

ZASTOSOWANIE ROZSZERZONEGO FILTRU KALMANA DRUGIEGO RZĘDU DO WYZNACZANIA POZYCJI

Najczęściej stosowanym w zintegrowanych systemach nawigacyjnych narzędziem do przetwarzania sygnałów jest filtr Kalmana. Na dobór algorytmu filtracji Kalmana ma wpływ oczekiwana dokładność oraz strategia integracji przyrządów pomiarowych. W oparciu o dwa eksperymenty symulacyjne wykonano analizę metod filtracji Kalmana oraz powiązanych z nimi algorytmów wygładzających stosowanych w zintegrowanych systemach nawigacyjnych. W porównaniu zastosowano filtr EKF (Extended Kalman Filter) wymagający aproksymacji przy użyciu pochodnych cząstkowych pierwszego i drugiego rzędu oraz filtr UKF (Unscented Kalman Filter) pozbawiony tego wymogu. Dla każdej metody filtracji przedstawiono odpowiednio algorytmy wygładzające EKS (Extended Kalman Smoother) i UKS (Unscented Kalman Smoother).

WSTĘP

Ciągle zwiększająca się dostępność i popularność różnego rodzaju portali umożliwiających realizację zakupów za pośrednictwem sieci Internet przyczynia się do wzrostu liczebności przesyłek. Dodatkowo rosnące koszty paliwa, presja zwiększenia wydajności oraz produktywności sprawia, że w transporcie coraz częściej stosuje się systemy nawigacyjne w oparciu o system GPS. Firmy logistyczne, które zastosowały takie rozwiązania osiągnęły wzrost produktywności pracowników, zmniejszyły koszty operacyjne i poprawiły jakość obsługi klienta [17]. Współdziałanie telefonii komórkowej z systemem GPS pozwala monitorować pozycję środków transportu i osób. Na obszarach o gęstym zalesieniu, zwartej, wysokiej zabudowie i tunelach trudno zapewnić prawidłowy przebieg monitoringu z uwagi na mogący wystąpić tam brak ciągłości obserwacji satelitarnych. Monitoring powinien dostarczać możliwie dokładnych, a w szczególności nieprzerwanych informacji o parametrach obserwowanego obiektu [12]. W celu zapewnienia ciągłości monitoringu buduje się zintegrowane systemy nawigacyjne, w których łączy się system nawigacji inercyjnej z systemem GPS. Przy budowie zintegrowanych systemów nawigacyjnych najczęściej spotykanym narzędziem do przetwarzania sygnałów jest filtr Kalmana [7, 8, 10, 11]. Nieliniowy charakter sytemu dynamicznego wymaga zastosowania jego rozszerzonej odmiany EKF (Extended Kalman Filter) [4, 5, 7, 8, 10, 11]. Algorytm EKF opiera się na linearyzacji równania stanu oraz równania obserwacji pomiarowych wokół poprzedniej lub bieżącej estymaty. Grupę filtrów aproksymacji Gaussa poza rozszerzonym filtrem Kalmana EKF reprezentują jego modyfikacje takie jak: UKF (Unscented Kalman Filter), SPKF (Sigma Point Kalman Filter), CDKF (Central Difference Kalman Filter).

1. METODY FILTRACJI

1.1. Rozszerzony filtr Kalmana EKF

Filtr Kalmana w swojej klasycznej postaci, może być zastosowany w systemach, gdzie model estymacji stanu i model obserwacji są liniowe. Pierwszą zaproponowaną adaptacją filtru Kalmana dla modeli nieliniowych była linearyzacja macierzy kowariancji [21], którą nazwano rozszerzonym filtrem Kalmana (*Extended Kalman Filter*), w skrócie EKF.

W filtrze EKF przeprowadza się linearyzację przez rozwinięcie funkcji nieliniowych w szereg Taylora. Jeśli przyrost czasu $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ jest bardzo mały, a ciągła macierz stanu $F(t)$ jest w przybliżeniu niezmienna w czasie $F(t) = F$, to można zastosować następującą aproksymację numeryczną macierzy przejścia A_{k-1} z dokładnością rozwinięcia szeregu Taylora do wyrazów pierwszego rzędu:

$$A_{k-1} = e^{F(t)\Delta t} = I + \frac{F\Delta t}{1!} + \frac{F^2\Delta t^2}{2!} + \dots + \frac{F^n\Delta t^n}{n!} \approx I + F\Delta t \quad (1)$$

W przypadku filtra pierwszego rzędu wykorzystuje się tylko pierwszy wyraz rozwinięcia w szereg. Rozwiązanie to z uwagi na szybkość działania znalazło wiele praktycznych zastosowań. Jednak aproksymacja przy użyciu (jakobianów) pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu dla modeli silnie nieliniowych w praktyce okazuje się niewystarczająca [23]. W takich przypadkach można zastosować filtr drugiego rzędu gdzie aproksymację kwadratową przeprowadza się z użyciem hessianów.

Algorytm EKF nieliniowego układu dynamicznego, dla którego model można przedstawić w następującej postaci [22]:

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{q}_{k-1} \quad (2)$$

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{r}_k \quad (3)$$

przyjęte oznaczenia to:

k – dyskretna epoka obliczeniowa,

$\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}$ – wektor stanu odpowiednio w chwili k oraz $k - 1$,

$\mathbf{x}_k \wedge \mathbf{x}_{k-1} \in \mathbb{R}^n$,

\mathbf{z}_k – wektor obserwacji, $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^p$,

\mathbf{q}_{k-1} – wektor zmiennej losowej szumu procesowego, $\mathbf{q}_{k-1} \sim N(0, \mathbf{Q}_{k-1})$,

\mathbf{r}_k – wektor zmiennej losowej szumu pomiarowego, $\mathbf{r}_k \sim N(0, \mathbf{R}_k)$.

Zadaniem przedstawionych w równaniach (2) funkcji f i (3) funkcji h jest odpowiednio opis modeli: stanu i obserwacji.

