

Złożone modele konstytutywne w analizach badawczych i obliczeniach inżynierskich.

Podstawy analiz zadań kontaktowych



dr hab. inż.
LIDIA FEDOROWICZ, PROF. WST
Wyższa Szkoła Techniczna w Katowicach
ORCID: 0000-0001-5006-1096



dr hab. inż.
JAN FEDOROWICZ, PROF. WST
Wyższa Szkoła Techniczna w Katowicach
ORCID: 0000-0001-5383-7152

W artykule przedstawiono specyfikę dwóch grup modeli gruntowych stosowanych w analizach zagadnień kontaktowych budowla–podłoże gruntowe, pokazując równocześnie ich możliwości i ograniczenia przy ocenie bazowych zagadnień geotechniki.

Wprowadzenie

Patrząc na współczesne realizacje inżynierskie, wydaje się, że istniejące programy komputerowe MES dostarczają możliwości analizy dowolnie rozbudowanych problemów inżynierskich. Opis takich zagadnień w literaturze przedmiotu sprowadza się jednak często do przedstawiania modeli, w których już „superelementy” badanych układów współpracują ze sobą w przestrzeni; przykładowo [1, 2, 3, 4].

W rozważaniach przedstawianych w artykule, dotyczących interaktywnych układów budowla–podłoże gruntowe, chcielibyśmy natomiast zapisać elementarne niejako aspekty rozważanego problemu, których zrozumienie pozwala na świadome analizy (także o charakterze badawczym), mianowicie:

- jakość oraz dokładność każdej analizy zależy od budowy modelu obliczeniowego i jest ograniczona zakresem informacji

wstępnych wymaganych przez zastosowany model konstytutywny;

- modele konstytutywne użyteczne w analizach obliczeniowych konkretnych zagadnień inżynierskich niekoniecznie muszą odtwarzać w sposób zadawalający „badania elementowe” (tu laboratoryjne badania trójosiowego ściskania czy badania edometryczne);
- nie możemy mówić o prawidłowo utworzonym modelu podłoża gruntowego bez właściwego opisu stanu *in situ* w obszarze, który podlega modelowaniu.

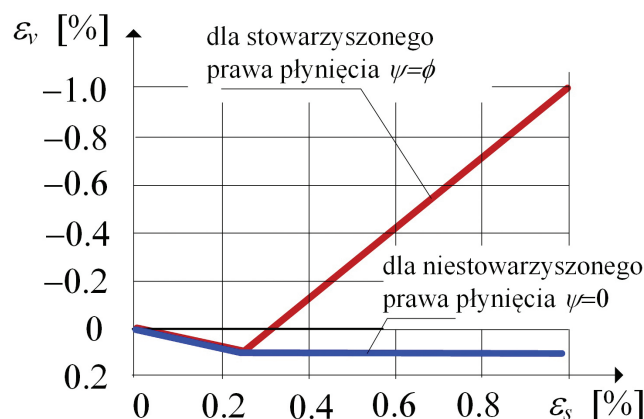
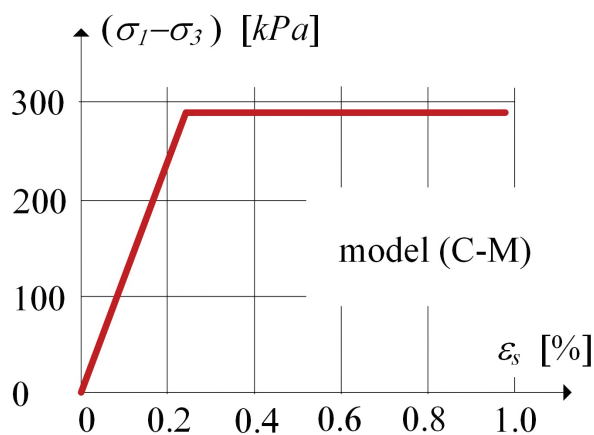
Przedstawionym dalej fragmentom analiz, bazujących na sprężysto-plastycznym opisie pracy podłoża gruntowego, towarzyszy opis charakterystycznych cech modelu stanu krytycznego Modified Cam-Clay (MCC). Jest to propozycja wykorzystania modelu MCC do opisu problemów, w których uwzględnienie (lub nieuwzględnienie) historii obciążenia gruntu w przeszło-

ści może mieć wpływ na otrzymywane wyniki analizy.

Zwrócono także uwagę na sposób właściwej interpretacji miąższości modelu podłoża w układzie budynek–podłoże opisane modelem MCC.

