ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2015
Seria: ORGANIZACJA I ZARZĄDZANIE z. 86 Nr kol. 1946

Agata GLUZICKA
Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Informatyki i Komunikacji
agata.gluzicka@ue.katowice.pl

LINIOWE MODELE WYBORU WIELOOKRESOWYCH STRATEGII INWESTYCYJNYCH

Streszczenie. Problem wyboru portfela dla przypadku inwestycji wielookresowych najczęściej związany jest z wykorzystaniem metod stochastycznych i heurystycznych. Proces konstrukcji portfeli wielookresowych można jednak uprościć stosując takie miary ryzyka, które są sprowadzalne do postaci liniowej. W artykule przedstawione zostały modele konstrukcji wielookresowych strategii inwestycyjnych, które można zastosować wykorzystując algorytmy programowania liniowego. Zaproponowane modele zastosowane zostały do wybranych danych z Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie.

Słowa kluczowe: wielookresowe portfele inwestycyjne, liniowe miary ryzyka inwestycyjnego.

LINEAR MODELS OF SELECTION MULTIPERIOD INVESTMENT STRATEGIES

Summary. The problem of multi-period portfolio selection usually is connected with using the stochastic or heuristic methods. This process can be simplified by application these measure of risk which we can transform to the linear form. In the article the models to construction the multi-period investment decision with linear measure of risk were presented. Proposed models were applied to selected data of the Warsaw Stock Exchange.

Keywords: multi-period investment portfolio, linear measure of investment risk.

1. Wprowadzenie

W klasycznym podejściu do konstrukcji portfeli inwestycyjnych najczęściej stosowany jest model Markowitza, którego założeniem jest minimalizacja ryzyka całej inwestycji, przy ustalonym poziomie zysku. Model ten zazwyczaj stosowany jest dla przypadku jednookresowego, czyli sytuacji, kiedy inwestor decyduje się na ulokowanie swojego kapitału na pewien określony czas. W tym klasycznym podejściu nie uwzględniono jednak możliwości ponownej alokacji kapitału, co niewątpliwie jest istotnym elementem każdej inwestycji. Wziąwszy pod uwagę niestabilność rynków finansowych oraz ich wysoką zmienność, dokonywanie zmian w portfelach w trakcie trwania inwestycji wydaje się być koniecznością. Takie zmiany w portfelu inwestycyjnym mogą być dokonywane na kilka różnych sposobów. Poszczególne strategie mogą różnić się wysokością kapitału lokowanego w kolejnych podokresach. Możemy np. założyć, że inwestujemy całość kapitału uzyskaną w poprzednim okresie lub też jego część. Portfele wielookresowe, podobnie jak w przypadku jednookresowym, mogą być wyznaczane za każdym razem, przy założeniu minimalizacji ryzyka, jak również można maksymalizować zysk w początkowych podokresach, a dopiero w okresie końcowym minimalizować ryzyko inwestycji.

W literaturze przedmiotu można odnaleźć liczne przykłady podejmowania wielookresowych decyzji inwestycyjnych. Najczęściej prezentowane modele wymagają użycia wysoce wyspecjalizowanych narzędzi i metod obliczeniowych, np. metod stochastycznych czy heurystycznych. W analizie portfelowej możliwe jest jednak stosowanie modeli optymalizacyjnych, do rozwiązania których wystarczają metody programowania liniowego. Możliwość taka zachodzi w przypadku, gdy do pomiaru ryzyka inwestycyjnego wykorzystujemy miary sprowadzalne do postaci liniowej. Przykładem takich miar są: średnie odchylenie bezwzględne (*mean absolute deviation*), średnia różnica Giniego (*Gini's mean difference*) czy warunkowa wartość zagrożona (*conditional value at risk*).

W pierwszej części artykułu pokrótce omówione zostały miary ryzyka, które można zastosować w liniowych modelach wyboru portfeli inwestycyjnych. W kolejnej części artykułu przedstawione zostały dwie różne strategie wyboru wielookresowych portfeli inwestycyjnych. Następnie zaproponowane modele wyboru wielookresowych strategii inwestycyjnych zostały zastosowane dla wybranej grupy danych z Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. Wyniki stosowania zaprezentowanych strategii inwestycyjnych omówione zostały w ostatniej części artykułu.