Przed uruchomieniem cyklicznej procedury obliczeniowej należy wykonać inicjalizację zmiennych, która polega na wyznaczeniu w chwili $k = 0$ początkowych estymat: stanu $\hat{\mathbf{x}}_0^\ominus$, macierzy kowariancji

\mathbf{P}_0^\ominus , macierzy kowariancji zakłóceń procesu \mathbf{Q}_0 , macierzy kowariancji błędów pomiarów \mathbf{R}_0 . Przebieg algorytmu EKF to procedura rekurencyjna, na którą składają się dwa etapy:

- **Etap predykcji:** Aktualizacja przyrostu czasu następuje przy użyciu nieliniowego modelu stanu układu dynamicznego zadanego równaniem (4). Na tym etapie wyznaczana jest predykcja wektora stanu $\hat{\mathbf{x}}_k^\ominus$ (5) oraz macierzy kowariancji stanu \mathbf{P}_k^\ominus (2.4) przy wykorzystaniu jacobianów, których zadaniem jest linearyzacja, co wyraża poniższy zapis [22]:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^\ominus = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \quad (4)$$

$$\mathbf{P}_k^\ominus = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (5)$$

gdzie:

\mathbf{F}_{k-1} – jacobian zdefiniowany w postaci macierzy przejścia stanu, który jest pochodną cząstkową wektorowej funkcji nieliniowej f względem elementów wektora stanu \mathbf{x} w chwili $k-1$ w otoczeniu $\mathbf{x}_{k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}$,

\mathbf{Q}_{k-1} – macierzy kowariancji zakłóceń procesu w chwili $k-1$.

- **Etap korekty:** W tym przypadku rozpoczynamy od obliczenia \mathbf{v}_k czyli innowacji lub residuum obserwacji jako różnicy między realizacją obserwacji \mathbf{z}_k a predykcją obserwacji $h(\hat{\mathbf{x}}_k^\ominus, \mathbf{r}_k)$. Ponadto obliczamy macierz kowariancji innowacji \mathbf{S}_k [22]:

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{z}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_k^\ominus) \quad (6)$$

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^\ominus \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \quad (7)$$

gdzie:

\mathbf{v}_k – wektor innowacji (residuum obserwacji) w chwili k ,

\mathbf{S}_k – macierz kowariancji innowacji w chwili k ,

\mathbf{H}_k – jacobian zdefiniowany w postaci macierzy pomiarowej, który jest pochodną cząstkową pierwszego rzędu wektorowej funkcji nieliniowej h względem elementów wektora stanu \mathbf{x} w chwili k w otoczeniu $\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^\ominus$,

\mathbf{R}_k – macierzy kowariancji błędów pomiarów w chwili k .

W kolejnym kroku wyznaczana jest macierz wzmocnienia \mathbf{K}_k , wykorzystywana do aktualizacji estymaty wektora stanu oraz macierzy kowariancji z pierwszego etapu predykcji według następujących wyrażań [22]:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^\ominus \mathbf{H}_k^T (\mathbf{S}_k)^{-1} \quad (8)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^\ominus + \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \quad (9)$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^\ominus - \mathbf{K}_k \mathbf{S}_k \mathbf{K}_k^T \quad (10)$$

Przebieg algorytmu dla rozszerzonego filtru Kalmana drugiego rzędu, oznaczonego w dalszej części opracowania skrótem EKF2 jest następujący [22]:

- **Etap predykcji:**

$$\hat{\mathbf{x}}_k^\ominus = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \frac{1}{2} \sum_i \mathbf{e}_i \text{tr} \{ \mathbf{F} \mathbf{F}_{k-1,i} \mathbf{P}_{k-1} \} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^\ominus &= \mathbf{F}_{k-1,i,j} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F}_{k-1,i,j}^T \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,i'} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_{i'}^T \text{tr} \{ \mathbf{F} \mathbf{F}_{k-1}^{(i)} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F} \mathbf{F}_{k-1}^{(i')} \} + \mathbf{Q}_{k-1} \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie:

$\mathbf{F} \mathbf{F}_{k-1}$ – hessian zdefiniowany w postaci macierzy przejścia stanu, który jest pochodną cząstkową drugiego rzędu wektorowej

funkcji nieliniowej h względem elementów wektora stanu \mathbf{x} w chwili $k-1$ w otoczeniu $\mathbf{x}_{k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}$.

- **Etap korekty:**

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{z}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_k^\ominus) - \frac{1}{2} \sum_i \mathbf{e}_i \text{tr} \{ \mathbf{H} \mathbf{H}_k^{(i)} \mathbf{P}_k^\ominus \} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^\ominus \mathbf{H}_k^T + \frac{1}{2} \sum_{i,i'} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_{i'}^T \text{tr} \{ \mathbf{H} \mathbf{H}_k^{(i)} \mathbf{P}_k^\ominus \mathbf{H} \mathbf{H}_k^{(i')} \mathbf{P}_k^\ominus \} \\ &+ \mathbf{R}_k \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^\ominus \mathbf{H}_k^T (\mathbf{S}_k)^{-1} \quad (15)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^\ominus + \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \quad (16)$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^\ominus - \mathbf{K}_k \mathbf{S}_k \mathbf{K}_k^T \quad (17)$$

gdzie:

$\mathbf{e}_i = (0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)^T$ – wersor jednostkowy przedstawiony w postaci wektora przyjmującego wartość 1 (jeden) na i -tej pozycji oraz 0 (zera) na pozostałych pozycjach,

tr – ślad macierzy,

$\mathbf{H} \mathbf{H}_k$ – hessian zdefiniowany w postaci macierzy pomiarowej, który jest pochodną cząstkową drugiego rzędu wektorowej funkcji nieliniowej h względem elementów wektora stanu \mathbf{x} w chwili k w otoczeniu $\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^\ominus$.

1.2. Filtr UKF

Przedstawiony w punkcie 1.1 sposób aproksymacji modelu dla rozszerzonego filtru Kalmana pozwala osiągać wiarygodne rezultaty, o ile charakter propagacji błędu może być aproksymowany funkcją liniową (jacobiany) lub kwadratową (hessiany). W przeciwnym razie zdolność funkcji aproksymującej filtr może być niewystarczająca, a w skrajnym przypadku filtr może okazać się rozbieżny. Ponadto wyznaczenie jacobianu lub hessianu może okazać się trudne lub wręcz niemożliwe.