Numeryczna odpowiedź modeli konstytutywnych na proste ścieżki obciążenia – model Coulomba-Mohra (C-M)

W wielu podstawowych zagadnieniach kontaktowych budowla–podłoże gruntowe dla opisu zachowania gruntu stosowane są związki sprężysto-plastyczne i zwykle jest to model o powierzchni plastyczności i zniszczenia Coulomba-Mohra ze stowarzyszonym prawem płynięcia. Rozważmy krótko zagadnienie oceny nośności podłoża pod obciążeniem przekazywanym na podłoże z fundamentów płyty. Zagadnienie to uznajmy (za literaturą przedmiotu [5]) za wzorcowe, bo spełniają-



Rys. 1. Ścieżki odpowiedzi $q-\epsilon_s$, $\epsilon_s-\epsilon_v$ modelu C-M w teście trójosiowego ściskania

ce warunki umożliwiające odtworzenie numeryczne klasycznego postępowania obliczeniowego; z poszerzeniem oglądu zjawisk zachodzących w podłożu gruntowym [6, 7, 8].

Przypomnijmy, że na ocenę nośności granicznej gruntu (q_{gran}) przy obciążeniu fundamentem pasmowym pozwala poniższy kanoniczny wzór Terzagiego (zawarty w normie PN-81/B-03020 w postaci rozbudowanej):

$$q_{gran} = c \cdot N_c + \gamma_D \cdot D \cdot N_D + \gamma_B \cdot B \cdot N_B \quad (1)$$

gdzie w rozwiązaniach klasycznych przy wyznaczaniu współczynników nośności N (wzór (1)) zastosowany został – dla ciała nieważkiego – sprężysty idealnie plastyczny model o powierzchni plastyczności i zniszczenia Coulomba-Mohra o stowarzyszonym prawie płynięcia [2, 5, 9, 10].

Każdą analizę numeryczną powinna poprzedzać ocena możliwości wybranego modelu konstytutywnego: bądź do powtórzenia znanego rozwiązania analitycznego, bądź odtworzenia podstawowych sytuacji badawczych, np. testów laboratoryjnych.

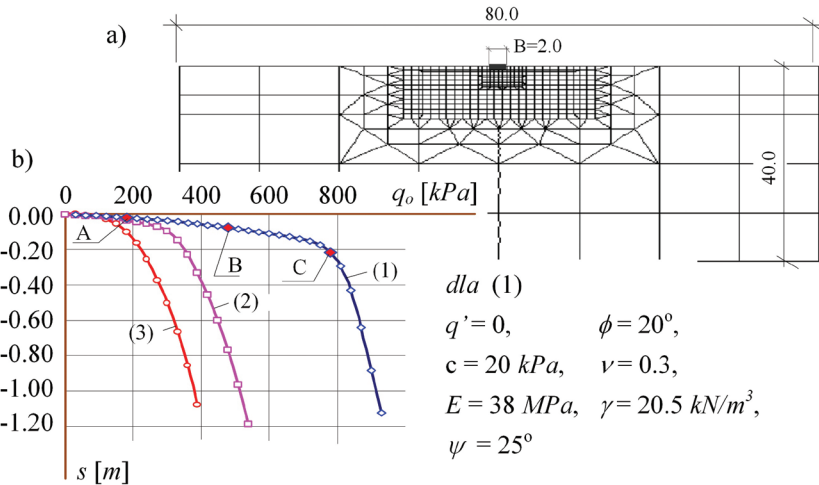
Na rys. 1. pokazano ścieżki odpowiedzi $q-\varepsilon_s, \varepsilon_s-\varepsilon_v$ modelu Coulomba-Mohra (C-M) na zastosowaną prostą ścieżkę obciążenia w teście trójosiowego ściskania. Pomimo niemożności uzyskania rzeczywistej nieliniowej odpowiedzi gruntu na obciążenie model ten wykorzystywany jest w bazowych, bardzo istotnych dla praktyki inżynierskiej analizach.

Zgodnie z podstawowym, klasycznym ujęciem problemu oceny nośności [9, 10] uznaje się, że narastającemu obciążeniu przykładanemu do fundamentu towarzyszą stany uplastycznienia i wypierania gruntu. Rozwiązania numeryczne (przy zastosowanej tu klasie związków konstytutywnych) odtwarzają te zjawiska – rys. 2.

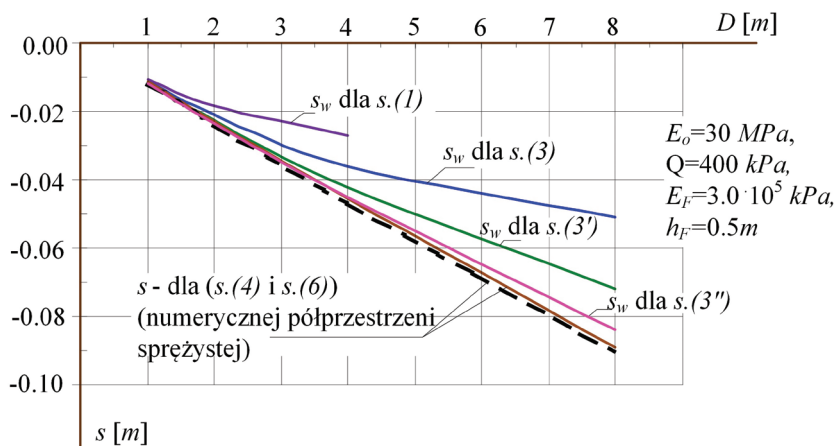
Punkty wyróżnione w rozwiązaniu (1) określają charakterystyczne stany gruntu – od rozwijania się stanu uplastycznienia gruntu w okolicach fundamentu (punkt A) do powstawania mechanizmu zniszczenia, prowadzącego do wypierania podłoża gruntowego spod fundamentu (punkt C). Funkcji – z rozwiązania (1) – reprezentującej zależność q_0-s dla gruntu spoistego towarzyszą funkcje (2) i (3), otrzymane dla poniższych warunków:

