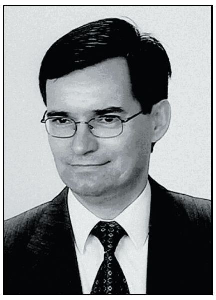
Paweł FOTOWICZ
GŁÓWNY URZĄD MIAR

Przedział ufności a błąd systematyczny pomiaru

Mgr inż. Paweł FOTOWICZ

Studia ukończył w 1981 roku na Politechnice Warszawskiej. Po ukończeniu studiów pracował w Instytucie Metrologii i Systemów Pomiarowych PW, zajmując się laserową techniką pomiarową, której poświęcił około 25 publikacji. Od 1999 roku pracuje w Głównym Urzędzie Miar. Zajmuje się obecnie problematyką niepewności pomiaru. Tematyce tej poświęcił w ostatnich latach ponad 50 publikacji.

e-mail: uncert@gum.gov.pl



Streszczenie

Referat omawia zagadnienie randomizacji oddziaływania systematycznego do postaci zmiennej losowej. Oddziaływanie to traktowane jest jako część przedziału ufności związanego z wynikiem pomiaru. Przykładami takich oddziaływań najczęściej są błędy wskazań lub poprawki. Przedstawiono prostą i praktyczną metodę randomizacji.

Słowa kluczowe: niepewność pomiaru

Coverage interval and systematic effect

Abstract

The paper concerns the problem of treatment of the systematic effect as a random variable. This systematic effect is a part of the coverage interval of a measurement result. The simple randomization of a known systematic error as a bias or correction is presented. It is useful in practical metrological application.

Keywords: measurement uncertainty

1. Wstęp

Błąd systematyczny pomiaru należy do kategorii oddziaływań, które w praktyce metrologicznej występują pod postacią poprawek lub błędów wskazań przyrządów pomiarowych. Charakteryzują się określonym znakiem i wartością oraz wyznaczane są z określoną niepewnością. W pomiarach bezpośrednich za ogół wynik pomiaru jest korygowany o wartość tych oddziaływań systematycznych, a jedynie włączana jest do niepewności wyniku składowa przypadkowa związana z wyznaczeniem poprawki lub błędu wskazania. Możliwe jest jednak również inne postępowanie, a mianowicie włączenie w całości oddziaływania systematycznego do przedziału ufności związanego z wynikiem pomiaru i przez to traktowanie go jak składowej niepewności. Szczególnie jest to korzystne w pomiarach pośrednich, w których wprowadzona odpowiednia korekta o wartość poprawki lub błędu wskazania może zmienić definicję samej wielkości mierzonej. Z taką sytuacją mamy do czynienia na przykład w chemii analitycznej lub probiernictwie, gdy należy przygotować określone stężenie roztworu wzorcowego lub określoną próbę stopu szlachetnego. Uwzględnienie poprawek wyznaczenia wielkości wejściowych, np. masy substancji lub kruszcu mogłoby zmienić definicję wielkości mierzonej. Na ogół są one ściśle określone poprzez normy lub przepisy metrologiczne. Aby zatem nie zmieniać definicji wielkości mierzonej można przyjąć umownie wartość poprawki jako zerową, a jej zawartość uwzględnić w przedziale ufności dla wielkości wejściowej. Zagadnienie sprowadza się wówczas do zbudowania zmiennej losowej centrowanej o parametrach uwzględniających zarówno składnik przypadkowy jak i systematyczny.

2. Przedział ufności

Pojęcie przedziału ufności związane jest z rozkładem prawdopodobieństwa dla wartości wielkości mierzonej. Ogólnie oznacza on przedział, o którym można twierdzić przy danym poziomie ufności, że zawiera co najmniej określoną część populacji, nazywany statystycznym przedziałem objęcia [1]. Określa on szerokość widmową rozkładu, czyli tą jego część dla której funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest większa od zera. Matematyczne definiuje się go jako najmniejszy przedział pomiędzy dwoma kwantylami rozkładu prawdopodobieństwa dla wartości wielkości mierzonej, które wyznaczają poziom ufności 95 % [2]. W przypadku symetrycznego rozkładu będzie to zawsze tylko jeden przedział, symetryczny wokół wartości oczekiwanej