Zatem przedstawione filtry EKF i EKF2 mają ograniczone pole zastosowań. Alternatywą jest filtr UKF (*Unscented Kalman Filter*) [6, 16, 17, 23] zwany w niektórych polskojęzycznych publikacjach bezśladowym filtrem Kalmana [8, 9]. To rekurencyjny filtr estymujący, którego własności dobrze oddają charakter modeli silnie nieliniowych [23]. W odróżnieniu od EKF, filtr bezśladowy nie linearyzuje modelu, ale operuje na parametrach statystycznych poddanych nieliniowym przekształceniom wektorów stanu i obserwacji. Podstawą algorytmu UKF jest UT (*Unscented Transform*) przekształcenie bezśladowe, które jest metodą obliczania parametrów opisowych zmiennej losowej poddanej nieliniowemu przekształceniu przy założeniu, że wygodniej jest estymować rozkład prawdopodobieństwa, niż funkcję nieliniową [23]. Chcąc obliczyć wartość średniej i kowariancję n wymiarowej zmiennej losowej powstałej w wyniku jej nieliniowego przekształcenia wyznacza się zbiór $2n+1$ ważonych punktów sigma $\{\mathcal{X}_i, \mathcal{W}_i\}$ jako zbiór par informacji o wartości i -tego punktu sigma i odpowiadającej jemu istotności (wagi). Punkty te są tak dobrane, aby uzyskać możliwie najdokładniejszą aproksymację rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej. W każdym kroku algorytmu wagowane przekształcenie bezśladowe wykonywane jest, dla każdego z etapów oddzielnie, tj. predykcji i korekty. W związku z tym, nakład obliczeniowy filtru UKF jest znacznie większy, niż dla algorytmu EKF.

1.3. Algorytmy wygładzające

Metoda wygładzająca RTS (*Rauch-Tung-Striebel*) [20] dla rozszerzonego filtru Kalmana określana w skrócie EKS (*Extended Kalman Smoother*) i odpowiednio dla bezśladowego filtru UKS (*Unscented*

ted Kalman Smoother) pozwala na wygładzenie rozwiązania dla modelu układu dynamicznego opisanego wyrażeniem (2). Metoda filtracji i odpowiadający mu algorytm wygładzający różnią się tym, że rekurencyjny proces obliczeniowy pierwszego biegnie wraz z przyrostem czasu, a drugiego w kierunku przeciwnym. Dla procedury wygładzającej proces obliczeniowy rozpoczyna się od ostatniej epoki obliczeniowej. Pewną niedogodnością jest konieczność zapisu w każdym kroku obliczeniowym procedury filtracji kroczącej wprzód wraz z upływem czasu wektora estymat oraz macierzy kowariancji stanu. Wymóg ten w istotny sposób zwiększa zapotrzebowanie na niezbędną przestrzeń dla przechowywanych informacji.

2. PRZEDMIOT PRACY

Celem pracy było przeprowadzenie oceny efektywności i poprawności zaprojektowanych metod filtracji oraz algorytmów wygładzających na przykładzie estymacji toru poruszającego się obiektu w dwóch wariantach symulacyjnych. W związku z tym opracowano programy komputerowe oparte o autorską modułową bibliotekę algorytmów estymacji BEA (*Bayesian Estimation Algorithms*), której implementację wykonano w języku Object Pascal.

Dla zapewnienia identycznych warunków symulacyjnych macierze kowariancji błędów procesowych Q i błędów pomiarowych R dla rozpatrywanego systemu we wszystkich badanych algorytmach miały jednakowe postaci. Ponadto, zadaniem bloku generatora było podanie identyczne na wejściu każdego z filtrów w trybie dopasowania do rzeczywistego układu dynamicznego obserwacji z szumami pomiarowymi r oraz parametrów stanu z szumem procesowym q . Jednocześnie na wstępie procesu obliczeniowego we wszystkich analizowanych metodach filtracji ustalono jednakową postać wektora stanu o rozkładzie gaussowskim $N(E[x_0], P_0)$ z początkową wartością oczekiwaną:

$$E[x_0] = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T \quad (18)$$

oraz początkową macierz kowariancji stanu:

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0.1m^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10(m/s)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10(m/s)^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Zapis macierzy kowariancji (19) wskazuje na znaczny stopień ufnosci do pozycji oraz sporą niepewność względem prędkości obserwowanego obiektu.

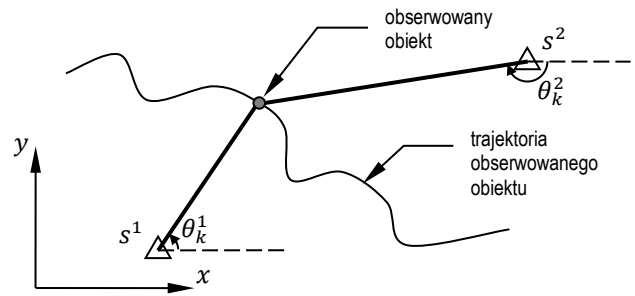
W bloku generatora stanu układu dynamicznego, który posłużył do wyznaczenia trajektorii obserwowanego obiektu przyjęto początkowy wektor stanu następująco:

$$x_0 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T \quad (20)$$

Za początek trajektorii poruszającego się obiektu przyjęto współrzędne (0, 0).

2.1. Trajektorja poruszającego się obiektu obserwowanego z dwóch stanowisk przy użyciu pomiaru kierunku

Schemat przedstawiony na rysunku 1 odnosi się do estymacji toru poruszającego się obiektu, który jest obserwowany z dwóch stałych stanowisk s^1 i s^2 za pomocą pomiaru kierunków θ_k^1 i θ_k^2 . Współrzędne położenia stałych punktów obserwacyjnych to: $(s_x^1, s_y^1) = (-1.5, -2.5)$ oraz $(s_x^2, s_y^2) = (1.5, 1.5)$.



Rys. 1. Trajektorja poruszającego się obiektu obserwowanego z dwóch nieruchomych stanowisk przy użyciu pomiaru kierunku [13]

Wektor stanu obserwowanego obiektu, składający się z jego pozycji i prędkości w prostokątnym układzie współrzędnych sformułowano następująco:

$$x_k = [x_k \ y_k \ \dot{x}_k \ \dot{y}_k]^T = [p_k^x \ p_k^y \ v_k^x \ v_k^y]^T \quad (21)$$

gdzie:

x_k, y_k, p_k^x, p_k^y – współrzędne prostokątne obiektu w chwili k ,
 $\dot{x}_k, \dot{y}_k, v_k^x, v_k^y$ – składowe prędkości obiektu w chwili k .

W zapisie modelu stanu układu dynamicznego zastosowano całkowany proces Wienera oznaczany w skrócie CWPV (Continuous Wiener Process Velocity). Przyjęty model ciągły układu dynamicznego przedstawia wyrażenie:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} q(t) \quad (22)$$

przy czym gaussowski szum procesowy $q(t)$ definiuje macierz gęstości widmowych:

$$Q_c = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \quad (23)$$

w której parametr q opisuje wielkość niepewności zmiennej losowej dla dwóch składowych prędkości obserwowanego obiektu, który ustalono jako $q = 0.1$. Dyskretyzowaną formę modelu ciągłego można zapisać jako:

$$x_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_{k-1} + q_{k-1} \quad (24)$$

gdzie przyrost czasu przyjęto $\Delta t = 0.01s$.