- w rozwiązaniu (2) wartość $c=0$ [kPa], fundament, tak jak w (1), jest zagłębiony w gruncie;
- w rozwiązaniu (3) $c=0$ [kPa] fundament znajduje się na powierzchni terenu.

Bardzo istotną sprawą, na którą należy bezwzględnie zwrócić uwagę w analizach numerycznych, jest wielkość przyjętego obszaru obliczeniowego modelu podłoża gruntowego. Problem ilustruje rys. 3. – porównując osiadania fundamentów kołowych o średnicach $D=1$ m do $D=8$ m, otrzymywanych w modelach o coraz większej miąższości



Rys. 2. Wyniki numerycznego testu badania nośności fundamentu



Rys. 3. Osiedlenia fundamentów niezbyt sztywnych w modelach podłoża o różnej miąższości

gruntu pod fundamentem: od h (1) do h (5) wynoszących kolejno 3 m, 5 m, 10 m, 20 m oraz 40–60 m dla numerycznie „odtworzonej” półprzestrzeni sprężystej.

Konsekwencje doboru wielkości obszaru obliczeniowego podłoża w sposób całkowicie arbitralny omówiono w pracy [8].

Model stanu krytycznego Modified Cam-Clay – stan prekonsolidacji MCC(OC) oraz normalnej konsolidacji gruntu MCC(NC)

Określenie parametrów i właściwości gruntu pozwalających na wyznaczenie profilu geotechnicznego pod konstrukcją stanowi wstępny etap przygotowania modelu obliczeniowego podłoża gruntowego; zarówno dla analiz klasycznych, jak i numerycznych. Na rys. 4 przedstawiono rzeczywisty profil gruntowy, dla którego przeprowadzono badania laboratoryjne próbek pobranych z otworów wiertniczych w celu określenia właściwości fizykomechanicznych gruntu. Rysunek 4. daje obraz stanu podłoża zgodny z interpretacją modelu MCC i wynikami przeprowadzonych badań laboratoryjnych.

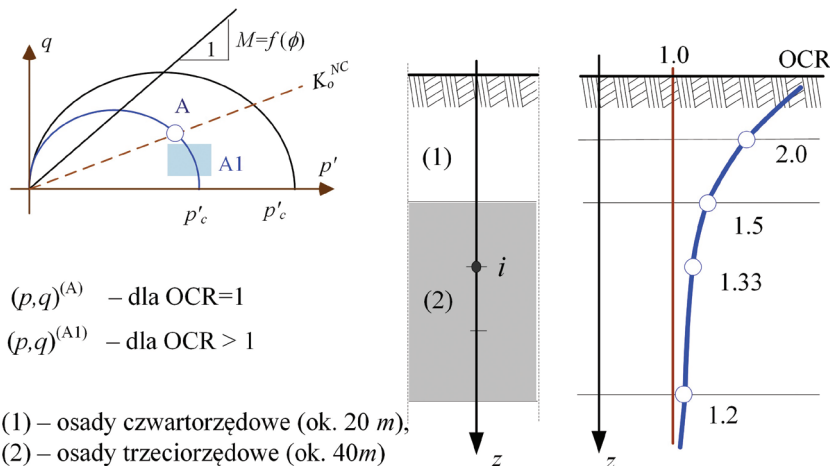
Model Modified Cam-Clay jest jednym z modeli stanu krytycznego. Spełnia on bazowy opis zachowania gruntu w przestrzeni (p', q, V) , gdzie (p') – to średnie naprężenie efektywne, (q) – naprężenie dewiatorowe, (V) – objętość specyficzna materiału gruntowego ($V=1+e$, gdzie e to wskaźnik porowatości). Rysunek 5. przedstawia tzw. powierzchnię stanu SBS z przykładową ścieżką naprężenia (A-B-F), pokazaną także w układzie (p', q) i (p', V) . Fragment (A-B) ścieżki reprezentuje zachowanie sprężyste (z nieliniową zmianą wskaźnika porowatości) gruntu prekonsolidowanego. Fragment (B-F) przedstawia proces wzmocnienia gruntu normalnie skonsolidowanego, zachodzący aż do zniszczenia po osiągnięciu linii stanu krytycznego (linia CSL na powierzchni stanu).