2. Wybrane liniowe miary ryzyka

Do miar ryzyka inwestycyjnego, które można sprowadzić do postaci liniowej zaliczamy m.in. średnie odchylenie bezwzględne, średnią różnicę Giniego oraz warunkową wartość zagrożoną. Dotychczas najczęściej miary te stosowane były do wyznaczania jednookresowych portfeli inwestycyjnych. Zazwyczaj analizy dotyczyły portfeli konstruowanych za pomocą standardowego modelu, czyli minimalizacji ryzyka portfela przy warunkach ograniczających, dotyczących stopy zwrotu portfela oraz sumy udziałów poszczególnych spółek w portfelu.

Przykładem miary ryzyka inwestycyjnego, sprowadzalnej do postaci liniowej, jest średnie odchylenie bezwzględne (MAD). Średnie odchylenie bezwzględne dla pojedynczej spółki obliczane jest jako suma iloczynów prawdopodobieństwa wystąpienia okresu t (p_t) i wartości bezwzględnych różnic stopy zwrotu spółki j-tej w okresie t ($r_{j,t}$) oraz średniej stopy zwrotu spółki j-tej (r_j) [Konno H., Yamazaki H., 1991]:

$$MAD_j = \sum_{t=1}^{T} p_t \left| r_{j,t} - r_j \right| \tag{1}$$

Średnie odchylenie bezwzględne dla portfela złożonego z N spółek o udziałach x_j (dla $j = 1, 2, \ldots, N$) definiowane jest następująco:

$$MAD_p = E\left| \sum_{j=1}^{N} r_j x_j - E\left[\sum_{j=1}^{N} r_j x_j \right] \right| \tag{2}$$

Aby średnie odchylenie bezwzględne sprowadzić do postaci liniowej, w obliczeniach należy zastosować podejście scenariuszowe i wówczas ryzyko portfela określa się wzorem:

$$MAD_p = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left| \sum_{j=1}^{N} \left(r_{j,t} - r_j \right) x_j \right| \tag{3}$$

W modelu optymalizacyjnym do wyznaczania udziałów portfela w powyższym wzorze w miejsce wartości bezwzględnej wprowadza się nieujemne zmienne dodatkowe w_t, o których zakłada się, że spełniają warunki: $w_t + \sum_{j=1}^{N} \left(r_{jt} - r_j \right) x_j \geq 0$ oraz $w_t - \sum_{j=1}^{N} \left(r_{jt} - r_j \right) x_j \geq 0$. Liniowy model optymalizacyjny stosowany do wyznaczania portfeli, dla których ryzyko mierzone jest średnim odchyleniem bezwzględnym, jest następującej postaci [Ogryczak W., 2003]:

$$
\begin{gathered}
min\left\{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} w_t\right\} \\
w_t + \sum_{j=1}^{N}\left(r_{jt} - r_j\right)x_j \geq 0 \\
w_t - \sum_{j=1}^{N}\left(r_{jt} - r_j\right)x_j \geq 0 \\
\sum_{j=1}^{N} r_j x_j \geq R_0 \\
\sum_{j=1}^{N} x_j = 1 \quad oraz\ x_j \geq 0 \quad dla \quad j = 1, 2, \ldots, N
\end{gathered} \tag{4}
$$

W powyższym modelu R_0 oznacza założony poziom stopy zwrotu portfela.