Gaussowski szum procesowy q_{k-1} o wartości oczekiwanej $E[q_{k-1}] = 0$ i macierz kowariancji Q_{k-1} można wyznaczyć w następującej formie:

$$Q_{k-1} = E[q_{k-1}(q_{k-1})^T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\Delta t^3 & 0 & \frac{1}{2}\Delta t^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\Delta t^3 & 0 & \frac{1}{2}\Delta t^2 \\ \frac{1}{2}\Delta t^2 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\Delta t^2 & 0 & \Delta t \end{bmatrix} q \quad (25)$$

Model obserwacji z obu stanowisk można zapisać równaniem [13]:

$$\mathbf{z}_k = \nabla h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{R}_k, \text{ gdzie}$$

$$h(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} \theta_k^1 \\ \theta_k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan\left(\frac{y_k - s_y^1}{x_k - s_x^1}\right) \\ \arctan\left(\frac{y_k - s_y^2}{x_k - s_x^2}\right) \end{bmatrix} \quad (26)$$

Przy założeniu braku korelacji między pomiarami kierunku macierz kowariancji błędów pomiarowych \mathbf{R}_k to biały szum o wartości oczekiwanej $E[\mathbf{r}_k] = 0$ i wariancji $\sigma_r = 0.05$ (rad) przyjmuje następującą postać:

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & \sigma_r^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0025 & 0 \\ 0 & 0.0025 \end{bmatrix} \quad (27)$$

W przypadku filtrów pierwszego i drugiego rzędu EKF należy obliczyć macierz Jakobiego \mathbf{H}_k określonej jako:

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_k^1}{\partial x_k} & \frac{\partial \theta_k^1}{\partial y_k} & \frac{\partial \theta_k^1}{\partial \dot{x}_k} & \frac{\partial \theta_k^1}{\partial \dot{y}_k} \\ \frac{\partial \theta_k^2}{\partial x_k} & \frac{\partial \theta_k^2}{\partial y_k} & \frac{\partial \theta_k^2}{\partial \dot{x}_k} & \frac{\partial \theta_k^2}{\partial \dot{y}_k} \end{bmatrix} \quad (28)$$

pochodne cząstkowe względem wektora stanu \mathbf{x}_k można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_k^1}{\partial x_k} &= \frac{-(y_k - s_y^1)}{(x_k - s_x^1)^2 + (y_k - s_y^1)^2} & \frac{\partial \theta_k^1}{\partial \dot{x}_k} &= 0 \\ \frac{\partial \theta_k^1}{\partial y_k} &= \frac{x_k - s_x^1}{(x_k - s_x^1)^2 + (y_k - s_y^1)^2} & \frac{\partial \theta_k^1}{\partial \dot{y}_k} &= 0 \\ \frac{\partial \theta_k^2}{\partial x_k} &= \frac{-(y_k - s_y^2)}{(x_k - s_x^2)^2 + (y_k - s_y^2)^2} & \frac{\partial \theta_k^2}{\partial \dot{x}_k} &= 0 \\ \frac{\partial \theta_k^2}{\partial y_k} &= \frac{x_k - s_x^2}{(x_k - s_x^2)^2 + (y_k - s_y^2)^2} & \frac{\partial \theta_k^2}{\partial \dot{y}_k} &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

W przypadku filtru drugiego rzędu EKF2 należy dodatkowo obliczyć pochodne cząstkowe drugiego rzędu dla wyrażenia (14). Hessian dla pomiaru kąta z i-tego stanowiska obserwacyjnego można zapisać:

$$\text{dla } i = 1, 2$$

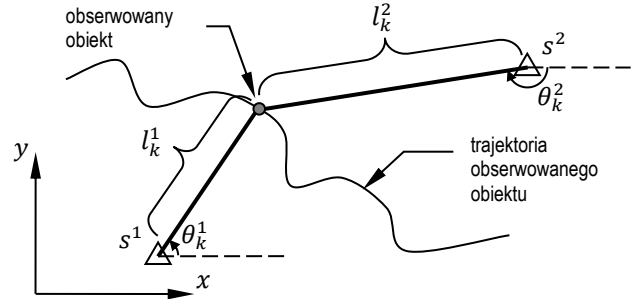
$$\mathbf{H}\mathbf{H}^i_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial x_k \partial x_k} & \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial x_k \partial y_k} & \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial x_k \partial \dot{x}_k} & \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial x_k \partial \dot{y}_k} \\ \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial y_k \partial x_k} & \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial y_k \partial y_k} & \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial y_k \partial \dot{x}_k} & \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial y_k \partial \dot{y}_k} \\ \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial \dot{x}_k \partial x_k} & \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial \dot{x}_k \partial y_k} & \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial \dot{x}_k \partial \dot{x}_k} & \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial \dot{x}_k \partial \dot{y}_k} \\ \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial \dot{y}_k \partial x_k} & \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial \dot{y}_k \partial y_k} & \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial \dot{y}_k \partial \dot{x}_k} & \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial \dot{y}_k \partial \dot{y}_k} \end{bmatrix} \quad (30)$$

gdzie niezerowe pochodne cząstkowe drugiego rzędu dla i-tego stanowiska obserwacyjnego można zapisać jako:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial x_k \partial x_k} &= \frac{-(y_k - s_y^i)}{(x_k - s_x^i)^2 + (y_k - s_y^i)^2} \\ \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial x_k \partial y_k} &= \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial y_k \partial x_k} = \frac{(y_k - s_y^i)^2 - (x_k - s_x^i)^2}{(x_k - s_x^i)^2 + (y_k - s_y^i)^2} \\ \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial y_k \partial y_k} &= \frac{x_k - s_x^i}{(x_k - s_x^i)^2 + (y_k - s_y^i)^2} \end{aligned} \quad (31)$$

2.2. Trajektoria poruszającego się obiektu obserwowanego z dwóch stanowisk przy użyciu pomiaru kierunku i odległości

Drugi eksperyment badawczy dotyczy estymacji toru obiektu z dwóch nieruchomych stanowisk obserwacyjnych nie tylko przy użyciu pomiaru kierunku jak w pierwszym wariancie, ale również odległości (Rys. 2).