Zlokalizujmy dowolny punkt gruntu w stanie *in situ* w przestrzeni (p, q) .

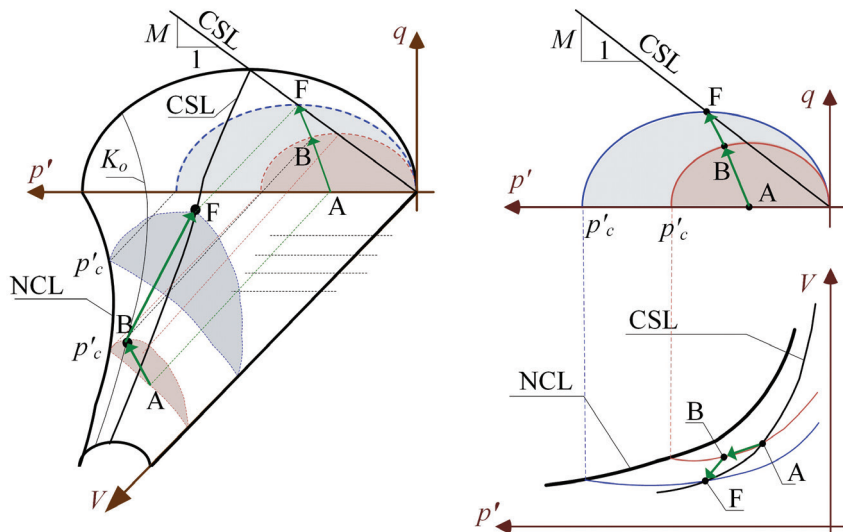
Zgodnie z podanym poniżej równaniem bieżącej powierzchni plastyczności modelu Modified Cam-Clay

$$q^2 + M^2 \cdot p^2 = M^2 \cdot p \cdot p_c \quad (2)$$

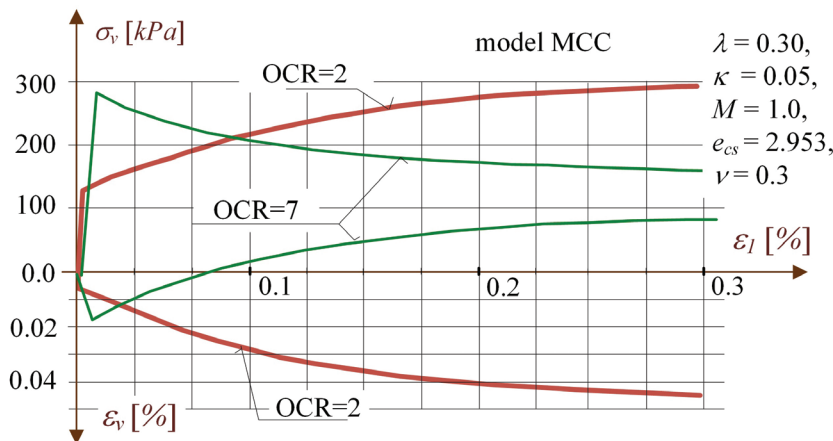
możemy określić punkt p'_c (leżący na linii izotropowej konsolidacji normalnej) dla po-



Rys. 4. Ilustracja zmian OCR na głębokości i odniesienie tych zmian do modelu MCC



Rys. 5. Model MCC powierzchnia SBS z przykładową ścieżką naprężenia oraz ścieżka naprężenia pokazana w układzie (p', q) i (p', V)



Rys. 6. Odpowiedź modelu MCC na prostą ścieżkę obciążenia w numerycznym teście trójosiowego ściskania

wierzchni plastyczności, która zawiera wybrany pkt. A – linia K_o^{NC} na rys. 4.

Ogólnie mamy na dowolnej głębokości:

$$p = \frac{1}{3}(1 + 2K_o) \cdot OCR \cdot \sigma_v^i, \quad q = (1 - K_o) \cdot OCR \cdot \sigma_v^i \quad (3)$$

gdzie przeciążenie w przeszłości wynosi:

$$q^* = (OCR - 1) \cdot \sigma_v^i \quad (4)$$

Zatem:

$$p_c = \frac{9(1-K_o)^2 + M^2(1+2K_o)^2}{3M^2(1+2K_o)} \cdot OCR \cdot \sigma_v^i \quad (5)$$

Jest to zgodne z możliwością oceny współczynnika parcia gruntu w spoczynku.