Drugą z miar, którą można zastosować w liniowym modelu optymalizacyjnym jest średnia różnica Giniego (GMD). Miara ta mierzy stopień koncentracji rozkładu stóp zwrotu. Dla dowolnej j-tej spółki średnia różnica Giniego jest równa połowie wartości oczekiwanej bezwzględnych różnic liczonych pomiędzy możliwymi obserwacjami stopy zwrotu (zmiennej losowej) [Yitzhaki S., 1982; Shalit, Yitzhaki S., 2005]:

$$
\varGamma_j = \frac{1}{2}\sum_{t,k=1}^{T}\left|r_{j,t} - r_{j,k}\right| p_t p_k \tag{5}
$$

Średnia różnica Giniego dla portfela natomiast obliczana jest według poniższego wzoru:

$$
\varGamma_P = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{t,k=1}^{T}\left|x_j r_{j,t} - x_j r_{j,k}\right| p_j p_k \tag{6}
$$

W celu uproszczenia obliczeń wartość bezwzględna zastępowana jest zmiennymi dodatkowymi d_{tk}, określonymi wzorem: $d_{tk} \geq x_j r_{j,t} - x_j r_{j,k}$. Liniowa postać modelu, który stosujemy do wyznaczania udziałów portfela inwestycyjnego ze średnią różnicą Giniego jako miarą ryzyka jest następująca [Ogryczak W., 2003]:

$$
\begin{gathered}
min\left\{\frac{1}{2}\sum_{t,k=1}^{T} d_{tk}\, p_t\, p_k\right\} \\
d_{tk} \geq \sum_{j=1}^{N} x_j r_{j,t} - x_j r_{j,k} \ dla\ t,k = 1, 2, \ldots, T \\
\sum_{j=1}^{N} r_j x_j \geq R_0 \\
\sum_{j=1}^{N} x_j = 1 \quad oraz \quad x_j \geq 0 \ dla\ j = 1, 2, \ldots, N
\end{gathered} \tag{7}
$$

Kolejna miara ryzyka – warunkowa wartość zagrożona (CVaR) – jest przykładem kwantylowej miary ryzyka, spełniającej warunki koherentności. Jest ona definiowana jako warunkowa wartość oczekiwana stóp zwrotu z portfela (R_p), przy założeniu że stopy te są mniejsze niż α-kwatyl rozkładu stóp zwrotu, co symbolicznie zapisujemy wzorem [Pflug G.C., 2000]:

$$CVaR = E\lfloor R_p \mid R_p \leq -VaR \rfloor, \tag{8}$$

gdzie *VaR* oznacza wartość zagrożoną (narażoną na ryzyko), czyli maksymalną wartość, jaką można stracić w wyniku inwestycji dla danego okresu, przy założonym poziomie tolerancji.

Model optymalizacyjny, za pomocą którego wyznaczamy portfel o minimalnej warunkowej wartości zagrożonej, jest postaci [Rockaffelar R.T., Uryasev S., 2000]:

$$\begin{gathered} min\left\{ s + \frac{1}{T(1-\alpha)} \sum_{t=1}^{T} \left[-x^T y_t - s \right]^+ \right\} \\ \sum_{j=1}^{N} r_j x_j \geq R_0 \\ \sum_{j=1}^{N} x_j = 1 \;\; oraz \;\; x_j \geq 0 \; dla \;\; j = 1, 2, \ldots, N \end{gathered} \tag{9}$$

gdzie: *s* to zmienna decyzyjna oznaczająca poziom straty, którego nie można przekroczyć, natomiast y_t to poszczególne scenariusze realizacji stóp zwrotu dla okresów $t = 1, 2, \ldots, T$.

3. Modele wyboru wielookresowych strategii inwestycyjnych

Jednym ze sposobów konstrukcji wielookresowych strategii inwestycyjnych jest przyjęcie założenia, że celem inwestora jest wyznaczenie strategii maksymalizującej jego bogactwo końcowe, przy równoczesnej minimalizacji ryzyka w okresie *T*. W poprzednich *T*-1 okresach skupiamy się tylko na maksymalizowaniu bogactwa, natomiast poziom ryzyka kontrolowany jest przez wprowadzenie, w poszczególnych okresach, górnej granicy ryzyka, na jakie może zgodzić się inwestor (wektor parametrów $\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{T-1}]$). W ten sposób zabezpieczamy inwestora przed bankructwem. Wyznaczanie strategii, przy powyższych założeniach, odbywa się za pomocą dwóch następujących zadań optymalizacyjnych:

