

Kamil SZOSTEK

Akademia Górniczo Hutnicza, Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej (*Student*)
AGH University of Science and Technology, Faculty of Electrical Engineering, Automatics, Computer Science and Biomedical Engineering (*Student*)

ANALIZA DYNAMIKI CIAŁA PORUSZAJĄCEGO SIĘ W UKŁADZIE OBROTOWYM - SZCZEGÓŁOWE WYPROWADZENIE SIŁY CORIOLISA**Streszczenie**

Wstęp i cele: W artykule wyprowadzone zostały równania, które pozwalają przeliczyć położenie, prędkość oraz przyspieszenie ciała punktowego mierzone w układzie obrotowym do położenia, prędkości oraz przyspieszenia mierzonego w układzie inercyjnym.

Materiał i metody: W pracy zastosowano metodę dedukcji matematycznej.

Wyniki: Równanie otrzymane dla przyspieszenia posiada trzy składowe, z których jedna to siła dośrodkowa, natomiast druga to siła Coriolisa. Przedstawiona została także dyskusja na temat wyprowadzonego równania.

Wniosek: W artykule został przedstawiony precyzyjniejszy zapis wzoru na prędkość oraz przyspieszenie w układzie inercyjnym niż obecnie stosowane. Pokazane zostało na przykładzie, że przyspieszenie Coriolisa nie jest niezależne od przyspieszenia dośrodkowego. W rozważanym przykładzie te dwa przyspieszenia przeciwdziałały sobie nawzajem.

Słowa kluczowe: Dynamika w układzie obrotowym, siła Coriolisa, siła dośrodkowa, siła odśrodkowa.

(Otrzymano: 02.10.2018; Zrecenzowano: 10.10.2018; Zaakceptowano: 25.10.2018)

ANALYSIS OF BODY DYNAMICS MOVING IN A ROTATING SYSTEM - DETAILED DERIVATION OF CORIOLIS FORCE**Abstract**

Introduction and aim: The article derives equations that allow the conversion of the position, velocity and acceleration of a point body measured in a rotational system to the position, velocity and acceleration measured in an inertial system.

Material and methods: Mathematical deduction method has been used in the paper.

Results: The equation obtained for acceleration has three components, one of which is centripetal force, while the other is Coriolis force. A discussion on the derived equation was also presented.

Conclusion: The article presents a more precise record of the formula for speed and acceleration in an inertial system. It is shown on the example that Coriolis acceleration is not independent of centripetal acceleration. In the example under consideration these two accelerations counteracted each other.

Key words: Rotational dynamics, Coriolis force, centripetal force, centrifugal force.

(Received: 02.10.2018; Revised: 10.10.2018; Accepted: 25.10.2018)

1. Wprowadzenie

W artykule wyprowadzone zostały równania, które pozwalają przeliczyć położenie, prędkość oraz przyspieszenie ciała punktowego mierzone w układzie obrotowym do położenia, prędkości oraz przyspieszenia mierzonego w układzie inercyjnym. Wyprowadzone zostały także równania, które realizują te przeliczenia w odwrotną stronę.

Wszystkie obliczenia są wykonane w ramach mechaniki klasycznej.

W artykule będziemy posługiwali się przyspieszeniem, a nie siłą. Ze względu na II zasadę dynamiki Newtona

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}, \quad (1)$$

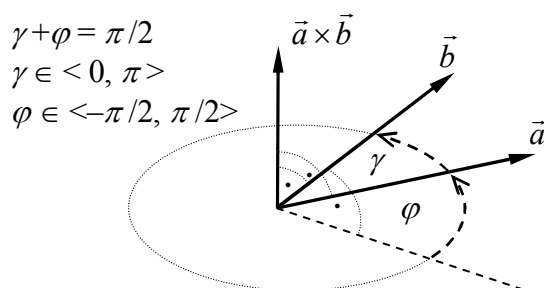
przyspieszenie jest identycznym wektorem jak siła działająca na ciało o masie 1 kg. Dlatego, aby z wektora przyspieszenia otrzymać wektor siły, wystarczy pomnożyć go przez masę ciała, którego to przyspieszenie dotyczy.

2. Iloczyn wektorowy

Wyprowadzone zależności będą zapisywane także przy pomocy iloczynu wektorowego. Dlatego na początku przedstawione zostaną podstawowe własności tego działania. Iloczyn wektorowy jest działaniem, które dwóm wektorom \vec{a} , \vec{b} przyporządkowuje wektor $\vec{a} \times \vec{b}$ o następującej długości

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \gamma, \quad (2)$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi. \quad (3)$$



Rys. 1. Kierunek wektora iloczynu wektorowego

Źródło: Opracowanie własne Autora

Fig. 1. Vector direction of the cross product

Source: Elaboration of the Author

Kierunek oraz zwrot wektora iloczynu wektorowego został przedstawiony na rysunku 1. Ważne będą dla nas następujące własności iloczynu wektorowego

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \quad (4)$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{a} = \vec{0}, \quad (5)$$

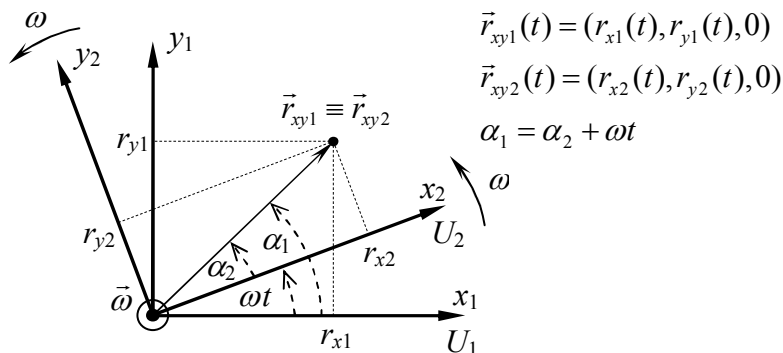
$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}, \quad (6)$$

$$(\vec{a} \neq \vec{0} \wedge \vec{b} \neq \vec{0} \wedge \sim(\vec{a} \parallel \vec{b})) \Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \wedge \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}), \quad (7)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{i}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{i}_z. \quad (8)$$

3. Przyjęte oznaczenia

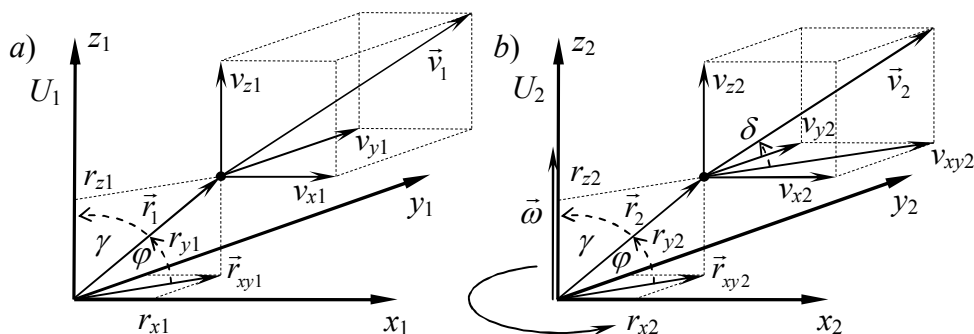
Rozważamy dwa układy odniesienia. W całym artykule przyjęte zostały następujące oznaczenie: układ U_1 jest inercyjnym układem odniesienia natomiast układ U_2 obraca się względem układu U_1 ze stałą prędkością kątową ω . Oś x_1 oraz y_1 układu U_1 znajdują się w jednej płaszczyźnie z osiami x_2 oraz y_2 układu U_2 (rysunek 2). W chwili $t=0$ oś x_1 pokrywa się z osią x_2 oraz oś y_1 pokrywała się z osią y_2 .