Wartość K_o ogólnie zależy od kąta tarcia oraz historii obciążenia i odciążenia gruntu

w przeszłości. Dla gruntów normalnie skonsolidowanych Jaky (1944) zaproponował poniższy zapis, dobrze skorelowany z obserwowanymi wartościami (Bishop, 1958, Brooker and Ireland, 1965):

$$K_o = 1 - \sin \Phi'c \quad (6)$$

gdzie $\Phi'c$ = krytyczna wartości kąta tarcia wewnętrznego; zatem zależność (5) zapiszemy:

$$p_c = \frac{9 \sin^2 \Phi + M^2(3-2 \sin \Phi)^2}{3M^2(3-2 \sin \Phi)} \cdot OCR \cdot \sigma_v^i \quad (7)$$

Zgodnie ze stanem rzeczywistym podłoża, który może się różnić wartością K_o (rys. 4.), dowolny element w gruncie możemy rozważać jako normalnie skonsolidowany lub prekonsolidowany. Zatem element gruntu z głębokości z_i istnieje dla $OCR=1$ jako pkt A w przestrzeni (p, q) lub jako pkt A1 usytuowany gdziekolwiek pod powierzchnią plastyczności; w obrębie zaznaczonego na rysunku obszaru.

Dla gruntów słabo prekonsolidowanych wartość K_o jest bliska 1,0 i rośnie wraz ze wzrostem wskaźnika prekonsolidacji OCR. Wartości pomierzone K_o mogą wynikać z badań edometrycznych.

Typowe wartości K_o i zależności wykorzystywane w modelach numerycznych są podane m.in. w [11, 12], przykładowo dla glin (iłó) w stanie NC $K_o=0,5 \div 0,7$, w stanie OC $K_o=1,0 \div 4,0$.

Dalej przedstawiono (dla porównania z zachowaniem modelu Coulomba-Mohra (C-M) z rys. 1.) odpowiedź modelu (MCC) na charakterystyczną prostą ścieżkę obciążenia w teście trójosiowego ściskania – rys. 6. Test numeryczny z odwodnieniem przeprowadzony został dla gruntu średnio prekonsolidowanego ($OCR=2$) oraz silnie prekonsolidowanego ($OCR=7$).

Rozważmy teraz z kolei zachowanie modelu MCC w procesie odtwarzania zachowania podłoża znajdującego się pod obciążeniem w jednoosiowym stanie odkształcenia – zgodnie z rys. 4. Bezpośrednie wyznaczenie w warunkach laboratoryjnych parametrów: wytrzymałościowych, ściśliwości czy przepuszczalności jest niezmiernie czasochłonne. Rozważmy zatem pytanie:

Czy model stanu krytycznego Modified Cam-Clay może być użyty do zdefiniowania w testach numerycznych modułów edometrycznych (ściśliwości K)?

Jak proces kalibrowania parametrów modelu MCC wpływa na dokładność wyznaczanych numerycznie krzywych ściśliwości?

Przedmiotem analiz porównawczych jest zachowanie próbek trzeciorzędowego iłu pobranych z głębokości $z \approx 30$ m i poddanych obciążeniu zgodnemu z konsolidacją izotropową.

Na podstawie pobranych próbek stan gruntu określono jako pośredni między zawar-

tym a twardo-plastycznym. Krzywe ściśliwości otrzymane w badaniach edometrycznych pozwoliły na ocenę wartości modułów dla odpowiedniego zakresu obciążenia oraz określenie efektywnego ciśnienia prekonsolidacji; rys. 7. [13].

Dla istniejącego zbioru informacji można ocenić (zgodnie z normą, metodą B) wytrzymałość i ściśliwość gruntu. Odwołując się z kolei do równania (7), możemy zapisać:

$$p_c = f(\Phi, M, OCR, \gamma_z) \quad (8)$$

gdzie pozostałe parametry modelu MCC (które muszą odzwierciedlać zachowanie rzeczywistego obciążonego podłoża) to: λ , κ , e_{cs} ; przy czym parametry λ i κ są sprzężone ze sobą [2, 6, 10, 14, 15]. Ocena wskaźnika ściśliwości C_c pozwala na przyjęcie wartości λ ($C_c = 2,3 \cdot \lambda$). Pozostałe dane to: $\kappa = (0,11 \pm 0,12) \cdot \lambda$, $M = 1,2$ (dla kąta tarcia $\phi = 30^\circ$) (początkowa i bieżąca wartość e_0 i e jest sprawdzana dla różnych wartości e_{cs}).

Rysunek 8. pokazuje dopasowanie fragmentu funkcji laboratoryjnej do funkcji numerycznych otrzymanych w modelu MCC (dla wielkości podanych na rysunku).

Jeśli uznamy, że model MCC w wystarczający sposób odwziera zachowanie gruntu, to przedstawiony typ testów może stać się sposobem wykonywania oceny OCR w profilu geotechnicznym oraz realnego określania wartości modułów ściśliwości.