- dla okresów $t = 1, 2, \ldots, T$-1

$$\begin{aligned} & max\, E[v_t] \\ & \rho_t \leq \varepsilon_t E[v_{t-1}] \;\; dla\; t = 1, 2, \ldots, T-1 \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{tj} = v_{t-1} \;\; dla\; t = 1, 2, \ldots, T \\ & x_{tj} \geq 0 \;\;\; dla\; t = 1, 2, \ldots, T \;\;\; j = 1, 2, \ldots, n \\ & gdzie\;\; E[v_t] = E[v_{t-1}] + r_t^T x_t \;\;\;\; dla\; t = 1, 2, \ldots, T-1 \end{aligned}$$

- dla okresu *T*

$$\begin{aligned} & min\, \lambda z_T - (1-\lambda) E[v_T] \\ & \rho \leq z_T \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{Tj} = v_{T-1} \\ & x_{Tj} \geq 0 \;\;\; dla\;\; j = 1, 2, \ldots, n \\ & gdzie\;\; E[v_T] = E[v_{T-1}] + r_T^T x_T \end{aligned} \tag{10}$$

W powyższych modelach ρ_t oznacza ryzyko portfela dla danego okresu t, parametr $\lambda \in (0, 1)$ oznacza preferencje inwestora względem ryzyka w okresie T, a z_T to dodatkowa zmienna decyzyjna. Ponadto, w podejściu tym zakładamy, że cała inwestycja jest procesem samofinansowanym, co oznacza, że kwota alokowana we wszystkie spółki w okresie t jest równa oczekiwanemu kapitałowi na koniec okresu (t-1). Zachodzą zatem zależności:

$$v_t = v_{t-1} + R_t^T x_t \quad \text{oraz} \quad \sum_{j=1}^{N} x_{tj} = v_{t-1} \quad \text{dla } t = 1, 2, \ldots, T, \tag{11}$$

gdzie: v_t oznacza wartość kapitału, jaką inwestor ma na końcu okresu t, a v_0 to wartość kapitału początkowego inwestora na początku całej inwestycji (przyjmuje się, że $v_0 = 1$). Takie podejście wyznaczania portfeli wielookresowych zaproponowane zostało dla średniego odchylenia bezwzględnego [Yu M., Takahashi S., Inoue H., Wang S., 2010]. Oryginalnie do rozwiązania takiego problemu stosowane są metody programowania dynamicznego, jednak (jak wykazali autorzy), możliwe jest sprowadzenie problemu do postaci liniowej.

Innym sposobem wyznaczania strategii wielookresowych jest zastosowanie w każdym podokresie standardowego podejścia, czyli minimalizacji ryzyka, przy założonym poziomie stopy zwrotu portfela. Zmiany w portfelu dokonywane są zgodnie z założeniem, że w okresie t inwestujemy kapitał jaki inwestor ma na koniec okresu t-1. Zatem wielookresową strategię inwestycyjną możemy wyznaczyć stosując dla poszczególnych okresów $t = 1, 2, \ldots, T$ następujący model optymalizacyjny:

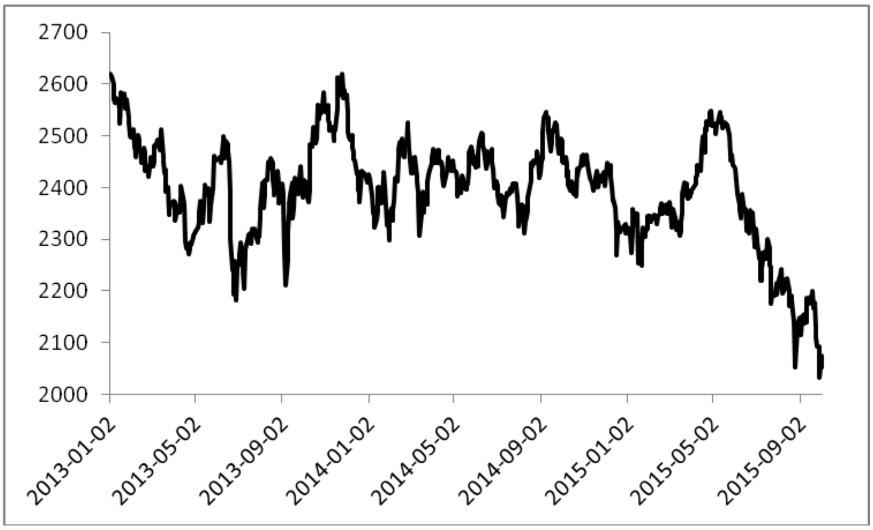
$$\begin{gathered} \min \rho_t \\ \sum_{j=1}^{N} R_{tj} x_{tj} \geq R_{t0} \\ \sum_{j=1}^{N} x_{tj} = v_{t-1} \\ x_{tj} \geq 0 \;\; dla \;\; j = 1, 2, \ldots, N \end{gathered} \tag{12}$$