Rys. 2. Położenie ciała widziane w inercyjnym układzie odniesienia U_1 oraz układzie obrotowym U_2
 Źródło: Opracowanie własne Autora

Fig. 2. Position of the body seen in the inertial reference system U_1 and the rotational system U_2
 Source: Elaboration of the Author

Osie z_1 oraz z_2 pokrywają się w każdej chwili czasu. Wokół tych osi obraca się układ obrotowy U_2 .



Rys. 3. Składowe prędkości ciała punkowego widziane z różnych układów odniesienia
 a) układ inercyjny U_1 , b) układ obrotowy U_2
 Źródło: Opracowanie własne Autora

Fig. 3. Body velocity components seen from different reference systems
 a) inertial frame of reference U_1 , b) rotary system U_2
 Source: Elaboration of the Author

Na rysunku 3 przedstawione są składowe prędkości poruszającego się ciała punkowego. Symbolem \vec{r}_1 oznaczony jest wektor wodzący (wskazujący położenie tego ciała) widziany w układzie inercyjnym U_1 . Ten sam wektor wodzący jest widziany w układzie obrotowym jako \vec{r}_2 . Wektor \vec{r}_{xy1} jest rzutem wektora wodzącego \vec{r}_1 na płaszczyznę x_1 - y_1 układu U_1 , natomiast wektor \vec{r}_{xy2} jest rzutem wektora wodzącego \vec{r}_2 na płaszczyznę x_2 - y_2 układu U_2 . Ponieważ te płaszczyzny się pokrywają, dlatego wektory \vec{r}_{xy1} oraz \vec{r}_{xy2} są tym samym wektorem, ale przedstawionym przy pomocy innych współrzędnych (w różnych układach odniesienia). W związku z tym długości tych wektorów są identyczne. Na tej podstawie zachodzą równości

$$|\vec{r}_1(t)| = |\vec{r}_2(t)| = \sqrt{r_{x1}^2(t) + r_{y1}^2(t) + r_{z1}^2(t)} = \sqrt{r_{x2}^2(t) + r_{y2}^2(t) + r_{z2}^2(t)}, \quad (9)$$

$$|\vec{r}_{xy1}(t)| = |\vec{r}_{xy2}(t)| = \sqrt{r_{x1}^2(t) + r_{y1}^2(t)} = \sqrt{r_{x2}^2(t) + r_{y2}^2(t)}, \quad (10)$$

$$|\vec{r}_{xy1}(t)| = |\vec{r}_{xy2}(t)| = |\vec{r}_1(t)| \cos(\varphi) = |\vec{r}_2(t)| \cos(\varphi) = |\vec{r}_1(t)| \sin(\gamma) = |\vec{r}_2(t)| \sin(\gamma), \quad (11)$$

$$\vec{r}_{xy1}(t) \perp \vec{\omega} \quad \wedge \quad \vec{r}_{xy2}(t) \perp \vec{\omega}. \quad (12)$$

Wektor wodzący \vec{r}_1 jest identyczny jak wektor wodzący \vec{r}_2 , to znaczy w przestrzeni te dwa wektory pokrywają się. Ale wektory te są opisane innymi współrzędnymi. Pierwszy z nich jest opisany współrzędnymi w układzie U_1 , natomiast drugi jest opisany współrzędnymi w układzie U_2

$$\vec{r}_1 = (r_{x1}, r_{y1}, r_{z1}) = \vec{r}_1(t) = (r_{x1}(t), r_{y1}(t), r_{z1}(t)), \quad (13)$$

$$\vec{r}_2 = (r_{x2}, r_{y2}, r_{z2}) = \vec{r}_2(t) = (r_{x2}(t), r_{y2}(t), r_{z2}(t)). \quad (14)$$

Każdy wektor jest opisany przy pomocy swoich współrzędnych, dlatego nie będziemy zapisywali, że takie wektory \vec{r}_1 oraz \vec{r}_2 są równe. Dla takich przestrzennie identycznych wektorów będziemy zapisywali

$$\vec{r}_1 \equiv \vec{r}_2. \quad (15)$$

Dla prędkości przedstawionych na rysunku 3 zachodzi

$$|\vec{v}_1(t)| = \sqrt{v_{x1}^2(t) + v_{y1}^2(t) + v_{z1}^2(t)}, \quad (16)$$

$$|\vec{v}_2(t)| = \sqrt{v_{x2}^2(t) + v_{y2}^2(t) + v_{z2}^2(t)}, \quad (17)$$

$$|\vec{v}_{xy2}(t)| = \sqrt{v_{x2}^2(t) + v_{y2}^2(t)} = |\vec{v}_2(t)| \cos(\delta), \quad (18)$$

$$\vec{v}_{xy2}(t) \perp \vec{\omega}, \quad (19)$$

$$\vec{r}_1 \equiv \vec{r}_2 \neq \vec{0} \Rightarrow [(\vec{v}_1(t) \equiv \vec{v}_2(t)) \Leftrightarrow \omega = 0]. \quad (20)$$

Dla przyjętych układów odniesienia oraz oznaczeń, wektor obrotu ma identyczne współrzędne w układzie U_1 oraz U_2 , czyli w tym przypadku możemy zapisać, że

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 = \vec{\omega} = (0, 0, \omega). \quad (21)$$

Na tej podstawie dla długości wektora obrotu przyjmujemy oznaczenie

$$\omega = |\vec{\omega}|. \quad (22)$$

4. Przeliczanie położenia z układu obrotowego do inercjalnego

Dla układów przedstawionych na rysunkach 2 oraz 3 macierz obrotu ma postać

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Warto zauważyć, że przemnożenie macierzy A przez wektor wyrażony przez współrzędne układu U_2 wyraża współrzędne tego samego wektora przez współrzędne układu U_1 . Mnożenie macierzy A przez wektor nie zmienia długości, zwrotu oraz kierunku wektora tylko przedstawia ten sam wektor w innym układzie współrzędnych.

Zgodnie z powyższym równanie pozwalające przeliczyć współrzędne ciała z układu U_2 do współrzędnych tego ciała w układzie U_1 ma postać

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} r_{x1}(t) \\ r_{y1}(t) \\ r_{z1}(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} r_{x2}(t) \\ r_{y2}(t) \\ r_{z2}(t) \end{bmatrix} = A\vec{r}_2. \quad (24)$$

Równanie to możemy zapisać w innej postaci

$$\begin{bmatrix} r_{x1}(t) \\ r_{y1}(t) \\ r_{z1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{x2}(t) \\ r_{y2}(t) \\ r_{z2}(t) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} r_{x1}(t) \\ r_{y1}(t) \\ r_{z1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t)r_{x2}(t) - \sin(\omega t)r_{y2}(t) \\ \sin(\omega t)r_{x2}(t) + \cos(\omega t)r_{y2}(t) \\ r_{z2}(t) \end{bmatrix}. \quad (26)$$

5. Przeliczanie prędkości z układu obrotowego do inercjalnego

Wektor prędkości jest pochodną po czasie wektora położenia. Na podstawie (26) otrzymujemy

