

Tomasz P. OLEJNIK

e-mail: tomasz.olejnik@p.lodz.pl

Katedra Aparatury Procesowej, Wydział Inżynierii Procesowej i Ochrony Środowiska, Politechnika Łódzka, Łódź

Model dyskretnej zmiany rozmiaru ziarn

Wstęp

Minerały wykorzystywane w procesach przemysłowych występują zwykle w połączeniu z innymi mniej wartościowymi minerałami tworząc wieloskładnikowe rudy. Rozdzielenie minerałów wymaga zatem uprzedniego ich zmielenia w celu uwolnienia wysokowartościowych składników, ziarn lub cząstek tworzących jednorodną fazę. Konsekwencją uwalniania produkty przemiału jest zmniejszenie rozmiaru ziarn. Jednocześnie proces rozdrabniania, prowadzący do uwalniania bardzo drobnych ziarn wiąże się ze znacznym nakładem energii. Uzyskanie zaś zbyt dużego rozmiaru produktu mielenia (nadziarna) bez uwolnienia wartościowych składników powoduje straty ekonomiczne. Ważne jest więc odpowiednie określenie rozmiaru produktu mielenia tak, by uzyskać najkorzystniejszą wartość wskaźnika opisującego nakłady energetyczne do efektu mielenia. W związku z tym liczne prace badawcze w ciągu ostatnich kilku dekad próbują przewidzieć rozkład wielkości cząstek produktu rozdrabniania. Można wyróżnić trzy różne podejścia do zagadnień procesu rozdrabniania.

Pierwsze podejście zostało opisane przez autorów, do których należy *Gaudina* [1926], *Kinga* [1979, 1982] czy też *Meloy'a i in.* [1987]. Przyjęli oni opis procesu rozdrabniania prowadzącego do redukcji wielkości cząstek oraz do uwalniania minerałów bez ich wzajemnej interakcji. Uznali, że zmniejszenie wielkości cząstek można opisać bez uwzględnienia morfologicznych cechy rudy oraz, że natura procesu uwalniania ziarn (cząstek) jest niezależna od parametrów pracy urządzenia rozdrabniającego. Te założenia prowadziły do przyjęcia uproszczonych hipotez: z jednej strony stwierdzono, że cząstki o tym samym rozmiarze posiadają identyczną podatność na rozdrabnianie (fragmentację) niezależnie od ich składu. Z drugiej zaś, że proces rozdrabniania jest typowo losowy, to znaczy nie ma preferencji co do propagacji powierzchni rozdzielania ziarna. Z tego względu model jest ograniczony wyłącznie do ograniczonej liczby aplikacji.

Inni autorzy jak *Choi i in.* [1988], *Herbst i in.* [1988], *Klimpel i Austin* [1983], *King* [1990], *Schneider* [1995] czy też *Olejnik* [2012] starali się unikać powyższych uproszczeń proponując studia obejmujące jednocześnie oba zjawiska. Uważali, iż różnice w przebiegu procesu rozdrabniania wynikają bezpośrednio ze składu mineralnego surowca. W takim podejściu do zagadnienia próbowano jednocześnie przewidzieć rozmiar uwalnianych ziarn oraz rozkład zawartości poszczególnych minerałów. Niestety wadą wspomnianej koncepcji była konieczność oszacowania znacznej liczby parametrów, które możliwe są do oszacowania wyłącznie na podstawie czasochłonnych analiz oraz prób przemiału.

Wreszcie *Barbery i Leroux* [1988] próbowali przezwyciężyć ograniczenia pierwszego podejścia i złożoność drugiego, proponując model hybrydowy, który wykorzystuje dostępne informacje z modelu uwalniania w celu zmniejszenia liczby parametrów koniecznych do oszacowania. Opracowane przez nich założenia pozwoliły na prognozowanie wielkości oraz rozkładów cząstek mineralnych za pomocą tzw. wykluczającej redukcji rozmiaru. Polegała ona na przemiałach w młynie kulowym tego samego surowca, przyjmując różne czasy mielenia. Do analizy produktu przemiału wykorzystywano techniki analizy obrazu i analizy chemicznej oraz rozpraszania atomów.

