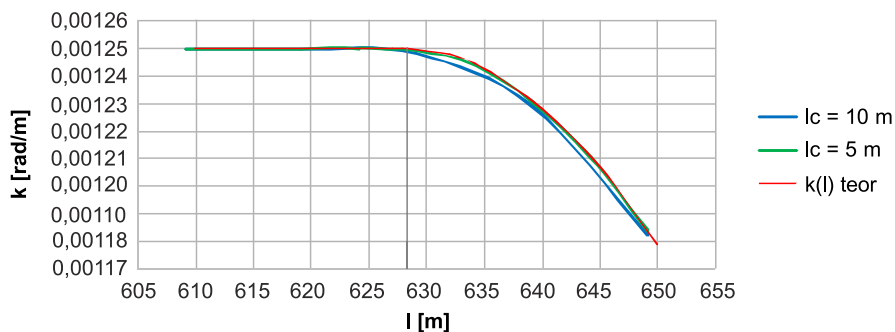


Rys. 9. Wykresy rzędnych krzywizny $k(l)$ w rejonie przejścia z krzywej przejściowej w postaci klotoidy na prostą (wariant I) dla przyjętych długości ruchomej cięciwy $l_c = 2$ m, 5 m i 10 m ($\alpha = \pi/4$ rad, $R = 800$ m, $l_k = 105$ m) [opracowanie własne]

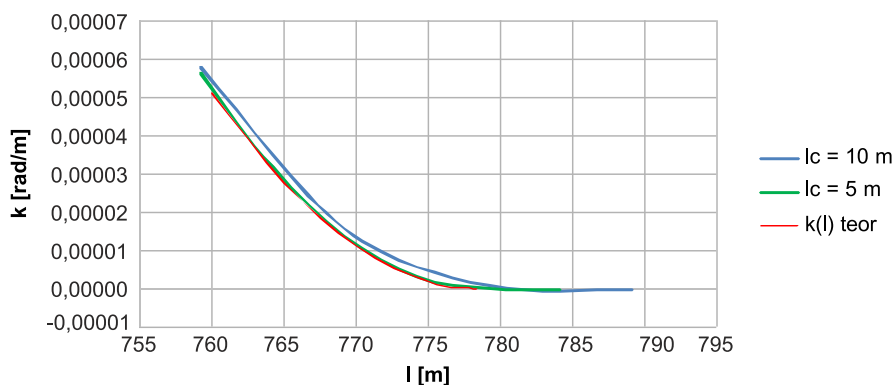
W przypadku stosowania krzywej Blossa, wykorzystanie cięciwy o długości $l_c = 2$ m nie jest konieczne. Wykres krzywizny $k(l)$ uzyskany przy cięciwie $l_c = 5$ m w zasadzie pokrywa się z wykresem teoretycznym, jak widać na rysunkach 10 i 11. Poszukiwane wartości odciętej punktów połączenia ($l = 628,3185$ m

na rysunku 10 oraz $l = 778,3185$ m na rysunku 11) można określić w sposób bezpośredni.

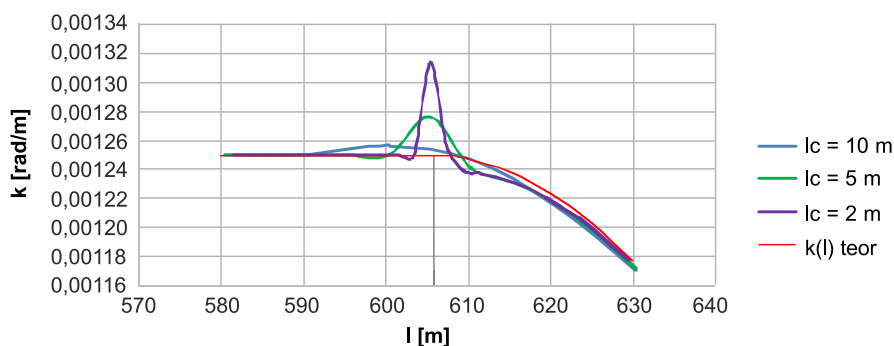
Dla nowej krzywej przejściowej (wariant III) sytuacja w rejonie przejścia z łuku kołowego na krzywą wygląda zupełnie inaczej niż na rysunkach 8 i 10. Przedstawia ją rysunek 12.