Rys. 2. Trajektoria poruszającego się obiektu obserwowanego z dwóch nieruchomych stanowisk przy użyciu pomiaru kierunku i odległości [13]

Model obserwacji sformułowano poniższym wyrażeniem [13]:

$$\mathbf{z}_k = \nabla h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{R}_k, \text{ gdzie}$$

$$h(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} \theta_k^1 \\ \theta_k^2 \\ l_k^1 \\ l_k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan\left(\frac{y_k - s_y^1}{x_k - s_x^1}\right) \\ \arctan\left(\frac{y_k - s_y^2}{x_k - s_x^2}\right) \\ \sqrt{(x_k - s_x^1)^2 + (y_k - s_y^1)^2} \\ \sqrt{(x_k - s_x^2)^2 + (y_k - s_y^2)^2} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Przy założeniu braku korelacji między pomiarami kierunku macierz kowariancji błędów pomiarowych \mathbf{R}_k to biały szum o wartości oczekiwanej $E[\mathbf{r}_k] = 0$ i wariancji $\sigma_r = 0.05$ (rad) przyjmuje następującą postać:

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_r^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0025 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0025 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Natomiast dla macierzy Jakobiego określonej jako:

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_k^1}{\partial x_k} & \frac{\partial \theta_k^1}{\partial y_k} & \frac{\partial \theta_k^1}{\partial \dot{x}_k} & \frac{\partial \theta_k^1}{\partial \dot{y}_k} \\ \frac{\partial \theta_k^2}{\partial x_k} & \frac{\partial \theta_k^2}{\partial y_k} & \frac{\partial \theta_k^2}{\partial \dot{x}_k} & \frac{\partial \theta_k^2}{\partial \dot{y}_k} \\ \frac{\partial l_k^1}{\partial x_k} & \frac{\partial l_k^1}{\partial y_k} & \frac{\partial l_k^1}{\partial \dot{x}_k} & \frac{\partial l_k^1}{\partial \dot{y}_k} \\ \frac{\partial \theta_k^2}{\partial x_k} & \frac{\partial \theta_k^2}{\partial y_k} & \frac{\partial \theta_k^2}{\partial \dot{x}_k} & \frac{\partial \theta_k^2}{\partial \dot{y}_k} \end{bmatrix} \quad (34)$$

pochodne cząstkowe można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} & \text{dla } i = 1, 2 \\ \frac{\partial \theta_k^i}{\partial x_k} &= \frac{-(y_k - s_y^i)}{(x_k - s_x^i)^2 + (y_k - s_y^i)^2} & \frac{\partial \theta_k^i}{\partial \dot{x}_k} &= 0 \\ \frac{\partial \theta_k^i}{\partial y_k} &= \frac{x_k - s_x^i}{(x_k - s_x^i)^2 + (y_k - s_y^i)^2} & \frac{\partial \theta_k^i}{\partial \dot{y}_k} &= 0 \\ \frac{\partial l_k^i}{\partial x_k} &= \frac{x_k - s_x^i}{\sqrt{(x_k - s_x^i)^2 + (y_k - s_y^i)^2}} & \frac{\partial l_k^i}{\partial \dot{x}_k} &= 0 \\ \frac{\partial l_k^i}{\partial y_k} &= \frac{y_k - s_y^i}{\sqrt{(x_k - s_x^i)^2 + (y_k - s_y^i)^2}} & \frac{\partial l_k^i}{\partial \dot{y}_k} &= 0 \end{aligned}$$

gdzie współrzędne położenia stanowisk to: $(s_x^1, s_y^1) = (-1.5, -2.5)$ oraz $(s_x^2, s_y^2) = (1.5, 1.5)$.

W przypadku filtru drugiego rzędu EKF2 należy dodatkowo obliczyć pochodne cząstkowe drugiego rzędu dla wyrażenia (14). Hessian dla pomiaru kąta z i-tego stanowiska obserwacyjnego można zapisać:

$$\mathbf{H}\mathbf{H}_k^i = \begin{matrix} \text{dla } i = 1, 2 \\ \begin{matrix} \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial x_k \partial x_k} & \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial x_k \partial y_k} & \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial x_k \partial \dot{x}_k} & \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial x_k \partial \dot{y}_k} \\ \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial y_k \partial x_k} & \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial y_k \partial y_k} & \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial y_k \partial \dot{x}_k} & \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial y_k \partial \dot{y}_k} \\ \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial \dot{x}_k \partial x_k} & \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial \dot{x}_k \partial y_k} & \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial \dot{x}_k \partial \dot{x}_k} & \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial \dot{x}_k \partial \dot{y}_k} \\ \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial \dot{y}_k \partial x_k} & \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial \dot{y}_k \partial y_k} & \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial \dot{y}_k \partial \dot{x}_k} & \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial \dot{y}_k \partial \dot{y}_k} \end{matrix} \end{matrix} \quad (35)$$

gdzie niezerowe pochodne cząstkowe drugiego rzędu dla i-tego stanowiska obserwacyjnego można zapisać jako:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial x_k \partial x_k} &= \frac{2(x_k - s_x^i)(y_k - s_y^i)}{\left((x_k - s_x^i)^2 + (y_k - s_y^i)^2\right)^2} \\ \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial x_k \partial y_k} &= \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial y_k \partial x_k} = \frac{(y_k - s_y^i)^2 - (x_k - s_x^i)^2}{\left((x_k - s_x^i)^2 + (y_k - s_y^i)^2\right)^2} \\ \frac{\partial^2 \theta_k^i}{\partial y_k \partial y_k} &= \frac{-2(x_k - s_x^i)(y_k - s_y^i)}{\left((x_k - s_x^i)^2 + (y_k - s_y^i)^2\right)^2} \end{aligned} \quad (36)$$

Hessian dla pomiaru odległości z i-tego stanowiska obserwacyjnego można zapisać:

$$\mathbf{H}\mathbf{H}_k^i = \begin{matrix} \text{dla } i = 1, 2 \\ \begin{matrix} \frac{\partial^2 l_k^i}{\partial x_k \partial x_k} & \frac{\partial^2 l_k^i}{\partial x_k \partial y_k} & \frac{\partial^2 l_k^i}{\partial x_k \partial \dot{x}_k} & \frac{\partial^2 l_k^i}{\partial x_k \partial \dot{y}_k} \\ \frac{\partial^2 l_k^i}{\partial y_k \partial x_k} & \frac{\partial^2 l_k^i}{\partial y_k \partial y_k} & \frac{\partial^2 l_k^i}{\partial y_k \partial \dot{x}_k} & \frac{\partial^2 l_k^i}{\partial y_k \partial \dot{y}_k} \\ \frac{\partial^2 l_k^i}{\partial \dot{x}_k \partial x_k} & \frac{\partial^2 l_k^i}{\partial \dot{x}_k \partial y_k} & \frac{\partial^2 l_k^i}{\partial \dot{x}_k \partial \dot{x}_k} & \frac{\partial^2 l_k^i}{\partial \dot{x}_k \partial \dot{y}_k} \\ \frac{\partial^2 l_k^i}{\partial \dot{y}_k \partial x_k} & \frac{\partial^2 l_k^i}{\partial \dot{y}_k \partial y_k} & \frac{\partial^2 l_k^i}{\partial \dot{y}_k \partial \dot{x}_k} & \frac{\partial^2 l_k^i}{\partial \dot{y}_k \partial \dot{y}_k} \end{matrix} \end{matrix} \quad (37)$$