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{x1}(t) \\ v_{y1}(t) \\ v_{z1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dr_{x1}(t)}{dt} \\ \frac{dr_{y1}(t)}{dt} \\ \frac{dr_{z1}(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d(\cos(\omega t)r_{x2}(t) - \sin(\omega t)r_{y2}(t))}{dt} \\ \frac{d(\sin(\omega t)r_{x2}(t) + \cos(\omega t)r_{y2}(t))}{dt} \\ \frac{dr_{z2}(t)}{dt} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} v_{x1}(t) \\ v_{y1}(t) \\ v_{z1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega \sin(\omega t)r_{x2}(t) + \cos(\omega t)v_{x2}(t) - \omega \cos(\omega t)r_{y2}(t) - \sin(\omega t)v_{y2}(t) \\ \omega \cos(\omega t)r_{x2}(t) + \sin(\omega t)v_{x2}(t) - \omega \sin(\omega t)r_{y2}(t) + \cos(\omega t)v_{y2}(t) \\ v_{z2}(t) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} v_{x1}(t) \\ v_{y1}(t) \\ v_{z1}(t) \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} -\sin(\omega t)r_{x2}(t) - \cos(\omega t)r_{y2}(t) \\ \cos(\omega t)r_{x2}(t) - \sin(\omega t)r_{y2}(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\omega t)v_{x2}(t) - \sin(\omega t)v_{y2}(t) \\ \sin(\omega t)v_{x2}(t) + \cos(\omega t)v_{y2}(t) \\ v_{z2}(t) \end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} v_{x1}(t) \\ v_{y1}(t) \\ v_{z1}(t) \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} -\sin(\omega t) & -\cos(\omega t) & 0 \\ \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{x2}(t) \\ r_{y2}(t) \\ r_{z2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x2}(t) \\ v_{y2}(t) \\ v_{z2}(t) \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Wprowadźmy oznaczenie dla następującej macierzy

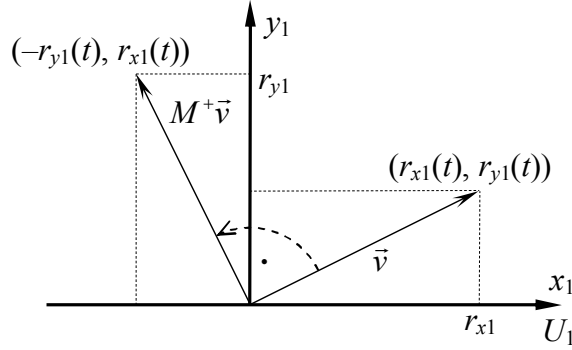
$$M^+ = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Mnożenie macierzy M^+ przez wektor powoduje wykonanie obrotu składowej tego wektora (leżącej w płaszczyźnie x_2 - y_2) o $\pi/2$ radianów w kierunku pokazanym na rysunku 4. Składowa z -etowa wektora jest zerowana.

Warto zauważyć, że, jeżeli obliczymy pochodną po czasie macierzy A przedstawionej w (23), wtedy otrzymamy

$$A' = \omega \begin{bmatrix} -\sin(\omega t) & -\cos(\omega t) & 0 \\ \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$A' = \omega \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \omega M^+ A. \quad (33)$$



Rys. 4. Działanie macierzy obrotu M^+
Źródło: Opracowanie własne Autora

Fig. 4. Operation of the M^+ rotation matrix
Source: Elaboration of the Author

Ostatecznie po uwzględnieniu (23) oraz (32) możemy równanie (30) zapisać w postaci

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{x1}(t) \\ v_{y1}(t) \\ v_{z1}(t) \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} r_{x2}(t) \\ r_{y2}(t) \\ r_{z2}(t) \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} v_{x2}(t) \\ v_{y2}(t) \\ v_{z2}(t) \end{bmatrix} = A' \vec{r}_2 + A \vec{v}_2 = \omega M^+ A \vec{r}_2 + A \vec{v}_2. \quad (34)$$

Z równania (34) bezpośrednio wynika, dlaczego prawdziwe jest równanie (20). Na wektor \vec{v}_1 składa się nie tylko wektor \vec{v}_2 , ale także inny wektor zależny od wektora wodzącego \vec{r}_2 .

Warto zauważyć, że z powodu występowania samych zer w trzeciej kolumnie macierzy A' wartość równania (34) nie zależy od trzeciej składowej wektora wodzącego. Dlatego równanie to można zapisać w postaci

$$\vec{v}_1 = A' \begin{bmatrix} r_{x2}(t) \\ r_{y2}(t) \\ 0 \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} v_{x2}(t) \\ v_{y2}(t) \\ v_{z2}(t) \end{bmatrix} = A' \vec{r}_{xy2} + A \vec{v}_2. \quad (35)$$

Przy okazji powyższych rachunków wykazane zostało, że pochodna z iloczynu macierzy i wektora jest liniowa tak samo jak pochodna z iloczynu funkcji, czyli

$$(A\vec{r})' = A'\vec{r} + A\vec{r}'. \quad (36)$$

Na tej podstawie równanie (34) można obliczyć z równania (24) w prostszy sposób

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{x1}(t) \\ v_{y1}(t) \\ v_{z1}(t) \end{bmatrix} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{d(A\vec{r}_2)}{dt} = A'\vec{r}_2 + A\vec{r}_2' = A' \begin{bmatrix} r_{x2}(t) \\ r_{y2}(t) \\ r_{z2}(t) \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} v_{x2}(t) \\ v_{y2}(t) \\ v_{z2}(t) \end{bmatrix} = A'\vec{r}_2 + A\vec{v}_2. \quad (37)$$

6. Własności równania przeliczającego prędkość z układu obrotowego do inercyjnego

Równanie (34) zawiera dwa składniki. Dla tych składników przyjmujemy następujące oznaczenia

$$\vec{v}_1^S = A' \begin{bmatrix} r_{x2}(t) \\ r_{y2}(t) \\ r_{z2}(t) \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} r_{x2}(t) \\ r_{y2}(t) \\ 0 \end{bmatrix} = A' \vec{r}_2 = \omega M^+ A \vec{r}_2, \quad (38)$$

$$\vec{v}_1^P = A \begin{bmatrix} v_{x2}(t) \\ v_{y2}(t) \\ v_{z2}(t) \end{bmatrix} = A \vec{v}_2. \quad (39)$$

Zbadamy teraz własności każdego z tych składników.

6.1. Składnik pierwszy - prędkość obrotowa (styczna)

Na podstawie (10)-(11), (34) oraz oznaczeń przyjętych na rysunku 3 wyznaczamy wartość prędkości obrotowej (38)

$$|\vec{v}_1^S| = \omega \sqrt{r_{x1}^2(t) + r_{y1}^2(t)} = \omega \sqrt{r_{x2}^2(t) + r_{y2}^2(t)} = \omega |\vec{r}_{xy1}(t)| = \omega |\vec{r}_{xy2}(t)|, \quad (40)$$

$$|\vec{v}_1^S| = \omega |\vec{r}(t)_1| \cos(\varphi) = \omega |\vec{r}_2(t)| \cos(\varphi) = \omega |\vec{r}_1(t)| \sin(\gamma) = \omega |\vec{r}_2(t)| \sin(\gamma). \quad (41)$$

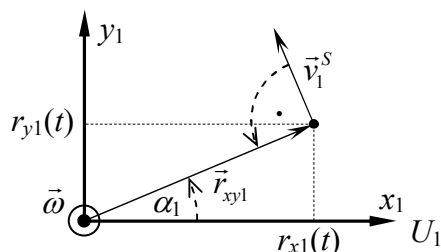
Z własności iloczynu wektorowego przedstawionych na rysunku 1 oraz równań (2), (3), (12), (40), (41) wynika, że zależność (34) można zapisać w postaci

$$\vec{v}_1^S = \vec{\omega} \times \vec{r}_{xy1} = \vec{\omega} \times \vec{r}_1, \quad (42)$$

$$\vec{v}_1^S = A(\vec{\omega} \times \vec{r}_{xy2}) = A(\vec{\omega} \times \vec{r}_2). \quad (43)$$

Postać wyrażenia (43) jest inna niż powszechnie spotykana. Powszechnie nie podaje się w tej zależności mnożenia przez macierz A . Zastosowany tutaj zapis jest precyzyjniejszy, ponieważ wektor \vec{r}_2 jest opisany współrzędnymi w układzie U_2 , natomiast wynikowy wektor \vec{v}_1^S jest opisany przez współrzędne w układzie U_1 . Mnożenie przez macierz A występujące w równaniu (43) przelicza współrzędne wektora \vec{v}_1^S z układu U_2 do układu U_1 .