Rys. 10. Wykresy rzędnych krzywizny $k(l)$ w rejonie przejścia z łuku kołowego na krzywą Blossa (wariant II) dla przyjętych długości ruchomej cięciwy $l_c = 5$ m i 10 m ($\alpha = \pi/4$ rad, $R = 800$ m, $l_k = 150$ m) [opracowanie własne]



Rys. 11. Wykresy rzędnych krzywizny $k(l)$ w rejonie przejścia z krzywej Blossa na prostą (wariant II) dla przyjętych długości ruchomej cięciwy $l_c = 5$ m i 10 m ($\alpha = \pi/4$ rad, $R = 800$ m, $l_k = 150$ m) [opracowanie własne]

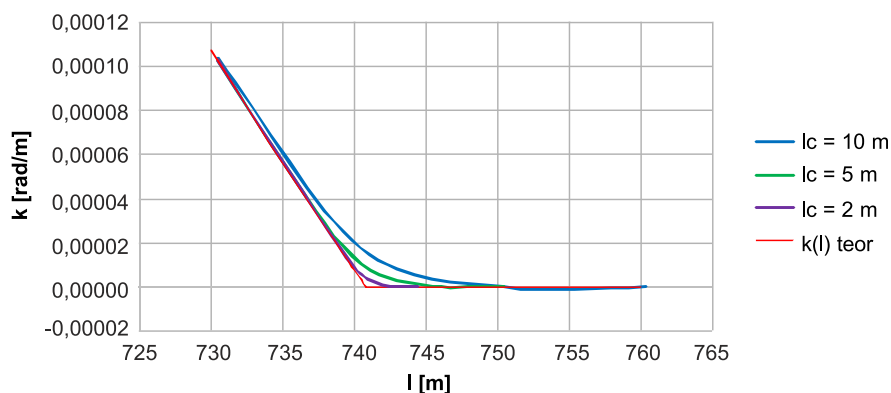


Rys. 12. Wykresy rzędnych krzywizny $k(l)$ w rejonie przejścia z łuku kołowego na nową krzywą przejściową (wariant III) dla przyjętych długości ruchomej cięciwy $l_c = 2$ m, 5 m i 10 m ($\alpha = \pi/4$ rad, $R = 800$ m, $l_k = 135$ m) [opracowanie własne]

Jak widać, w analizowanym rejonie występuje wyraźne zaburzenie na wykresie krzywizny – rzędne $k(l)$ dla $l_c = 5$ m i 2 m są zawyżone, jednak dzięki temu wyznaczenie odciętej punktu połączenia łuku kołowego z krzywą przejściową (która w danym przypadku wynosi $l = 605,8185$ m) staje się bardzo precyzyjne. Sytuacja na połączeniu krzywej przejściowej z prostą (rys. 13) jest bardzo podobna jak w wariantcie I. Poszukiwana wartość odciętej wynosi $l = 740,8185$ m.

Występujące w wariantach I i III podobieństwo wykresów rzędnych krzywizny $k(l)$ w rejonie przejścia z krzywej przejściowej na prostą jest całkowicie zrozumiałe – wyjaśnia to załom występujący na teoretycznym wykresie krzywizny dla klotoidy i nowej krzywej.

Z analizy wynika, że w metodzie ruchomej cięciwy określenie położenia punktów granicznych między poszczególnymi elementami geometrycznymi jest możliwe, przy czym dla krzywej przejściowej w postaci



Rys. 13. Wykresy rzędnych krzywizny $k(l)$ w rejonie przejścia z nowej krzywej przejściowej na prostą (wariant III) dla przyjętych długości ruchomej cięciwy $l_c = 2$ m, 5 m i 10 m ($\alpha = \pi/4$ rad, $R = 800$ m, $l_k = 135$ m) [opracowanie własne]

klotoidy i nowej krzywej należy zastosować cięciwę o długości $l_c = 2$ m, dla krzywej Blossa zaś może to być cięciwa o długości $l_c = 5$ m. Należy spodziewać się wystąpienia pewnych niedokładności na obydwu końcach klotoidy (na połączeniach z odcinkami prostymi i łukiem kołowym) i w rejonie początkowym nowej krzywej przejściowej (na połączeniach z odcinkami prostymi). Określenie położenia punktów granicznych pomiędzy łukiem kołowym i krzywą Blossa, jak również pomiędzy łukiem kołowym oraz nową krzywą przejściową, nie powinno sprawiać żadnego problemu.

6. Podsumowanie

Gdyby istniała metoda bezpośredniego wyznaczania krzywizny toru, podważałoby to sens dalszego wykorzystania do tego celu wykresu strzałek. W pracy [12] przedstawiono założenia takiej właśnie metody wyznaczania krzywizny poziomej, której podstawą są zmiany kątów nachylenia ruchomej cięciwy w kartezjańskim układzie współrzędnych. Weryfikację zaproponowanej metody przeprowadzono na jednoznacznie zdefiniowanym elementarnym układzie geometrycznym torów, złożonym z łuku kołowego i dwóch symetrycznie ustawionych krzywych przejściowych (tego samego rodzaju i tej samej długości), obliczonym według zasad analitycznej metody projektowania [10]. Wskazano na duże możliwości aplikacyjne stwarzane przez opisaną metodę. Może się ona okazać szczególnie przydatna wówczas, gdy charakterystyki geometryczne wyznaczonej na drodze pomiarów osi toru nie będą znane i celem podstawowym stanie się wyznaczenie tychże charakterystyk.