gdzie niezerowe pochodne cząstkowe drugiego rzędu dla i-tego stanowiska obserwacyjnego można zapisać jako:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l_k^i}{\partial x_k \partial x_k} &= \frac{(y_k - s_y^i)^2}{\sqrt{\left((x_k - s_x^i)^2 + (y_k - s_y^i)^2\right)^3}} \\ \frac{\partial^2 l_k^i}{\partial x_k \partial y_k} &= \frac{\partial^2 l_k^i}{\partial y_k \partial x_k} = \frac{-(y_k - s_y^i)(x_k - s_x^i)}{\sqrt{\left((x_k - s_x^i)^2 + (y_k - s_y^i)^2\right)^3}} \\ \frac{\partial^2 l_k^i}{\partial y_k \partial y_k} &= \frac{(x_k - s_x^i)^2}{\sqrt{\left((x_k - s_x^i)^2 + (y_k - s_y^i)^2\right)^3}} \end{aligned} \quad (38)$$

3. WYNIKI

Kryterium minimalizacji błędu średniokwadratowego RMS (*Root Mean Square error*) estymacji kompletnego wektora stanu dla całej sesji obliczeniowej (39) zastosowano w celu porównania dostosowania przyjętych metod filtracji do estymowanego układu dynamicznego.

$$RMS(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{1}{n \cdot p} \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^n (\mathbf{x}_{j,k} - \hat{\mathbf{x}}_{j,k})^2} \quad (39)$$

gdzie:

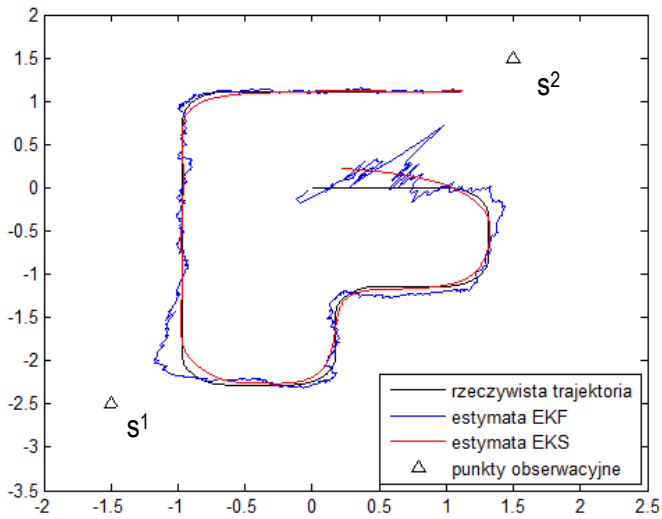
- j – numer składowej wektora stanu \mathbf{x}_k ,
- n – ilość dyskretnych k epok obliczeniowych,
- p – rozmiar wektora stanu \mathbf{x}_k .

Rezultaty przebiegu symulacji z 1050 epok obliczeniowych przedstawiono odpowiednio na rysunkach: 3-5 dla wariantu 1 i 6-8 dla wariantu 2 w postaci estymaty trajektorii na płaszczyźnie XY dla badanych metod filtracji EKF, EKF2, UKF wraz z rzeczywistym torem obiektu. Na każdym z rysunków 3-8 wyniki obliczeń przedstawiono w formie zbiorczej dla metody filtracji i odpowiadającego jej algorytmu wygładzającego.

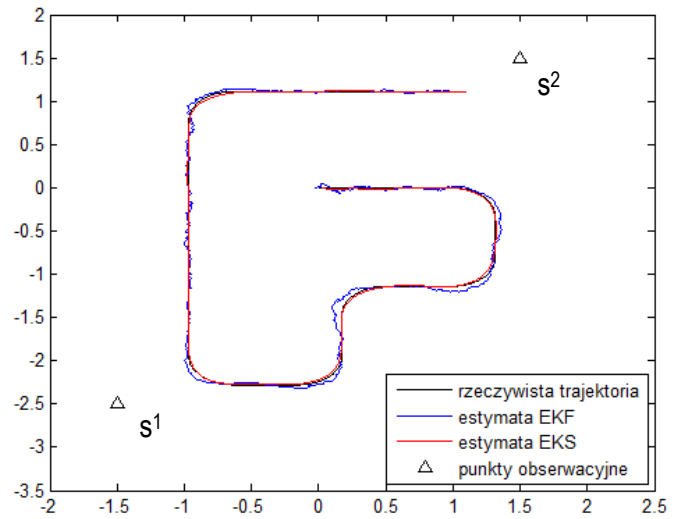
Na torze manewrującego obiektu w miejscach zmiany kierunku ruchu (Rys. 3-8) można zauważyć zmniejszenie dokładności estymacji pozycji. Przyczyną zwiększenia błędu estymacji jest przyjęty model stanu, w którym wielkość skalarna aproksymuje prędkość. Taka sytuacja prowadzi do niewłaściwej estymacji trajektorii poruszającego się obiektu. Oddziaływanie takiego zjawiska można zmniejszyć przez dodanie pomiaru odległości w modelu obserwacji co potwierdza sytuacja zamieszczona na rysunkach 6-8 lub zmianę modelu układu dynamicznego na CWPA (Continuous Wiener Process Acceleration). Innym sposobem można być zastosowanie algorytmu interaktywnych modeli IMM (Interacting Multiple Model) gdzie rodzaj modelu zależy od zachowań obiektu mobilnego.