Z powyższego wynika, że pierwszy składnik prędkości w układzie inercyjnym jest zawsze prostopadły do promienia wodzącego oraz ma wartość proporcjonalną do długości wektora wodzącego oraz szybkości, z jaką obraca się układ obrotowy U_2 . Jest to prędkość obrotowa wynikająca z obrotu układu U_2 (rysunek 5).



Rys. 5. Kierunek prędkości stycznej
Źródło: Opracowanie własne Autora

Fig. 5. Direction tangential velocity
Source: Elaboration of the Author

6.2. Składnik drugi - przeniesienie prędkości

Z własności macierzy A (23) wynika, że drugi składnik prędkości (39) w układzie U_1 jest taką samą prędkością, jaką ma ciało w układzie obrotowym U_2 , tylko zapisaną we współrzędnych układu U_1 .

6.3. Ostateczna postać równania przeliczającego prędkość

Na podstawie (34), (38)-(39) oraz (42) otrzymujemy zwartą postać równania, które pozwalają przeliczyć położenie oraz prędkość ciała punktowego mierzone w układzie obrotowym do prędkości mierzonej w układzie inercyjnym, w postaci

$$\vec{v}_1 = A' \vec{r}_2 + A \vec{v}_2 = A(\vec{\omega} \times \vec{r}_2 + \vec{v}_2). \quad (44)$$

7. Przeliczanie przyspieszenia z układu obrotowego do inercyjnego

Wektor przyspieszenia jest pochodną po czasie wektora prędkości. Na podstawie (34), po uwzględnieniu twierdzenia (36), otrzymujemy

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{x1}(t) \\ a_{y1}(t) \\ a_{z1}(t) \end{bmatrix} = \frac{d(A' \vec{r}_2 + A \vec{v}_2)}{dt} = \frac{d(A' \vec{r}_2)}{dt} + \frac{d(A \vec{v}_2)}{dt}, \quad (45)$$

$$\vec{a}_1 = \frac{d(A')}{dt} \vec{r}_2 + A' \frac{d(\vec{r}_2)}{dt} + \frac{d(A)}{dt} \vec{v}_2 + A \frac{d(\vec{v}_2)}{dt} = A'' \vec{r}_2 + A' \vec{v}_2 + A' \vec{v}_2 + A \vec{a}_2. \quad (46)$$

Ostatecznie otrzymujemy zależność na przyspieszenie w układzie inercyjnym

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{x1}(t) \\ a_{y1}(t) \\ a_{z1}(t) \end{bmatrix} = A'' \begin{bmatrix} r_{x2}(t) \\ r_{y2}(t) \\ r_{z2}(t) \end{bmatrix} + 2A' \begin{bmatrix} v_{x2}(t) \\ v_{y2}(t) \\ v_{z2}(t) \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} a_{x2}(t) \\ a_{y2}(t) \\ a_{z2}(t) \end{bmatrix} = A'' \vec{r}_2 + 2A' \vec{v}_2 + A \vec{a}_2, \quad (47)$$

gdzie, na podstawie (23) oraz pochodnej obliczonej z (32), mamy

$$A'' = \frac{d^2 A}{dt^2} = \frac{d A'}{dt} = -\omega^2 \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} A = -\omega^2 M^0 A. \quad (48)$$

W wyniku mnożenia macierzy M^0 przez wektor otrzymuje się rzut tego wektora na płaszczyznę x_2 - y_2 (składowa z -etowa zostaje wyzerowana).

Warto zauważyć, że z powodu występowania samych zer w trzeciej kolumnie macierzy A' (wzór (23)) oraz w macierzy A'' wartość równania (47) nie zależy od trzeciej składowej wektora wodzącego ani od trzeciej składowej prędkości. Dlatego równanie to można zapisać w postaci

$$\vec{a}_1 = A'' \begin{bmatrix} r_{x2}(t) \\ r_{y2}(t) \\ 0 \end{bmatrix} + 2A' \begin{bmatrix} v_{x2}(t) \\ v_{y2}(t) \\ 0 \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} a_{x2}(t) \\ a_{y2}(t) \\ a_{z2}(t) \end{bmatrix} = A'' \vec{r}_{xy2} + 2A' \vec{v}_{xy2} + A \vec{a}_2. \quad (49)$$

Na podstawie (33) oraz (48) równanie (47) przyjmuje także postać

$$\vec{a}_1 = -\omega^2 M^0 A \vec{r}_2 + 2\omega M^+ A \vec{v}_2 + A \vec{a}_2. \quad (50)$$

Macierz występująca po prawej stronie równania (48) różni się do macierzy A tylko jedną wartością. W związku z tym mnożenie macierzy A'' przez wektor oznacza zrzutowanie tego

wektora na płaszczyznę x_2 - y_2 (składowa z -etowa zostaje wyzerowana). Następnie współrzędne rzutowanego wektora zostają przeniesione z układu U_2 do układu U_1 . Dodatkowo ulega zmianie jego długość ω^2 razy, a także zmianie ulega jego zwrot. Dlatego po pomnożeniu macierzy A przez wektor wodzący otrzymuje się wektor zawarty w płaszczyźnie x_1 - y_1 oraz skierowany prostopadłe do osi z_1 oraz z_2 odpowiednio układów U_1 oraz U_2 .

8. Przeliczanie położenia, prędkości oraz przyspieszenia z układu inercyjnego do układu obrotowego

Na podstawie (23) możemy obliczyć wyznacznik macierzy A

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1 \neq 0. \quad (51)$$

Wyznacznik ten nigdy nie przyjmuje wartości zerowych, dlatego zawsze istnieje macierz odwrotna A^{-1} do macierzy A . Można ją wyznaczyć bardzo łatwo, jeżeli zauważymy się, że skoro macierz A jest obrotem o kąt ωt , to macierz odwrotna A^{-1} musi być obrotem w drugą stronę, czyli o kąt $-\omega t$. Na podstawie (23) otrzymujemy

$$A^{-1} = A^{-1}(\omega t) = A(-\omega t) = \begin{bmatrix} \cos(-\omega t) & -\sin(-\omega t) & 0 \\ \sin(-\omega t) & \cos(-\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Aby wyznaczyć równania przeliczające położenie, prędkość oraz przyspieszenie z układu inercyjnego do układu obrotowego, wygodnie jest posłużyć się macierzą A^{-1} . Na podstawie (24) otrzymujemy

$$A^{-1} \begin{bmatrix} r_{x1}(t) \\ r_{y1}(t) \\ r_{z1}(t) \end{bmatrix} = A^{-1} A \begin{bmatrix} r_{x2}(t) \\ r_{y2}(t) \\ r_{z2}(t) \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} r_{x2}(t) \\ r_{y2}(t) \\ r_{z2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{x2}(t) \\ r_{y2}(t) \\ r_{z2}(t) \end{bmatrix}. \quad (53)$$

Na tej podstawie otrzymujemy równanie przeliczające położenie z układu inercyjnego do układu obrotowego

$$\vec{r}_2 = \begin{bmatrix} r_{x2}(t) \\ r_{y2}(t) \\ r_{z2}(t) \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} r_{x1}(t) \\ r_{y1}(t) \\ r_{z1}(t) \end{bmatrix} = A^{-1} \vec{r}_1. \quad (54)$$

Po obliczeniu pochodnych z (54) w sposób analogiczny jak w rozdziale 5 otrzymamy równanie przeliczające prędkość z układu inercyjnego do układu obrotowego w postaci