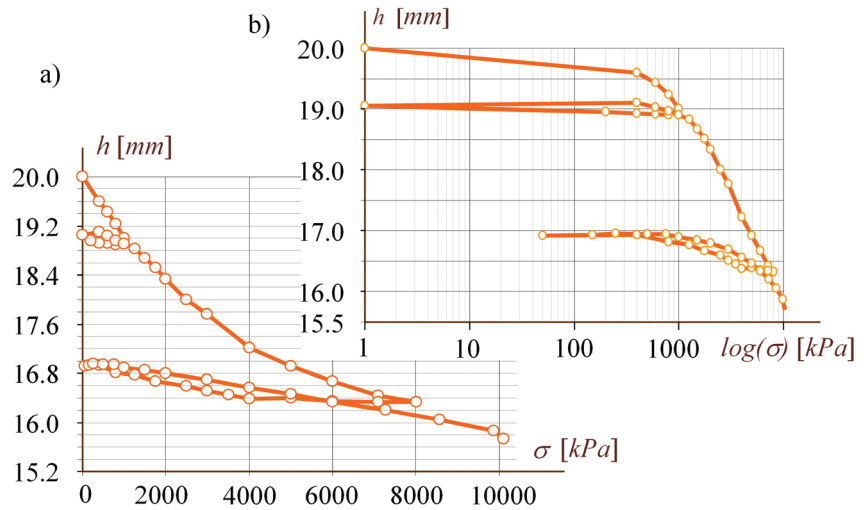
Ostatnie dwa przykłady stanowią opis zjawisk zachodzących na powierzchni podłoża. Przykład pierwszy – rys. 9. stanowi rozwinięcie idei (z rys. 3.) właściwego określania obszaru w numerycznym modelu podłoża. Na rysunku, dla serii fundamentów o rzeczywistej sztywności, pokazano możliwe różnice w ocenie osiadania podłoża jednorodnego, określonych:

- numerycznie w półprzestrzeni modelu MCC (OC) w zakresie prekonsolidacji gruntu,
- w numerycznie odwzorowanej półprzestrzeni sprężystej oraz
- zgodnie z normą [PN-81/B-03020].

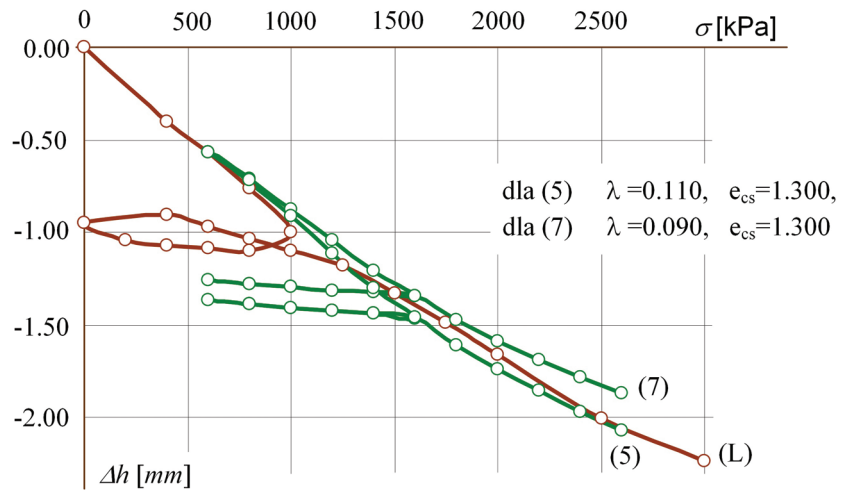
Przykład drugi – rys. 10. dotyczy analizy obciążanego i odciążanego podłoża, w czasie której rejestrowany jest przebieg tego procesu w modelu sprężystym (e) oraz w modelu MCC(OC). Zauważmy, że analiza odnosi się do podłoża „młodego”, np. osadów w estuarium rzeki, gdzie analizy w modelu sprężystym (e) czy sprężysto-plastycznym (przykładowo (C-M)) są obciążone bardzo dużą niepewnością.

Podsumowanie

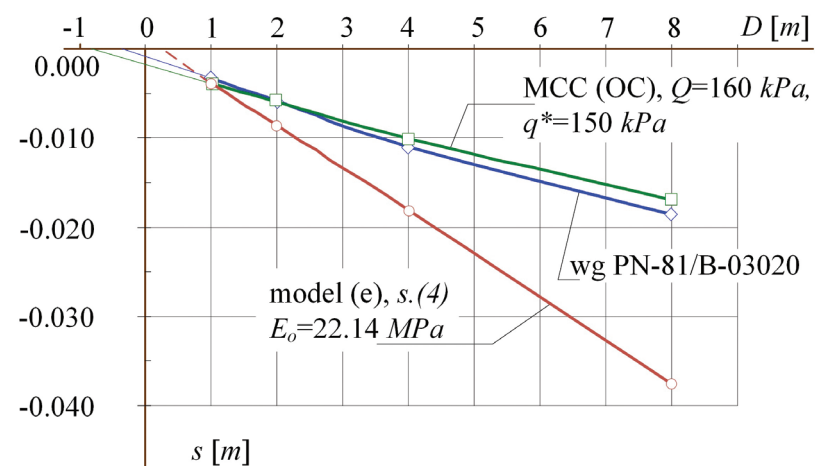
Większość zadań kontaktowych budowlano-podłoże gruntowe obciążona jest problemem wpływu wielkości obszaru modelu podłoża na wartości wielkości kontaktowych, czyli przemieszczeń (osiadania) oraz naprężenia