$$I_p = [y_{\mathrm{low}}, y_{\mathrm{high}}] \tag{1}$$

gdzie y_{low} i y_{high} są wartościami wielkości mierzonej odpowiadającymi odpowiednio: $G^{-1}(\alpha)$ kwantylowi rzędu α, a $G^{-1}(\alpha+p)$ kwantylowi rzędu $\alpha+p$ rozkładu opisanego dystrybuantą $G(\eta)$. Przyjmuje się, że $\alpha = 2{,}5$ %, a $p = 95$ % [2]. W odniesieniu do klasycznie zapisywanej niepewności rozszerzonej U przedział ufności można zdefiniować jako

$$I_p = [y - U,\ y + U] \tag{2}$$

przy czym [3]

$$\int_{y-U}^{y+U} g(\eta)\mathrm{d}\eta = p \tag{3}$$

gdzie $g(\eta)$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa rozkładu związanego z wielkością mierzoną, y jej estymatą, a p poziomem ufności.

3. Randomizacja błędu systematycznego

Przyjmijmy, że błąd systematyczny e, w postaci błędu wskazania lub poprawki, wyznaczony został z niepewnością standardową $u(e)$ i współczynnikiem rozszerzenia k. Z dużym prawdopodobieństwem możemy założyć rozkład normalny dla składowej przypadkowej i tym samym wartość współczynnika k=2 dla poziomu ufności 95 % (rys. 1).

Tworząc nową zmienną losową centrowaną wokół umownie przyjętej wartości zerowej wyznaczamy symetryczny przedział ufności o szerokości połówkowej

$$U = |e| + 2u(e) \tag{4}$$

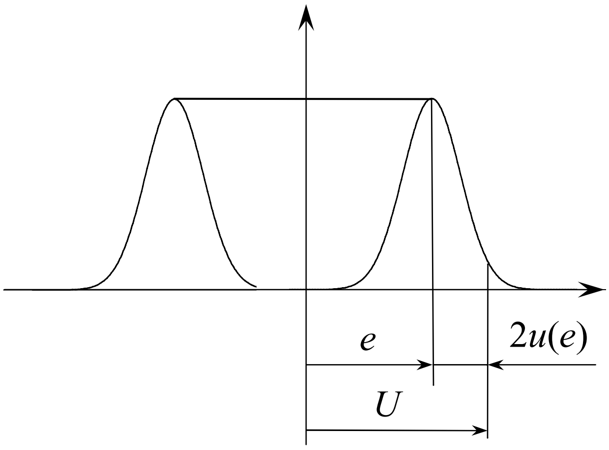
Wielkość powyższa wyznacza w przybliżeniu niepewność rozszerzoną zrandomizowanego błędu systematycznego. Rozkładem w ten sposób zdefiniowanej zmiennej losowej będzie rozkład typu P∗N.

Rozkład P∗N jest splotem rozkładu prostokątnego z normalnym [4]. Funkcja gęstości tego rozkładu opisana jest zależnością [5, 6]

$$g_{\mathrm{PN}}(\eta) = \frac{1}{2\sqrt{6\pi} \cdot r} \int_{\eta-\sqrt{3}\cdot r}^{\eta+\sqrt{3}\cdot r} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2}\right] \mathrm{d}\xi \qquad (5)$$

Funkcje gęstości tego rozkładu charakteryzują się na ogół stałą wartością w okolicach wartości oczekiwanej i zboczami opisanymi funkcją Gaussa. Zakres stałości funkcji gęstości zależy od parametru r rozkładu, który określa stosunek odchylenia standardowego σ_{P} jego składowej prostokątnej do odchylenia standardowego σ_{N} jego składowej normalnej

$$r = \frac{\sigma_{\mathrm{P}}}{\sigma_{\mathrm{N}}} \qquad (6)$$



Rys. 1. Randomizacja błędu systematycznego
Fig. 1. Randomizing of systematic effect

Parametr r rozkładu można przybliżyć zależnością wiążącą błąd systematyczny z niepewnością standardową jego wyznaczenia

$$r_u = \frac{2|e|}{3u(\mathrm{e})} + 1 \qquad (7)$$

Aby wyznaczyć niepewność standardową związaną ze zrandomizowanym błędem systematycznym należy obliczyć współczynnik rozszerzenia dla rozkładu typu P∗N. Jego wartość została przedstawiona w tabeli 1 na podstawie obliczeń numerycznych w funkcji ilorazu r_u dla poziomu ufności p = 95 % [7-9]. Można też skorzystać z przybliżenia powyższego rozkładu rozkładem trapezowym. Wówczas współczynnik rozszerzenia można przyjąć jak dla rozkładu trapezowego [10-12]

$$k_{\mathrm{T}} = \sqrt{\frac{3}{r_u^2 + 1}} \left(1 + r_u - 2\sqrt{r_u(1-p)}\right) \qquad (8)$$