W niniejszym artykule podjęto dwie istotne kwestie szczegółowe: wpływu długości cięciwy na uzyskiwane wartości krzywizny oraz możliwości określania położenia punktów granicznych pomiędzy poszczególnymi elementami geometrycznymi. Analizowane warianty wynikały z rodzaju zastosowanych krzywych przejściowych. Stwierdzono, że długość cięciwy w zakresie od 5 do 20 m nie odgrywa istotnej roli przy wyznaczaniu krzywizny i nie stwarza ograniczeń do stosowania opisaney metody. Jednocześnie zwraca uwagę precyzja określenia charakteru krzywizny oraz jej zgodność z przebiegiem teoretycznym na krzywych przejściowych.

Z analizy wynika, że w metodzie ruchomej cięciwy, określenie położenia punktów granicznych pomiędzy poszczególnymi elementami geometrycznymi jest możliwe, przy czym wymagana długość cięciwy musi być dostosowana do rodzaju krzywej przejściowej. Przykładowo, dla krzywej przejściowej w postaci klotoidy (o krzywiznie liniowej) należy zastosować lokalnie cięciwę o długości $l_c = 2$ m, dla krzywej

Blossa (tj. krzywej gładkiej) zaś może to być cięciwa o długości $l_c = 5$ m. Dodatkowo, w przypadku klotoidy należy spodziewać się wystąpienia pewnych niedokładności na obydwu końcach (czyli na połączeniach z odcinkami prostymi i łukiem kołowym).

Literatura

1. AutoCAD: *Rail design in Civil 3D*, Autodesk, San Rafael, USA, 2019.
2. Bentley Rail Track: *An application for preliminary and detailed 3D design of rail infrastructure V8i PL*, Bentley Systems, Exton, USA, 2019.
3. British Railways: *British railway track design, construction and maintenance. 6th ed.*, The Permanent Way Institution, London, UK, 1993.
4. Dąbrowski P. et.al.: *Installation of GNSS receivers on a mobile platform – methodology and measurement aspects*, Scientific Journals of the Maritime University of Szczecin, vol. 60, no. 132, 2019, pp. 18–26.
5. Deutsche Bahn: 883.2000 DB_REF-Festpunktfeld, DB Netz AG, Berlin, Germany, 2016.
6. European Committee for Standardization: *Railway applications –Track –Track alignment design parameters –Track gauges 1435 mm and wider – Part 1: Plain line.*, EN 13803-1, CEN, Brussels, Belgium, 2010.
7. Federal Railroad Administration: *Code of federal regulations title 49 transportation*, US Government Printing Office, Washington, DC, USA, 2008.
8. Ferrovial: *BIM-ready railway design solution*, CGS Labs, Ljubljana, Slovenia, 2018.
9. Jamka M., Lisowski S., Strach M.: *Zastosowanie współczesnych technologii geodezyjnych w określaniu geometrii toru w aspekcie dopuszczalnych prędkości pociągów*, Zeszyty Naukowo-Techniczne Stowarzyszenia Inżynierów i Techników Komunikacji Rzeczpospolitej Polskiej Oddział w Krakowie, seria: Materiały Konferencyjne, nr 91, z. 149, Kraków 2009, s. 567–581.
10. Koc W.: *Design of rail-track geometric systems by satellite measurement*. Journal of Transportation Engineering, vol. 138, iss. 1/2012, ASCE, pp. 114–122.
11. Koc W.: *New transition curve adapted to railway operational requirements*, Journal of Surveying Engineering, vol. 145, iss. 3/2019, ASCE, 04019009.
12. Koc W.: *The method of determining horizontal curvature in geometrical layouts of railway track with the use of moving chord*, Archives of Civil Engineering, vol. 66, iss. 4/2020, Warsaw Univ. of Technology, pp. 579–591.
13. Koc W., Specht C.: *Application of the Polish active GNSS geodetic network for surveying and design*