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{x2}(t) \\ v_{y2}(t) \\ v_{z2}(t) \end{bmatrix} = (A^{-1})' \begin{bmatrix} r_{x1}(t) \\ r_{y1}(t) \\ r_{z1}(t) \end{bmatrix} + A^{-1} \begin{bmatrix} v_{x1}(t) \\ v_{y1}(t) \\ v_{z1}(t) \end{bmatrix} = (A^{-1})' \vec{r}_1 + A^{-1} \vec{v}_1. \quad (55)$$

Po obliczeniu pochodnych z (55) w sposób analogiczny jak w rozdziale 7 otrzymamy równanie przeliczające przyspieszenie z układu inercyjnego do układu obrotowego w postaci

$$\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{x2}(t) \\ a_{y2}(t) \\ a_{z2}(t) \end{bmatrix} = (A^{-1})'' \begin{bmatrix} r_{x1}(t) \\ r_{y1}(t) \\ r_{z1}(t) \end{bmatrix} + 2(A^{-1})' \begin{bmatrix} v_{x1}(t) \\ v_{y1}(t) \\ v_{z1}(t) \end{bmatrix} + A^{-1} \begin{bmatrix} a_{x1}(t) \\ a_{y1}(t) \\ a_{z1}(t) \end{bmatrix}, \quad (56)$$

$$\vec{a}_2 = (A^{-1})'' \vec{r}_1 + 2(A^{-1})' \vec{v}_1 + A^{-1} \vec{a}_1. \quad (57)$$

Pierwszą pochodną macierzy A^{-1} obliczamy na podstawie (52)

$$(A^{-1})' = \frac{dA^{-1}}{dt} = \omega \begin{bmatrix} -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ -\cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (58)$$

$$(A^{-1})' = \omega \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \omega M^{-} A^{-1}. \quad (59)$$

Macierz M^{-} , analogicznie do macierzy M^{+} , nie wpływa na długość oraz zwrot wektora, a jedynie na jego kierunek. Mnożenie macierzy M^{-} przez wektor obraca ten wektor o $\pi/2$ radianów w kierunku ujemnym (w drugą stronę niż pokazano na rysunku 4).

Druga pochodną macierzy A^{-1} obliczamy na podstawie (58)

$$(A^{-1})'' = \frac{d(A^{-1})'}{dt} = -\omega^2 \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (60)$$

$$(A^{-1})'' = -\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -\omega^2 M^0 A^{-1}. \quad (61)$$

Teraz równania (55) oraz (57) można zapisać w postaci

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{x2}(t) \\ v_{y2}(t) \\ v_{z2}(t) \end{bmatrix} = \omega M^{-} A^{-1} \vec{r}_1 + A^{-1} \vec{v}_1, \quad (62)$$

$$\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{x2}(t) \\ a_{y2}(t) \\ a_{z2}(t) \end{bmatrix} = -\omega^2 M^0 A^{-1} \vec{r}_1 + 2\omega M^{-} A^{-1} \vec{v}_1 + A^{-1} \vec{a}_1. \quad (63)$$

9. Własności równania przeliczającego przyspieszenie z układu obrotowego do inercjalnego

Równanie (47) (ale także (49) oraz (50)) zawiera trzy składniki. Dla tych składników przyjmujemy następujące oznaczenia

$$\vec{a}_1^D = A'' \begin{bmatrix} r_{x2}(t) \\ r_{y2}(t) \\ r_{z2}(t) \end{bmatrix} = A'' \vec{r}_2 = -\omega^2 M^0 A \vec{r}_2, \quad (64)$$

$$\vec{a}_1^C = 2A' \begin{bmatrix} v_{x2}(t) \\ v_{y2}(t) \\ v_{z2}(t) \end{bmatrix} = 2A' \vec{v}_2 = 2\omega M^{+} A \vec{v}_2, \quad (65)$$

$$\vec{a}_1^P = A \begin{bmatrix} a_{x2}(t) \\ a_{y2}(t) \\ a_{z2}(t) \end{bmatrix} = A \vec{a}_2. \quad (66)$$

Zbadamy teraz własności każdego z tych składników.

9.1. Składnik pierwszy - przyspieszenie dośrodkowe

Składnik (64) ma na podstawie (48) postać

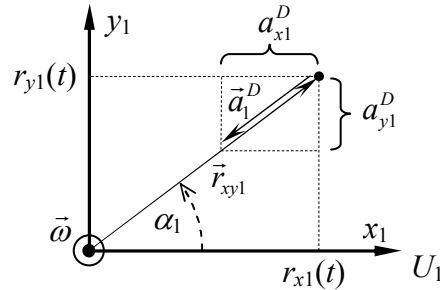
$$\vec{a}_1^D = \begin{bmatrix} a_{x1}^D(t) \\ a_{y1}^D(t) \\ a_{z1}^D(t) \end{bmatrix} = A'' \begin{bmatrix} r_{x2}(t) \\ r_{y2}(t) \\ r_{z2}(t) \end{bmatrix} = -\omega^2 \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{x2}(t) \\ r_{y2}(t) \\ r_{z2}(t) \end{bmatrix}, \quad (67)$$

$$\vec{a}_1^D = -\omega^2 \begin{bmatrix} \cos(\omega t)r_{x2}(t) - \sin(\omega t)r_{y2}(t) \\ \sin(\omega t)r_{x2}(t) + \cos(\omega t)r_{y2}(t) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (68)$$

Na podstawie (26) oraz oznaczeń przyjętych na rysunku 2 otrzymujemy

$$\vec{a}_1^D = \begin{bmatrix} a_{x1}^D(t) \\ a_{y1}^D(t) \\ 0 \end{bmatrix} = -\omega^2 \begin{bmatrix} r_{x1}(t) \\ r_{y1}(t) \\ 0 \end{bmatrix} = -\omega^2 \vec{r}_{xy1}. \quad (69)$$

Z równania (69) wynika, że wektory \vec{a}_1^D oraz \vec{r}_{xy1} są do siebie równoległe. Znak minus oznacza, że wektory te mają przeciwne zwroty. Zostało to przedstawione na rysunku 6.



Rys. 6. Kierunek przyspieszenia dośrodkowego

Źródło: Opracowanie własne Autora

Fig. 6. Direction centripetal acceleration

Source: Elaboration of the Author

Wektory te są równoległe ponieważ na podstawie (69) zachodzą równości

$$\operatorname{tg}(\alpha_1) = \frac{a_{y1}^D(t)}{a_{x1}^D(t)} = \frac{r_{y1}(t)}{r_{x1}(t)}. \quad (70)$$

Ponieważ trzeci składnik wektora \vec{a}_1^D ma wartość zerową dlatego wektor ten zawsze jest skierowany prostopadłe do osi obrotu z_1 (zawsze znajduje się w płaszczyźnie x_1 - y_1). Wynika z tego, że wektor \vec{a}_1^D jest, widzianym w układzie U_1 , przyspieszeniem dośrodkowym.