Tab. 1. Błąd średniokwadratowy RMS i czas trwania obliczeń dla badanych algorytmów

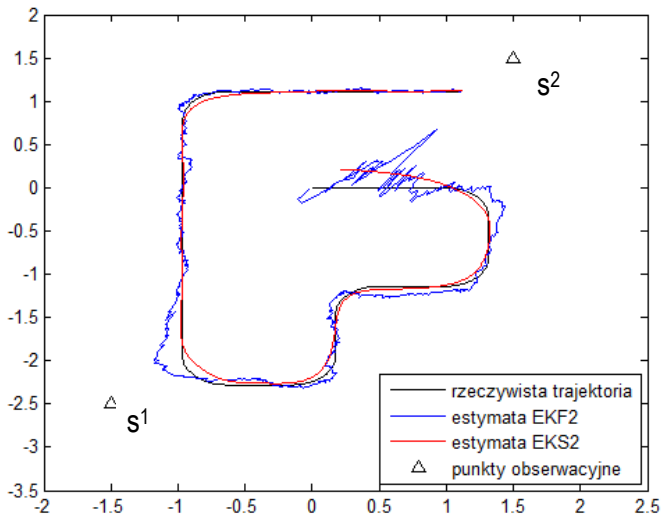
Algorytm	RMSE		Czas trwania obliczeń [s]	
	Wariant 1	Wariant 2	Wariant 1	Wariant 2
EKF	0.1367	0.0317	0.15	0.21
EKS	0.0731	0.0116	0.21	0.27
EKF2	0.1326	0.0316	0.54	1.45
EKS2	0.0713	0.0116	0.60	1.51
UKF	0.1468	0.0316	0.68	0.81
UKS	0.0786	0.0116	0.92	1.05



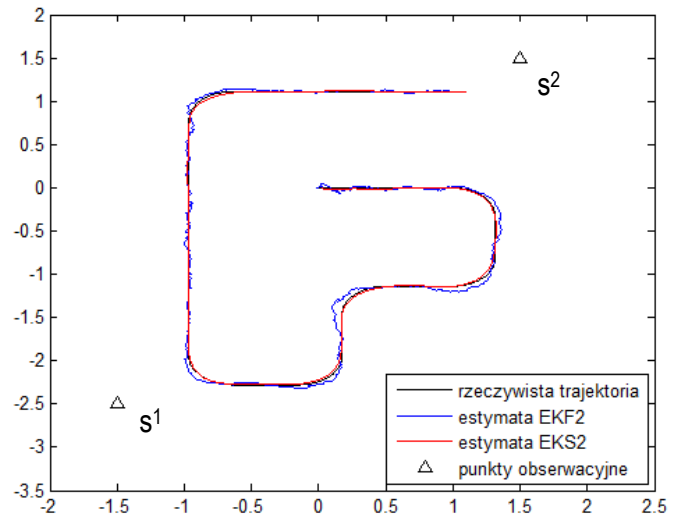
Rys. 3. Rzeczywista trajektoria obiektu oraz jej estymaty EKF, EKS w wariancie 1 na podstawie pomiaru kierunku.



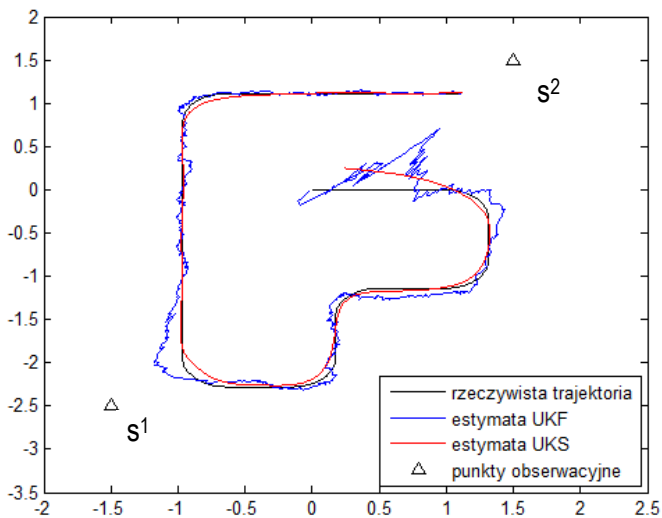
Rys. 6. Rzeczywista trajektoria obiektu oraz jej estymaty EKF, EKS w wariancie 2 na podstawie pomiaru kierunku i odległości.



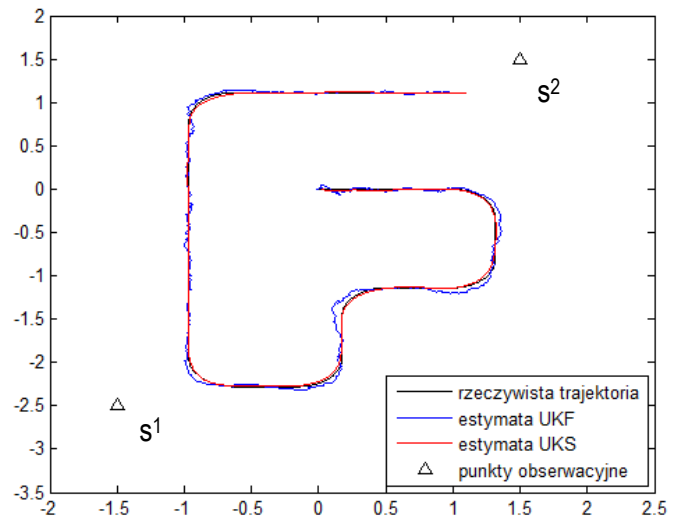
Rys. 4. Rzeczywista trajektoria obiektu oraz jej estymaty EKF2, EKS2 w wariancie 1 na podstawie pomiaru kierunku.



Rys. 7. Rzeczywista trajektoria obiektu oraz jej estymaty EKF2, EKS2 w wariancie 2 na podstawie pomiaru kierunku i odległości.



Rys. 5. Rzeczywista trajektoria obiektu oraz jej estymaty UKF, UKS w wariancie 1 na podstawie pomiaru kierunku.



Rys. 8. Rzeczywista trajektoria obiektu oraz jej estymaty UKF, UKS w wariancie 2 na podstawie pomiaru kierunku i odległości.

PODSUMOWANIE

Rezultaty przeprowadzonych badań symulacyjnych dla różnych algorytmów pozwalają na wyciągnięcie kilku wniosków. Przedstawione metody filtracji dla modeli dynamiki CWPV są optymalnymi estymatorami stanu układu dynamicznego, jeśli uwarunkowania jego rzeczywistej pracy odpowiadają założonemu modelowi dynamiki. Określenie modelu obserwacji wyrażeniem (32) uzupełnionym w stosunku do wyrażenia (26) o pomiary odległości ma znaczący wpływ na wzrost efektywności zastosowanych algorytmów w sensie minimalizacji błędu średniokwadratowego RMS, co można potwierdzić porównując następujące pary rysunków 3 z 6, 4 z 7 oraz 5 z 8. Brak estymacji pomiaru odległości w wariancie 1 wpływa na mniejszą efektywność metody UKF w stosunku do EKF i EKF2 co potwierdza analiza rysunków 3-5 oraz tabela 1.