Niepewność standardowa zrandomizowanego błędu systematycznego wynosi

$$u = \frac{U}{k} = \frac{|e| + 2u(e)}{k} \qquad (9)$$

przy czym współczynnik rozszerzenia

$$k = k_{\mathrm{PN}} \approx k_{\mathrm{T}} \qquad (10)$$

Tab. 1. Wartości współczynnika rozszerzenia k_{PN} dla poziomu ufności 95 %
Tab. 1. Values of coverage factor k_{PN} for confidence level 95 %

k_{PN}	r_u do wartości	k_{PN}	r_u do wartości	k_{PN}	r_u do wartości
1,96	0,5090	1,85	1,6410	1,74	3,1930
1,95	0,6985	1,84	1,7380	1,73	3,4410
1,94	0,8240	1,83	1,8390	1,72	3,7300
1,93	0,9280	1,82	1,9460	1,71	4,0740
1,92	1,0220	1,81	2,0600	1,70	4,4925
1,91	1,1110	1,80	2,1820	1,69	5,0235
1,90	1,1980	1,79	2,3135	1,68	5,7350
1,89	1,2840	1,78	2,4560	1,67	6,7760
1,88	1,3700	1,77	2,6120	1,66	8,5975
1,87	1,4580	1,76	2,7845	1,65	∞
1,86	1,5480	1,75	2,9765		

3. Podsumowanie

Błąd systematyczny pomiaru może być włączony do przedziału ufności wyniku pomiaru. Traktowany jest wówczas jak składowa niepewności, ponieważ wyrażany jest pod postacią zmiennej losowej. Jeżeli niepewność wyznaczenia błędu systematycznego jest opisana rozkładem normalnym, co na ogół ma miejsce, to zrandomizowanej poprawce lub błędowi wskazania przyrządu pomiarowego można przypisać rozkład typu P∗N. Obliczenia niepewności standardowej i współczynnika rozszerzenia takiej wielkości nie są skomplikowane i mogą być łatwo implementowane do praktyki metrologicznej.

4. Literatura

[1] Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik. Wydawnictwo GUM, 1999
[2] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. Supplement 1. Numerical Methods for the Propagation of Distributions. Draft of JCGM/WG1 document, 2004
[3] I. Lira: Evaluating the measurement uncertainty. Fundamentals and practical guidance. Series in measurement science and technology. Institute of Physics Publishing, 2002
[4] C. F. Dietrich: Uncertainty, Calibration and Probability. The statistics of Scientific and Industrial measurement. Second edition, Adam Hilger Publishing, 1991
[5] P. Fotowicz: Analityczna metoda obliczania przedziału ufności. Materiały XXXVII Międzyuczelnianej Konferencji Metrologów, MKM 2005, Zielona Góra, 5-7 wrzesień 2005, s. 101-108
[6] P. Fotowicz: An analytical method for calculating a coverage interval. Metrologia, vol. 43, nr 1, 2006, s. 42-45
[7] P. Fotowicz: Metoda wyznaczania współczynnika rozszerzenia w procedurach szacowania niepewności pomiaru. PAR, nr 10, 2003, s. 13-16
[8] P. Fotowicz: Metody obliczania współczynnika rozszerzenia w oparciu o splot rozkładu prostokątnego z normalnym. PAK, nr 4, 2004, s. 13-16
[9] P. Fotowicz: Obliczanie niepewności rozszerzonej metodą analityczną opartą na splocie rozkładów wielkości wejściowych. PAR, nr 1, 2005, s. 5-9
[10] P. Fotowicz: Ocena dokładności przybliżenia splotu rozkładów prostokątnego i normalnego rozkładem trapezowym. PAR, nr 5, 2001, s. 9-11
[11] P. Fotowicz: Zasada przybliżenia rozkładu wyniku pomiaru przy wzorcowaniu. PAR, nr 9, 2001, s. 8-11
[12] P. Fotowicz: A method of approximation of the coverage factor in calibration. Measurement, vol. 35, nr 3, 2004, s. 251-256

Artykuł recenzowany