Rys. 7. Krzywe ściśliwości otrzymane w badaniach edometrycznych próbek trzeciorzędowego łu pobranych z głębokości 30 m



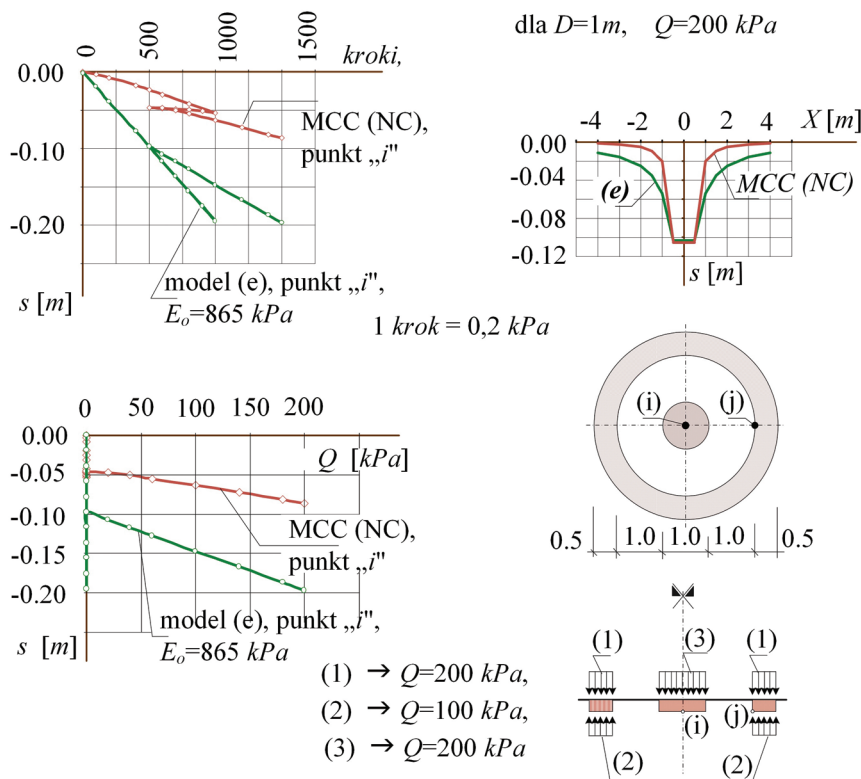
Rys. 8. Dopasowanie fragmentu funkcji numerycznych (5) i (7) otrzymanych w modelu MCC do funkcji σ - Δh laboratoryjnej (L)



Rys. 9. Osiadanie fundamentu kołowego według różnych kryteriów oceny

(reakcji) pojawiających się w styku podkładów. Modele numeryczne, w których do opisu pracy podłoża gruntowego stosowane są związki sprężysto-plastyczne, np. związki modelu Coulomba-Mohra, wymagają zwykłe racjonalnego określenia (przyjęcia np. zgod-

nie z doświadczeniem) wymiarów modelu, tu głównie miąższości podłoża. Modele stanu krytycznego (nawet w formie bazowej modelu Modified Cam-Clay czy Cam-Clay) wykazują się zjawiskiem stabilizacji odpowiedzi podłoża na przykładane poprzez fundament obciąż-



Rys. 10. Model MCC (NC) – osiadania fundamentu pierścieniowego

żenie zewnętrzne Q przy równoczesnym kontrolowanym powiększaniu obszarów podłoża – czyli obserwujemy stabilizację rozwiązania zadania kontaktowego w możliwej do określenia półprzestrzeni modelu MCC.

Zjawisko to będzie zachodziło w sposób zadowalający w modelu obliczeniowym, gdy realizowane w stanie *in situ* ścieżki obciążenia (np. w zależności Q - s) nie będą wykazywały zbyt dużych odkształceń nieodwracalnych w przedziale prekonsolidacji gruntu, których to nie odzwierciedlają modele MCC i CC. Należy jednak podkreślić, że realne zalety opisu zachowania podłoża z zastosowaniem modelu stanu krytycznego stają się oczywiste dla dobrze odtworzonego numerycznie rzeczywistego stanu *in situ* podłoża. [16, 17]

Bibliografia

[1] Zimmermann Th., Truty A., Podleś K., Numerics in geotechnics and structures. ZACE Services Ltd. Lausanne 2016.
[2] Potts D. M., Zdravković L., Finite element analysis in geotechnical engineering. Volume 1, Theory. Volume 2, Application. Thomas Telford Limited, London 1999.
[3] Burland J. i in., ICE manual of geotechnical engineering Volume 1, Geotechnical Engineering Principles, Problematic Soils and Site Investigation, Institution of Civil Engineers, London 2012.
[4] Burland J. i in., ICE manual of geotechnical engineering Volume 2, Geotechnical Design, Construction and Verification. Institution of Civil Engineers London 2012.
[5] Potts D. M., Numerical analysis: a virtual dream or practical reality? „Geotechnique” 2003, vol.53, No.6, s. 535–573.