W powyższych modelach, (10), (12), w miejsce ρ_t można wprowadzić jedną z miar ryzyka, omówionych w poprzedniej części. Uwzględniając warunki na dodatkowe zmienne decyzyjne, dostajemy liniowe modele wyboru wielookresowych strategii inwestycyjnych.

4. Analiza modeli wyboru wielookresowych portfeli inwestycyjnych

Praktyczne zastosowanie omówionych w poprzedniej części strategii wyznaczania wielookresowych portfeli inwestycyjnych porównane zostało w badaniach empirycznych przeprowadzonych dla tygodniowych stópy zwrotu 35 spółek, wchodzących w skład indeksu WIG40, które były notowane bez zawieszeń w okresie styczeń 2013 – sierpień 2015.

Momenty dokonywania ponownej inwestycji wyznaczone zostały na podstawie notowań indeksu WIG20 dla analizowanego okresu (rys. 1).



Rys. 1. Notowania indeksu giełdowego WIG20 w okresie 01.01.2013-17.09.2015
Fig. 1. Quotations of index WIG20 in the period 01.01.2013-17.09.2015
Źródło: na podstawie danych z bossa.pl.

Dla analizowanego okresu wyznaczono (w przybliżeniu) momenty, kiedy notowania indeksu przyjmowały lokalnie najniższe lub najwyższe wartości. W ten sposób w okresie styczeń 2013 – sierpień 2015 otrzymano 11 podokresów, wyznaczonych przez następujące daty: 23.04.2013; 11.06.2013; 10.07.2013; 25.11.2013; 30.01.2014; 25.02.2014; 08.08.2014; 09.09.2014; 16.01.2015; 29.04.2015; 31.08.2015.

W analizowanym okresie dla każdej miary ryzyka (MAD, GMD, CVaR) wyznaczone zostały dwie różne strategie: strategia A – maksymalizacja bogactwa, przy kontroli ryzyka w okresach $t = 1, \dots, T$-1 oraz maksymalizacja bogactwa przy równoczesnej minimalizacji ryzyka w okresie T; strategia B – minimalizacja ryzyka we wszystkich podokresach. W celach porównawczych, dla poszczególnych miar ryzyka wyznaczone zostały również portfele jednookresowe (strategia C). Otrzymano dziewięć różnych strategii inwestycyjnych, które porównano pod względem ryzyka oraz przyszłych możliwych zysków ze sprzedaży portfela.

Na wstępie warto zauważyć, że stosując powyższe metody wyznaczania portfeli inwestycyjnych w każdym przypadku otrzymano całkiem inny pod względem składu portfel końcowy. Wystarczy przeanalizować stopień zdywersyfikowania portfeli (tabela 1), aby stwierdzić jak bardzo różnią się te strategie. Na podstawie otrzymanych wyników widać wyraźnie, że najsłabiej zdywersyfikowane są portfele wyznaczane zgodnie ze strategią A. Również znacznie mniej spółek mają w swoich składach portfele wielookresowe, wyznaczane przy założeniu minimalnej wartości ryzyka w porównaniu z odpowiadającymi im portfelami jednookresowymi. Własność ta zachodzi dla portfeli, w których ryzyko mierzone było średnim odchyleniem bezwzględnym lub średnią różnicą Giniego.