Na podstawie (64), (69) oraz (10)-(11) dla oznaczeń przyjętych na rysunku 3 wyznaczamy wartość przyspieszenia dośrodkowego

$$|\vec{a}_1^D| = |A'' \vec{r}_2| = \omega^2 \sqrt{r_{x1}^2(t) + r_{y1}^2(t)} = \omega^2 \sqrt{r_{x2}^2(t) + r_{y2}^2(t)} = \omega^2 |\vec{r}_{xy1}| = \omega^2 |\vec{r}_{xy2}|, \quad (71)$$

$$|\vec{a}_1^D| = \omega^2 |\vec{r}_1| \cos(\varphi) = \omega^2 |\vec{r}_2| \cos(\varphi) = \omega^2 |\vec{r}_1| \sin(\gamma) = \omega^2 |\vec{r}_2| \sin(\gamma). \quad (72)$$

Z własności iloczynu wektorowego przedstawionych na rysunku 1 oraz równań (2), (3), (4), (12), (71), (72) wynika, że zależność (69) można zapisać w postaciach

$$\vec{a}_1^D = -(\vec{\omega} \times \vec{r}_{xy1}) \times \vec{\omega} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{xy1}) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_1), \quad (73)$$

$$\vec{a}_1^D = -A[(\vec{\omega} \times \vec{r}_{xy2}) \times \vec{\omega}] = A[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{xy2})] = A[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_2)]. \quad (74)$$

Wzór (74) różni się od wzoru (73). We wzorze (74) wektor przyspieszenia dośrodkowego jest obliczany na podstawie wektora wodzącego opisanego współrzędnymi układu U_2 .

W równaniu (74), podobnie jak w równaniu (43) występuje mnożenie przez macierz A . Dzięki tej operacji współrzędne wektora \vec{a}_1^D są przeliczane z układu U_2 do układu U_1 .

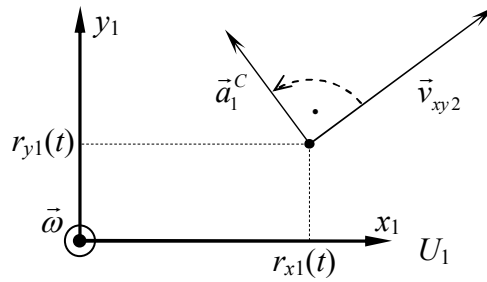
9.2. Składnik drugi - przyspieszenie Coriolisa

Na podstawie (33) równanie (65) możemy zapisać w postaci

$$\vec{a}_1^C = 2\omega M^+ A \begin{bmatrix} v_{x2}(t) \\ v_{y2}(t) \\ 0 \end{bmatrix} = 2\omega M^+ A \vec{v}_{xy2}. \quad (75)$$

Na podstawie własności macierzy A (23) oraz macierzy M^+ (31), a także tego, że mnożenie przez skalar 2ω wpływa jedynie na zmianę długości wektora wnioskujemy, że \vec{a}_1^C jest wektorem w płaszczyźnie x_1 - y_1 oraz jest obrócony względem wektora \vec{v}_{xy2} o $\pi/2$ radianów w kierunku dodatnim. Przyspieszenie Coriolisa jest zawsze prostopadłe do prędkości z jaką ciało porusza się w płaszczyźnie x_1 - y_1 .

Warto także zauważyć, że przemnożenie wektora prędkości v_2 przez macierz M^+ , a co za tym idzie przez A' zeruje jego trzecią składową. Oznacza to, że przyspieszenie Coriolisa \vec{a}_1^C , jak również pochodząca od niego siła Coriolisa działają jedynie w płaszczyźnie x_1 - y_1 prostopadłej do osi z (rysunek 7).



Rys. 7. Kierunek przyspieszenia Coriolisa

Źródło: Opracowanie własne Autora

Fig. 7. The direction of the Coriolis acceleration

Source: Elaboration of the Author

Na podstawie (65), (75) oraz dla oznaczeń przyjętych na rysunku 3 wyznaczamy wartość przyspieszenia Coriolisa

$$|\vec{a}_1^C| = |2A' \vec{v}_2| = 2\omega \sqrt{v_{x2}^2(t) + v_{y2}^2(t)} = 2\omega |\vec{v}_{xy2}|, \quad (76)$$

$$|\vec{a}_1^C| = 2\omega |\vec{v}_2| \cos(\delta). \quad (77)$$

Z własności iloczynu wektorowego przedstawionych na rysunku 1 oraz równań (2), (3), (12), (76), (77) wynika, że zależność (75) można zapisać w postaciach

$$\vec{a}_1^C = 2A(\vec{\omega} \times \vec{v}_{xy2}) = 2A(\vec{\omega} \times \vec{v}_2). \quad (78)$$

W równaniu (78), podobnie jak w równaniach (43) oraz (74) występuje mnożenie przez macierz A . Dzięki tej operacji współrzędne wektora \vec{a}_1^C są przeliczane z układu U_2 do układu U_1 .

9.3. Składnik trzeci - przeniesienie przyspieszenia

Z własności macierzy A (23) wynika, że trzeci składnik przyspieszenia (66) w układzie U_1 jest takim samym przyspieszeniem jakie ma ciało w układzie obrotowym U_2 , tylko zapisanym we współrzędnych układu U_1 .

9.4. Ostateczna postać równania przeliczającego przyspieszenie

Na podstawie (47), (64)-(66), (74) oraz (78) otrzymujemy zwartą postać równania, które pozwalają przeliczyć położenie, prędkość oraz przyspieszenie ciała punktowego mierzone w układzie obrotowym do przyspieszenia mierzonego w układzie inercyjnym, w postaci

$$\vec{a}_1 = A[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_2) + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_2) + \vec{a}_2]. \quad (79)$$

10. Przykłady

10. 1. Ciało spoczywa w układzie obrotowym

Przeanalizujmy przykład, w którym ciało nie porusza się względem układu U_2 . Wtedy prawdziwe są równania

$$\vec{r}_2 = \begin{bmatrix} r_{x2}(t) \\ r_{y2}(t) \\ r_{z2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{x2} \\ r_{y2} \\ r_{z2} \end{bmatrix} = const, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{x2}(t) \\ v_{y2}(t) \\ v_{z2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{x2}(t) \\ a_{y2}(t) \\ a_{z2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (80)$$

Na podstawie (34), (44) oraz (80) uzyskujemy

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{x1}(t) \\ v_{y1}(t) \\ v_{z1}(t) \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} r_{x2} \\ r_{y2} \\ r_{z2} \end{bmatrix} = \omega M^+ A \vec{r}_2 = A[\vec{\omega} \times \vec{r}_2] = \vec{\omega} \times \vec{r}_1. \quad (81)$$

Na podstawie (38) widać, że w tym przykładzie prędkość ciała w układzie inercyjnym U_1 ma tylko pierwszy składnik \vec{v}_1^S pokazany na rysunku 5.

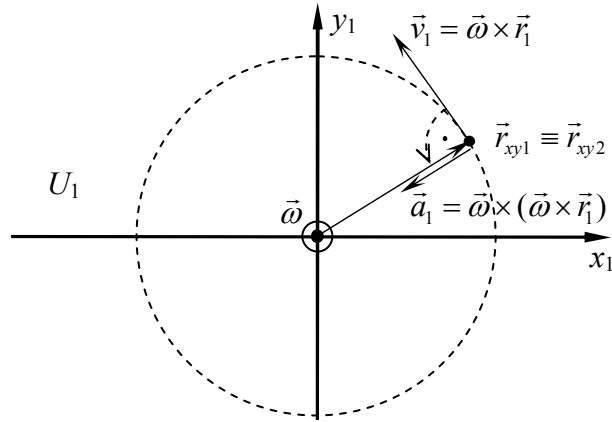
Po uwzględnieniu (50), (79) oraz (80) uzyskujemy

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{x1}(t) \\ a_{y1}(t) \\ a_{z1}(t) \end{bmatrix} = A'' \begin{bmatrix} r_{x2} \\ r_{y2} \\ r_{z2} \end{bmatrix} = -\omega^2 M^0 A \vec{r}_2 = A[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_2)] = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_1). \quad (82)$$

Na podstawie (64) widać, że w tym przykładzie przyspieszenie ciała w układzie inercyjnym U_1 ma tylko pierwszy składnik \vec{a}_1^D pokazany na rysunku 6.