Jak wynika z tabeli 1 metoda filtracji drugiego rzędu EKF2 okazała się najbardziej efektywna przy estymacji trajektorii w pierwszym wariancie. Chociaż w drugim wariancie metoda EKF2 uzyskała również najlepszą efektywność na równi z filtrem UKF to jednak czas obliczeń okazał się najdłuższy. Można zauważyć, że już dwukrotny wzrost ilości równań pomiarowych w modelu obserwacji dla wariantu 2 powoduje trzykrotne wydłużenie czasu obliczeń. Filtr pierwszego rzędu EKF w obu wariantach okazał się najszybszy. Z uwagi na stosunkowo mały nakład obliczeń filtr EKF znalazł wiele praktycznych zastosowań i przez co jest najczęściej stosowany. Jednak aproksymacja przy użyciu (jakobianów) pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu dla modeli silnie nieliniowych w praktyce okazuje się niewystarczająca [23]. W takiej sytuacji może okazać się przydatny filtr UKF, którego czasy obliczeń był 4-krotnie dłuższe niż dla najszybszego filtru EKF. Z uwagi na wzrost nakładów obliczeń oraz dodatkowe trudności przy wyznaczaniu hessianów szersze zastosowanie praktyczne filtru drugiego rzędu EKF2 wydaje się wątpliwe.

Zaprezentowane przykłady symulacyjne pomogły potwierdzić przydatność oraz efektywność działania zaimplementowanych metod filtracji w bibliotece BEA. W przedstawionych badaniach symulacyjnych do opisu stanu układu dynamicznego wykorzystano model CWPV. Interesująca byłaby jego zmiana na model CWPA, co mogłoby prowadzić do zwiększenia efektywności badanych metod filtracji.

BIBLIOGRAFIA

1. Christian K. Improvements of GNSS Receiver Performance Using Deeply Coupled INS measurements. ION GPS 2000.
2. Farrell J., Aided navigation GPS with high rate sensors, McGraw-Hill, 2008
3. Groves P., Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems, Artech House, 2008
4. Grejner-Brzezinska D. A., Toth C. K., and Yi Y., On Improving Navigation Accuracy of GPS/INS Systems. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, Vol. 71, No. 4, 377–389, 2005.
5. Ito K., Xiong K., Gaussian Filters for Nonlinear Filtering Problems. IEEE Transactions on Automatic Control, 45(5), 910–927, 2000.
6. Julier S.J., Uhlmann J.K., Unscented Filtering and Nonlinear Estimation, Proceedings of the IEEE vol.92, p.401–422, March 2004.
7. Kaniewski, P., Aircraft Positioning with INS/GNSS Integrated System. Molecular and Quantum Acoustics, Vol. 27, p. 149-168, 2006.
8. Kaniewski P., Struktury, modele i algorytmy w zintegrowanych systemach pozycjonujących i nawigacyjnych, Wyd. WAT, 2010
9. Konatowski, S., Sipa, T. Position estimation using Unscented Kalman Filter, Annual of Navigation, No. 8, s. 97-110, 2004.
10. Kim H. et al., An Ultra Tightly coupled GPS/INS Integration using Federated Kalman Filter. ION GPS, 2003.

11. Knight D. T., Rapid Development of Tightly Coupled GPS/INS Systems. Proceeding of ION International Meeting, Nashville, Tennessee 1999.
12. Kwiecień J., Malinowski M., Bujnowski S., Bujarkiewicz B., ATR TRACK III: The real-time GPS for public security. Reports on Geodesy, No. 2(77), 179-185, 2006.
13. Malinowski M., Kwiecień J., Study of the effectiveness of different Kalman filtering methods and smoothers in object tracking based on simulation tests, Reports on Geodesy and Geoinformatics, De Gruyter, Vol. 97, 2014.
14. Malecki K., Iwan S., Zastosowanie rozwiązań telematycznych jako czynnik warunkujący efektywne zarządzanie miejskim transportem towarowym, Logistyka 3/2014.
15. Marecki F., Logistyka dystrybucji i transportu, Zeszyty naukowe Politechniki Śląskiej, Organizacja i zarządzanie z. 57, Nr kol. 1847, 2011.
16. van der Merwe R., Wan E.A., Efficient Derivative-Free Kalman Filters for Online Learning, In Proc. of ESANN, Bruges, April 2001.
17. Murphy jr P. R., Wood D. F., Nowoczesna logistyka, Wydanie X, Tytuł Oryginalny: "Contemporary Logistics (10th Edition)", wyd. Helion, Gliwice 2011.
18. Nowicka K., Wyzwania inteligentnego zarządzania transportem w polskich miastach, Logistyka 5/2013.
19. Noureldin A., Karamat T., Georgy J., Fundamentals of Inertial Navigation, Satellite-based Positioning and their Integration, Springer, 2013
20. Rauch, H. E., Tung, F., Striebel, C. T., Maximum likelihood estimates of linear dynamic systems, AIAA Journal, 3(8):1445–1450, 1965.
21. Rogers, R.M., Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems. 3rd ed. Blacksburg, VA, USA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc. 2007
22. Särkkä S., Recursive Bayesian Inference on Stochastic Differential Equations, Doctoral dissertation, Helsinki University of Technology Laboratory of Computational Engineering Publications Raport B54, Espoo, 2006.
23. Wan E.A., van der Merwe R., The Unscented Kalman Filter for Non-linear Estimation, In Proc. of IEEE Symposium 2000 (AS-SPCC), Lake Louise, Alberta, Canada, October 2000.

Application of second order Extended Kalman Filter in positioning

The Kalman filter is often applied tool of the signal processing in integrated navigation systems. The expected accuracy and integration strategy of measuring instruments has impact on the choice of the Kalman filtering algorithm. The analysis of different filtering methods and associated smoothers based on two simulation tests was presented in this paper. EKF (Extended Kalman Filter) filter based on approximation with (jacobians) first and (hessians) second order partial derivations and derivative-free filter like UKF (Unscented Kalman Filter) was implemented in comparison. For each method of filtration, appropriate smoothers EKS (Extended Kalman Smoother), UKS (Unscented Kalman Smoother) were presented.

Autor:

dr inż. **Marcin Malinowski** – Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy im. J. i J. Śniadeckich, Wydział Budownictwa Architektury i Inżynierii Środowiska, Katedra Geomatyki, Geodezji i Gospodarki Przestrzennej, al. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz, e mail: marcin.malinowski@utp.edu.pl.