Tabela 1

Liczba spółek w portfelach końcowych

Miara ryzyka	Strategia		
	A	B	C
MAD	4	7	19
GMD	4	11	20
CVaR	2	16	20

Źródło: opracowanie własne.

Aby porównać otrzymane strategie pod względem ryzyka, dla każdego wyznaczonego portfela końcowego obliczone zostały wartości odchylenia standardowego. Wyniki przedstawione zostały w tabeli 2.

Tabela 2

Wartości odchylenia standardowego portfeli końcowych w analizowanych strategiach

Miara ryzyka	Strategia		
	A	B	C
MAD	0,006586	0,006683	0,004134
GMD	0,006389	0,005837	0,004092
CVaR	0,008775	0,005227	0,004574

Źródło: opracowanie własne.

Porównując dla poszczególnych strategii portfele końcowe pod względem ryzyka stwierdzono, że w przypadku średniego odchylenia bezwzględnego oraz średniej różnicy Giniego nie ma większego znaczenia, czy zastosujemy strategię A czy B. Zarówno przy minimalizacji ryzyka, jak i przy maksymalizacji bogactwa dla obu miar ryzyka otrzymano podobne wartości odchylenia standardowego. Z kolei stosując warunkową wartość zagrożoną zdecydowanie mniej ryzykowną okazała się inwestycja, dla której minimalizowano wartość ryzyka portfela przez cały okres inwestycyjny. Jeśli w poszczególnych okresach założono maksymalizację bogactwa inwestora, otrzymany portfel końcowy charakteryzował się znacznie wyższym odchyleniem standardowym, niż portfel końcowy otrzymany zgodnie ze strategią B. Warto zauważyć, że w przypadku strategii A, podobnie jak dla portfeli jednookresowych, dla średniego odchylenia bezwzględnego oraz średniej różnicy Giniego otrzymano portfele o zbliżonej wartości odchylenia standardowego. Zatem, w tym przypadku można stosować obie miary zamiennie. W przypadku natomiast strategii B, w odróżnieniu od dwóch pozostałych, najmniej ryzykownym okazał się portfel, dla którego ryzyko mierzone było warunkową wartością zagrożoną.

W dalszej części portfele porównane zostały pod względem przyszłych zysków, jakich można było się spodziewać po sprzedaży portfeli końcowych w kolejnych dniach września 2015. W tym celu obliczone zostały wartości portfeli końcowych na podstawie wartości udziałów poszczególnych portfeli oraz notowań w kolejnych dniach po zakończeniu inwestycji. Wartości portfeli przedstawiono w tabeli 3.

Tabela 3

Wartości portfeli końcowych w kolejnych dniach września 2015 (w tys.)

Data	Strategia								
	A			B			C		
	MAD	GMD	CVaR	MAD	GMD	CVaR	MAD	GMD	CVaR
01.09.15	179,12	193,53	173,07	161,33	153,47	153,00	119,03	131,65	131,39
02.09.15	180,88	195,16	176,21	158,31	152,71	153,78	118,08	130,70	129,85
03.09.15	182,38	196,84	176,68	161,07	155,10	154,86	117,68	130,23	130,11
04.09.15	180,92	195,77	171,67	161,87	156,91	154,76	117,63	130,27	130,10
07.09.15	182,39	197,88	169,17	164,32	160,88	156,65	118,15	131,12	131,34
08.09.15	184,43	199,95	172,13	164,68	161,17	157,82	118,64	131,55	131,88
09.09.15	186,62	202,10	176,07	164,61	161,44	159,22	119,16	132,05	131,99
10.09.15	184,41	199,59	174,81	163,75	159,43	157,53	119,02	131,76	132,09
11.09.15	186,66	202,25	174,16	167,27	163,61	159,57	118,97	131,76	133,24
14.09.15	184,38	200,14	170,47	167,63	163,30	158,43	118,17	130,78	133,23
15.09.15	182,85	198,72	166,81	166,60	163,64	157,72	117,57	130,18	132,89

Źródło: opracowanie własne.