Podsumowując, ciało widziane z układu U_2 nie porusza się, natomiast z punktu widzenia układu U_1 porusza się po okręgu z prędkością o stałej wartości. Wektor prędkości \vec{v}_1 jest

styczny do tego okręgu natomiast przyspieszenie \vec{a}_1 jest skierowane do środka tego okręgu i jest przyspieszeniem dośrodkowym. Jest to klasyczny przypadek ruchu ciała po okręgu przedstawiony na rysunek 8.



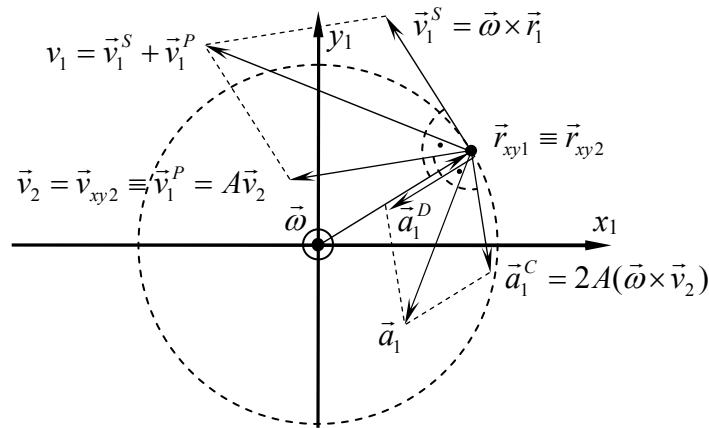
Rys. 8. Dynamika ciała w układzie inercyjnym U_1 , gdy ciało spoczywa w układzie obrotowym U_2
 Źródło: Opracowanie własne Autora

Fig. 8. Body dynamics in the inertial system U_1 when the body rests in the rotational system U_2
 Source: Elaboration of the Author

10.2. Ciało porusza się w układzie obrotowym ze stałą prędkością liniową

Przeanalizujemy przykład, w którym ciało porusza się w układzie U_2 po linii prostej ze stałą prędkością. Wtedy prawdziwe są równania

$$\vec{r}_2 = \begin{bmatrix} r_{x2}(t) \\ r_{y2}(t) \\ r_{z2}(t) \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{x2}(t) \\ v_{y2}(t) \\ v_{z2}(t) \end{bmatrix} = const = \begin{bmatrix} v_{x2} \\ v_{y2} \\ v_{z2} \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{x2}(t) \\ a_{y2}(t) \\ a_{z2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (83)$$



Rys. 9. Dynamika ciała w układzie inercyjnym U_1 poruszającego się w układzie obrotowym U_2 ze stałą prędkością
 Źródło: Opracowanie własne Autora

Fig. 9. Body dynamics in the inertial system U_1 moving in a rotating system U_2 at a constant speed
 Source: Elaboration of the Author

Na podstawie (34), (44) oraz (83) uzyskujemy

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{x1}(t) \\ v_{y1}(t) \\ v_{z1}(t) \end{bmatrix} = \omega M^+ A \vec{r}_2 + A \vec{v}_2 = A(\vec{\omega} \times \vec{r}_2 + \vec{v}_2) = \vec{\omega} \times \vec{r}_1 + A \vec{v}_2. \quad (84)$$

Po uwzględnieniu (50), (79) oraz (83) uzyskujemy

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{x1}(t) \\ a_{y1}(t) \\ a_{z1}(t) \end{bmatrix} = -\omega^2 M^0 A \vec{r}_2 + 2\omega M^+ A \vec{v}_2 = A[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_2) + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_2)]. \quad (85)$$

Warto zauważyć, że z (49) wynika, że trzecia składowa prędkości \vec{v}_2 oraz trzecia składowa położenia \vec{r}_2 nie wpływają na przyspieszenie w układzie inercyjnym. Dlatego w tym przypadku wektor przyspieszenia ciała w układzie U_1 znajduje się w płaszczyźnie x_1 - y_1 .

W ogólnym przypadku wektor prędkości \vec{v}_2 nie musi się znajdować w płaszczyźnie x_2 - y_2 . Na rysunku 9 dla przejrzystości wektory prędkości oraz przyspieszenia zostały przedstawione w uproszczonym przypadku, gdy $\vec{v}_2 = \vec{v}_{xy2}$, czyli, gdy wektor ten znajduje się w płaszczyźnie x_2 - y_2 .

10.3. Ciało porusza się z dowolnym przyspieszeniem

Przeanalizujemy przykład, w którym ciało porusza się w układzie U_2 po linii prostej ze stałą prędkością. Wtedy prawdziwe są równania

$$\vec{r}_2 = \begin{bmatrix} r_{x2}(t) \\ r_{y2}(t) \\ r_{z2}(t) \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{x2}(t) \\ v_{y2}(t) \\ v_{z2}(t) \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{x2}(t) \\ a_{y2}(t) \\ a_{z2}(t) \end{bmatrix}. \quad (86)$$

Zgodnie z (34), (44) prędkość w układzie inercyjnym U_1 wyraża się wzorem

$$\vec{v}_1 = \omega M^+ A \vec{r}_2 + A \vec{v}_2 = A(\vec{\omega} \times \vec{r}_2 + \vec{v}_2) = \vec{\omega} \times \vec{r}_1 + A \vec{v}_2. \quad (87)$$

Zgodnie z (50), (79) przyspieszenie w układzie inercyjnym U_1 wyraża się wzorem

$$\vec{a}_1 = -\omega^2 M^0 A \vec{r}_2 + 2\omega M^+ A \vec{v}_2 + A \vec{a}_2 = A[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_2) + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_2) + \vec{a}_2]. \quad (88)$$

W tym ogólnym przypadku z (49) wynika tak samo jak w przykładzie 2, że trzecia składowa prędkości \vec{v}_2 oraz trzecia składowa położenia \vec{r}_2 nie wpływają na przyspieszenie w układzie inercyjnym. Ale wektor przyspieszenia w układzie inercyjnym U_1 nie musi się znajdować w płaszczyźnie x_1 - y_1 ponieważ jego składową jest przyspieszenie \vec{a}_2 ciała w układzie U_2 , które może mieć niezerową trzecią składową.

Rozważymy szczególny przypadek tego przykładu, w którym ciało porusza się prostopadle do wektora położenia $\vec{r}_2(t)$, przeciwnie do kierunku obrotu układu U_2 względem układu U_1 . Ciało porusza się ze stałą prędkością równą prędkości liniowej układu U_2 .

Parametry ruchu ciała ustalamy w taki sposób, że ciało porusza się w układzie U_2 po okręgu natomiast z punktu widzenia układu U_1 spoczywa w miejscu. Czyli ruch ciała w obrotowym układzie U_2 całkowicie kompensuje obrót tego układu. W tym przypadku dla układu inercyjnego U_1 zachodzi

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} r_{x1}(t) \\ r_{y1}(t) \\ r_{z1}(t) \end{bmatrix} = \text{const} = \begin{bmatrix} r_{x1} \\ r_{y1} \\ r_{z1} \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{x1}(t) \\ v_{y1}(t) \\ v_{z1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{x1}(t) \\ a_{y1}(t) \\ a_{z1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (89)$$