- of the railroad, Proc., First International Conference on Road and Rail Infrastructure – CETRA 2010, Opatija, Croatia, 2010, Univ. of Zagreb, pp. 757–762.
14. Koc W., Specht C.: *Selected problems of determining the course of railway routes by use of GPS network solution*, Archives of Transport, vol. 23, iss. 3/2011, Warsaw University of Technology, pp. 303–320.
 15. Koc W., Specht C., Chrostowski P.: *Finding deformation of the straight rail track by GNSS measurements*, Annual of Navigation, no. 19, part 1, 2012, Polish Naval Academy in Gdynia, pp. 91–104.
 16. Koc W., Specht C., Chrostowski P.: *Projektowanie i eksploatacja dróg szynowych z wykorzystaniem mobilnych pomiarów satelitarnych*, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2018.
 17. Koc W. et.al.: *Analysis of the possibilities in railways shape assessing using GNSS mobile measurements*, MATEC Web of Conferences, vol. 262, no. 4/2019, 11004, EDP Sciences, pp. 1–6.
 18. Koc W. et.al.: *A method for determination and compensation of a cant influence in a track centerline identification using GNSS methods and inertial measurement*, Applied Sciences, vol. 9, iss. 20/2019, 4347, MDPI, Basel, Switzerland, pp. 1–16.
 19. Marx L.: *Satellitengestützte Gleisvermessung – auch beim Oberbau*, EI – Eisenbahningenieur, vol. 58, no. 6/2007, Eurail Press, pp. 9–14.
 20. Naganuma Y., Yasukuni T., Uematsu T.: *Development of an inertial track geometry measuring trolley and utilization of its high-precision data*, International Journal of Transport Development and Integration, vol. 3, no. 3/2019, WIT Press, pp. 271–285.
 21. Naganuma Y., Yoshimura A.: *Reconstruction of the track geometry from three-point measurement data using kalman filter*, Conf. Papers of 13th International Conference & Exhibition RAILWAY ENGINEERING 2015, Edinburgh 2015, Engineering Technics Press, Edinburgh.
 22. New South Wales: *Standard: Railway Surveying, Version 1.0, T HR TR 13000 ST, NSW Government (Transport for NSW)*, Sydney, Australia, 2016.
 23. Network Rail: *NR/L3/TRK/0030 NR_Reinstatement of Absolute Track Geometry (WCRL Routes)*, Iss. 1, NR, London, UK, 2008.
 24. PKP Polskie Linie Kolejowe: *Standardy Techniczne – Szczegółowe warunki techniczne dla modernizacji lub budowy linii kolejowych do prędkości $V_{max} \leq 200$ km/h (dla taboru konwencjonalnego) / 250 km/h (dla taboru z wychylnym pudłem) – TOM I – DROGA SZYNOWA – Załącznik ST-T1_A6: Układy geometryczne torów*, PKP Polskie Linie Kolejowe, Warszawa 2018.
 25. Qijin C. et.al.: *A railway track geometry measuring trolley system based on aided INS*, Sensors, vol. 18, iss. 2/2018, 538.
 26. Specht C.: *System GPS*, Wydawnictwo Bernardinum, Pelplin, 2007.
 27. Specht C., Koc W.: *Mobile satellite measurements in designing and exploitation of rail roads*, Transportation Research Procedia, vol. 14, 2016, Elsevier Open Access, pp. 625–634.
 28. Specht C. et.al.: *The analysis of tram tracks geometric layout based on mobile satellite measurements*, Urban Rail Transit, vol. 3, iss. 4/2017, Springer Open, pp. 214–226.
 29. Specht C. et.al.: *Accuracy assessment of mobile satellite measurements in relation to the geometrical layout of rail tracks*, Metrology and Measurement Systems, vol. 26, iss. 2/2019, Polish Academy of Sciences, pp. 309–321.
 30. Specht C. et.al.: *Diagnostics of the tram track shape with the use of the global positioning satellite systems (GPS/Glonass) measurements with a 20 Hz frequency sampling*, Journal of Vibroengineering, vol. 16, iss. 6/2014, JVE International Ltd., Kaunas, Lithuania, pp. 3076–3085.
 31. Strübing T.: *Kalibrierung und Auswertung von lasertriangulationsbasierten Multisensorsystemen am Beispiel des Gleisvermessungssystems RACER II*, Universität der Bundeswehr München, Fakultät für Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften, Institut für Geodäsie, Heft 91, Naubiberg, Germany, 2015.
 32. Weinold T., Grimm-Pitzinger A.: *Die Lagerung der Gleisvermessungen der ÖBB*, Vermessung & Geoinformation, vol. 7, no. 3/2012, pp. 348–352.
 33. Wilk A. et.al.: *Projekt badawczy BRIK: Opracowanie innowacyjnej metody wyznaczania precyzyjnej trajektorii pojazdu szynowego*, Przegląd Komunikacyjny, R. 74, nr 7/2019, SITK RP, Warszawa, s. 32–47.