[6] Britto A.M., Gunn M.J., Critical state soil mechanics via finite elements. Ellis Horwood, Chichester 1987.
[7] Fedorowicz L., Fedorowicz J., Adekwatność numerycznych modeli obliczeniowych konstrukcja-podłoże gruntowe, „Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej” 2003, seria Budownictwo, z. 97, s. 65–74.
[8] Fedorowicz L., Zagadnienie kontaktowe budowla-podłoże gruntowe. Część I. Kryteria modelowania i analiz podstawowych zagadnień kontaktowych konstrukcja budowlana – podłoże gruntowe, „Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej” 2006, seria Budownictwo [w druku].
[9] Witun Z., Zarys geotechniki. Wydawnictwo Komunikacji i Łączności, Warszawa 2000.
[10] Whitlow R., Basic soil mechanics. Logman Group Limited, Edinburgh Gate, 1995.
[11] Mair R.J., Wood D.M., Pressuremeter testing-methods and interpretation. CIRIA Ground Engineering Report: In-situ testing, CIRIA and Butterworths, London 1987.
[12] Fedorowicz L., Fedorowicz J., Rola współczynnika parcia geostaticznego K_0 w analizach geotechnicznych i sposoby jego oceny, „Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Technicznej w Katowicach” 2014, nr 6, s. 35–54.
[13] Dudko-Pawłowska I., Kowalska M., Badania edometryczne iltów zalegających w podłożu magazynu Centrum Logistycznego w Tychach, „Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Teoretyczne i praktyczne aspekty geotechniki” 2007, z. 111, s. 127–140.
[14] Gryczmański M., Wprowadzenie do opisu sprężysto-plastycznych modeli gruntu. Wydawnictwo PAN KILiW IPPT, Warszawa 1995.
[15] Fedorowicz L., Kadela M., Recreation of Small Strains Phenomenon under Pavement Structure and Consequences of Failure to Address It, IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, Vol. 245, no. 2, 022005, doi: 10.1088/1757-899X/245/2/022005, 2017.
[16] Fedorowicz L., Kadela M.: Model calibration of line construction-subsoil assisted by experimental research, „AGH Journal of Mining and Geoenvironment”, T. 36, nr 1, s. 155–164, 2012.
[17] Kadela M., Fedorowicz L., Model obliczeniowy układu konstrukcja warstwowa – podłoże gruntowe zgodnie z EC7, „Acta Scientiarum Polonorum. Architectura”, T. 12, nr 3, s. 17–25, 2013.

DOI: 10.5604/01.3001.0015.0411

PRAWIDŁOWY SPOŚÓB CYTOWANIA
Fedorowicz Lidia, Fedorowicz Jan, 2021, Złożone modele konstytutywne w analizach badawczych i obliczeniach inżynierskich. Podstawy analiz zadań kontaktowych, „Builder” 8 (289). DOI: 10.5604/01.3001.0015.0411

Streszczenie: Aby stać się w pełni świadomym użytkownikiem współczesnych systemów obliczeniowych, nasza wiedza inżynierska powinna sięgać „korzeni”, tu w zakresie mechaniki gruntów oraz modeli konstytutywnych pozwalających coraz pełniej opisywać zachowanie gruntu. W artykule przedstawiono specyfikę dwóch grup modeli gruntowych stosowanych w analizach zagadnień kontaktowych budowla-podłoże gruntowe, pokazując równocześnie ich możliwości i ograniczenia przy ocenie bazowych zagadnień geotechniki. Zwrócono uwagę na warunki prawidłowej budowy modelu obliczeniowego podłoża. Pokazano zalety modelu stanu krytycznego MCC, ze zwróceniem uwagi na związek prawidłowej oceny stanu *in situ* podłoża z wynikami przeprowadzonej analizy.

Słowa kluczowe: modele konstytutywne, zagadnienia kontaktowe, modele stanu krytycznego

Abstract: COMPLEX CONSTITUTIVE MODELS IN RESEARCH ANALYSIS AND ENGINEERING CALCULATIONS. Basics of analysis of contact tasks. In order to become a fully conscious user of modern computing systems, our engineering knowledge should reach the "roots", here in the field of soil mechanics and constitutive models, allowing for a more and more complete description of soil behavior. The article presents the specificity of two groups of soil models used in the analysis of the contact tasks: building structure – subsoil; showing at the same time their possibilities and limitations in the assessment of the basic issues of geotechnics. The conditions for the correct construction of the computational model of the subsoil have been taken into account. The advantages of the MCC critical state model are shown, with attention being paid to the relationship between the correct *in situ* state assessment of the substrate and the results of the analysis.

Keywords: constitutive models, contact issues, critical state model