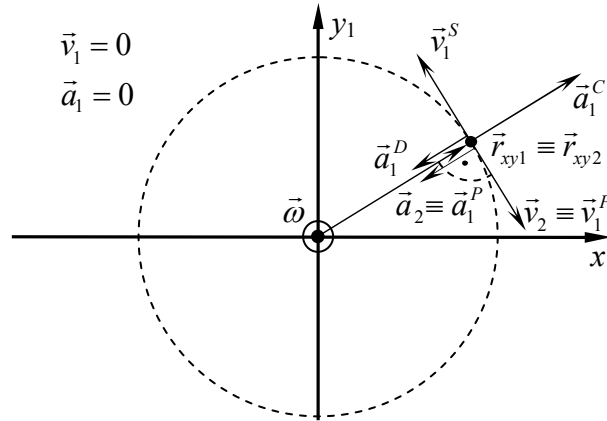
Po podstawieniu (89) do (55) mamy

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{x2}(t) \\ v_{y2}(t) \\ v_{z2}(t) \end{bmatrix} = (A^{-1})' \begin{bmatrix} r_{x1} \\ r_{y1} \\ r_{z1} \end{bmatrix} = (A^{-1})' \vec{r}_1 = \omega M^{-1} A^{-1} \vec{r}_1 = \omega M^{-1} \vec{r}_2. \quad (90)$$

Po podstawieniu (89) do (57) mamy

$$\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{x2}(t) \\ a_{y2}(t) \\ a_{z2}(t) \end{bmatrix} = (A^{-1})'' \begin{bmatrix} r_{x1} \\ r_{y1} \\ r_{z1} \end{bmatrix} = (A^{-1})'' \vec{r}_1 = -\omega^2 M^0 A^{-1} \vec{r}_1 = -\omega^2 M^0 \vec{r}_2. \quad (91)$$

Czyli jeżeli ciało ma w układzie inercyjnym spoczywać, to w układzie obrotowym musi poruszać się z prędkością (90) oraz przyspieszeniem (91).



Rys. 10. Dynamika ciała w układzie obrotowym U_2 , gdy w układzie inercyjnym U_1 ciało spoczywa

Źródło: Opracowanie własne Autora

Fig. 10. Body dynamics in the U_2 rotary system, when the body rests in the inertial system U_1

Source: Elaboration of the Author

Sprawdźmy teraz jakie wartości mają składowe prędkości (38) oraz (39) w układzie U_1 . Na podstawie (90) otrzymujemy

$$\vec{v}_1^S = A' \vec{r}_2 = \omega M^+ A \vec{r}_2, \quad (92)$$

$$\vec{v}_1^P = A \omega M^- \vec{r}_2 = \omega A M^- \vec{r}_2 = -\omega M^+ A \vec{r}_2. \quad (93)$$

Czyli

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1^S + \vec{v}_1^P = 0. \quad (94)$$

Sprawdźmy teraz jakie wartości mają składowe przyspieszenia (64), (65) oraz (66) w układzie U_1 . Na podstawie (90) oraz (91) otrzymujemy

$$\vec{a}_1^D = -\omega^2 M^0 A \vec{r}_2 = -\omega^2 A M^0 \vec{r}_2, \quad (95)$$

$$\vec{a}_1^C = 2A' \vec{v}_2 = 2\omega M^+ A \omega M^- \vec{r}_2 = 2\omega^2 M^+ A M^- \vec{r}_2 = 2\omega^2 A M^0 \vec{r}_2, \quad (96)$$

$$\vec{a}_1^P = -A \omega^2 M^0 \vec{r}_2 = -\omega^2 A M^0 \vec{r}_2. \quad (97)$$

Czyli

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_1^D + \vec{a}_1^C + \vec{a}_1^P = 0. \quad (98)$$

W równaniach (93)-(96) skorzystaliśmy z faktów, że

$$M^0 A = A M^0, \quad (99)$$

$$M^+ A = -A M^-, \quad (100)$$

$$M^+ A M^- = -A M^- M^- = -A(-M^0) = A M^0. \quad (101)$$

Z (90) wynika, że wektor prędkości \vec{v}_2 jest zwrócony o kąt $\pi/2$ w kierunku ujemnym względem wektora wodzącego $\vec{r}_1 \equiv \vec{r}_2$, czyli przeciwnie do kierunku ruchu układu U_2 .

Prędkość \vec{v}_1 oraz przyspieszenie \vec{a}_1 są równe zero, gdyż ich składowe się znoszą ((94) oraz (98)). Ciekawszy jest to, w jaki sposób znoszą się składowe przyspieszenia: \vec{a}_1^D , \vec{a}_1^C , \vec{a}_1^P .

Z (95)-(97) wynika, że przyspieszenie Coriolisa równoważy działanie przyspieszenia dośrodkowego oraz przyspieszenia wynikającego z przyspieszenia ciała w układzie U_2 . Czyli przyspieszenie Coriolisa, z perspektywy układu inercyjnego U_1 , przeciwdziała przyspieszeniu dośrodkowemu. Zostało to przedstawione na rysunku 10.

11. Symulacja numeryczna

Jeżeli dana jest trajektoria ciała w układzie obrotowym U_2 w postaci wektora wodzącego

$$\vec{r}_2(t) = \begin{bmatrix} r_{x2}(t) \\ r_{y2}(t) \\ r_{z2}(t) \end{bmatrix}, \quad (102)$$

wtedy jego trajektorię w układzie inercyjnym U_1 możemy obliczyć metodą czysto geometryczną przy pomocy wzoru (24).

Dzięki wyprowadzonym w artykule wzorom na prędkość (np. w postaci (44)) oraz na przyspieszenie (np. w postaci (79)) trajektorię ciała w układzie inercyjnym U_1 można obliczyć także metodami dynamicznymi, np. w następujący sposób:

$$\begin{aligned} r_1(0) &= A * r_2(0); & \% \text{ ustalenie położenia początkowego} \\ v_1(0) &= \omega * M^+ * A * r_2(0) + A * v_2(0); & \% \text{ ustalenie prędkości początkowej (34)} \end{aligned}$$

```
for t = 0 : 1/N : T-1
    % T czas symulacji, N liczba cykli na sekundę
    % obliczenie chwilowego c przyspieszenia ciała w układzie inercyjnym (50)
    a1(t) = -omega^2 * M^0 * A * r2(t) + 2 * omega * M^+ * A * v2(t) + A * a2(t);
    r1(t+1) = r1(t) + 1/N * v1(t);
    v1(t+1) = v1(t) + 1/N * a1(t);
end
```

Przedstawiony program wymaga jako danych wejściowych wektorów: położenia $r_2(t)$, prędkości $v_2(t)$ oraz przyspieszenia $a_2(t)$, znanych w przedziale czasu $[0, T]$. Wynikiem działania powyższego programu jest wektor położenia $r_1(t)$ w przedziale czasu $[0, T]$.

W obliczeniach numerycznych zostało sprawdzone na kilku przykładach, że trajektorie ciała w układzie inercyjnym U_1 wyznaczone metodą geometryczną bardzo dobrze pokrywają się z trajektorią tego ciała wyznaczoną metodą dynamiczną.

10. Wnioski

- W artykule przedstawione zostało szczegółowe wyprowadzenie związków pomiędzy parametrami ruchu ciała punktowego w układzie obrotowym oraz w układzie inercyjnym. Wyprowadzone zostały wzory na przyspieszenie Coriolisa oraz na przyspieszenie dośrodkowe.

- Przedstawione zostały przykłady dla wyprowadzonych wzorów oraz została przeprowadzona dyskusja na temat tych wzorów.
- Przedstawiony został precyzyjniejszy zapis wzoru na prędkość oraz przyspieszenie w układzie inercyjnym w postaciach (44) oraz (79).
- Pokazane zostało na przykładzie, że przyspieszenie Coriolisa nie jest niezależne od przyspieszenia dośrodkowego. W rozważanym przykładzie te dwa przyspieszenie przeciwdziały sobie nawzajem.

Literatura

- [1] Leyko Jerzy, *Mechanika ogólna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2005.
- [2] Królikowski Wojciech, Rubinowicz Wojciech, *Mechanika teoretyczna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2012.
- [3] Sałata Wojciech, *Mechanika ogólna w zarysie*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, 2001.