Analizując zysk z poszczególnych portfeli, zauważono, że minimalizując ryzyko przez cały okres inwestycyjny, jako miarę ryzyka najkorzystniej było przyjąć średnie odchylenie bezwzględne. To w tym przypadku strategia B przynosiła najwyższe zyski. Z kolei dla strategii A najwyższe wartości portfela otrzymano dla średniej różnicy Giniego. Należy zauważyć, że różnice w kolejnych dniach, w przypadku strategii B, dla różnych miar ryzyka są zdecydowanie niższe niż w przypadku strategii A. Dla portfeli wyznaczanych według strategii B różnice wahają się od 3 do ok. 10 tys., natomiast między portfelami strategii A różnice te wynoszą od 14 do prawie 33 tys. Zatem, możemy wnioskować, że decydując się na stosowanie strategii A należy dużą wagę przywiązywać do tego, jaką miarą ryzyka się posługujemy.

Porównując wszystkie otrzymane portfele końcowe pod względem zysków, jakich można się było spodziewać w poszczególnych dniach września, najlepszą strategią okazała się maksymalizacja bogactwa (strategia A), przy ryzyku mierzonym średnią różnicą Giniego. W każdym dniu września dla tego portfela otrzymano najwyższe wartości zysku. Z kolei najniższe wartości portfela odnotowano dla portfeli jednookresowych, dla których miarą ryzyka było średnie odchylenie bezwzględne. Wartości tych portfeli w poszczególnych dniach były zdecydowanie niższe niż wartości portfeli wyznaczanych według strategii A dla średniej różnicy Giniego.

5. Podsumowanie

W artykule przedstawione zostały dwie strategie wyboru wielookresowych portfeli inwestycyjnych, w których można zastosować liniowe miary ryzyka inwestycyjnego. Praktyczne zastosowanie omówionych modeli pokazało, że zarówno pod względem ryzyka, jak i przyszłych zysków ważne jest, jaką miarę ryzyka zastosujemy. Najmniej ryzykowną strategią okazała się minimalizacja warunkowej wartości zagrożonej portfela w poszczególnych okresach inwestycji. Natomiast najwyższe wartości ze sprzedaży portfela otrzymano dla portfela, dla którego maksymalizowano bogactwo, a ryzyko mierzone było średnią różnicą Giniego.

Bibliografia

1. Konno H., Yamazaki H.: Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market, “Management Science”, No. 37, 1991, p. 519-531.
2. Ogryczak W.: Modele programowania liniowego w optymalizacji portfela inwestycji, [w:] T. Trzaskalik (red.): „Modelowanie Preferencji a Ryzyko’03”, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice 2003, s. 435-455.
3. Pflug G.C.: Some remarks on the value-at-risk and conditional value-at-risk, [in:] S. Uryasev (ed.): “Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications”, Kluwer Academic Publishers, Norwell 2000.
4. Rockafellar R.T., Uryasev S.: Optimization of conditional value-at-risk, “Journal of Risk”, No. 2, 2000, p. 21-41.
5. Shalit H., Yitzhaki S.: The Mean - Gini Efficient Portfolio Frontier, “The Journal of Financial Research”, Vol. XXVII, 2005, p. 59-75.
6. Yitzhaki S.: Stochastic dominance, mean variance and Gini’s mean difference, “American Economic Review”, No. 72, 1982, p. 178-185.
7. Yu M., Takahashi S., Inoue H., Wang S.: Dynamic portfolio optimization with risk control for absolute deviation model. “European Journal of Operational Research”, No. 201, 2010, p. 349-364.

Abstract

In the article two strategies of multi-period portfolio selection were presented. In both approach the linear measure of risk such as mean absolute deviation, Gini’s mean difference and conditional value at risk were used. The empirical research indicated that the less risky

strategy is to minimize the conditional value at risk of portfolio in the subsequent periods of investment. While the highest profits from portfolios sales were received for portfolio of maximum wealth and the Gini's mean difference as a measure of risk.