Omawiany model opisuje proces rozdrabniania poprzez nałożenie kilku linii przechodzących przez losowe punkty wyjściowe, znajdujące się na dwuwymiarowych obrazach struktury morfologicznej mielonych surowców. Każda z linii rozchodzi się zgodnie z zasadami wynikającymi z podatności na rozdrabnianie (kruchości) minerałów zawartych w ziarnach. W związku z tym skład oraz budowa morfologiczna ziarna odgrywają ważną rolę w procesie uwalniania i dystrybucji cząstek. Ostateczny wzorec pęknięcia ziarna odpowiada rzeczywistym proce-

som zachodzącym w strukturze podczas jego rozdrabniania. Optymalizacja algorytmu obliczeniowego oparta została na metodzie *Neldera i Meada* [1965] zaimplementowanej przez *Rowana* [1990], która umożliwia kalibrację modelu w celu zminimalizowania różnic między zaobserwowanym rozkładem powierzchni a szacowanym rozkładem powierzchni, który powstaje w wyniku mielenia.

Głównym celem niniejszej pracy jest weryfikacja metody *Neldera i Meada* [1965] do opisu procesu rozdrabniania ziarn w młynie kulowym. Weryfikacja zostanie przeprowadzona z wykorzystaniem modelu generatora cząstek.

Parametry modelu generatora cząstek

Istota modelu sprowadza się do użycia dwóch wielkości:

1. Podatności na rozdrabnianie ziarna surowca, B . Wymieniona wielkość przyjmuje dwie wartości 0 lub 1. Ziarna materiału bardziej miękkiego mają przypisaną arbitralnie wartość 0.
2. Liczby linii pęknięcia powierzchni ziarna, N_i , nałożonej na dwuwymiarowy (płaski) obraz struktury ziarna.

Analiza modelu sprowadza się do obserwacji mikroskopowych powierzchni ziarna i wskazania na podstawie budowy morfologicznej możliwych linii jego pęknięcia. Jednym z parametrów modelu jest kruchość (podatność na rozdrabnianie) surowca mineralnego, wyrażana prawdopodobieństwem przecięcia przez linię pęknięcia każdej z linii rozgraniczającej składniki fazowe ziarna. Dla bardziej miękkiego składnika ziarna surowca, dla którego kruchość oznaczona jest 0, prawdopodobieństwo przecięcia linii rozgraniczającej składniki fazowe wynosi 1. Oznacza to, iż rozchodzenie się pęknięć w fazie bardziej miękkiej jest zawsze skuteczne i przebiega bez ograniczeń.

Dla twardszej fazy (wtrącenia), kruchość jest szukanym parametrem, który obliczany jest na podstawie wielu wyników modelu wyjściowego. Gdy krawędź pęknięcia minerału spotyka się z twardszym wtrąceniem, generowana jest losowa liczba pomiędzy 0 i 1. Jeśli wygenerowana liczba, określająca kruchość, jest mniejsza niż prawdopodobieństwo określone przez użytkownika, linia pęknięcia ziarna musi zmienić kierunek. Dla nowego wyznaczonego kierunku, przeprowadza się kolejne obliczenia. Cała procedura trwa tak długo, aż linia pęknięcia ziarna osiągnie granicę obrazu ziarna. Końcowy wynik opisanej procedury stanowi zestaw linii określających prawdopodobne obszary (regiony) pęknięcia, odpowiadające rzeczywistym warunkom. Kolejnym parametrem modelu jest liczba linii pęknięcia ziarna N_i nałożonych na obraz struktury ziarna. Jest ona zależna od czasu rozdrabniania.

Związek między czasem mielenia a liczbą linii pęknięć

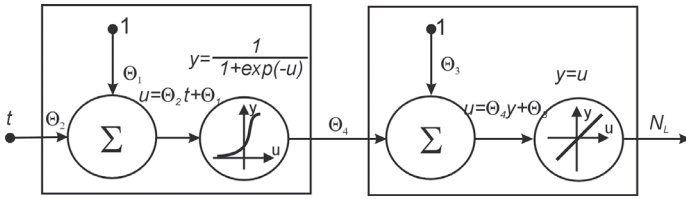
Nieznaną i nieliniową zależność między czasem mielenia t , a liczbą linii pęknięć struktury ziarna, N_i opisano w pracy dla przyjętego zakresu czasu mielenia za pomocą modelu zaproponowanego przez *Neldera i Meada* [1965]. Zależność między czasem mielenia t , a liczbą linii pęknięć N_i wyrażono jako

$$N_i = \frac{\Theta_4}{1 + \exp[-(\Theta_2 t + \Theta_1)]} + \Theta_3 \quad (1)$$

gdzie:

Θ_1 , Θ_2 , Θ_3 oraz Θ_4 – wagi [-]

Rys. 1 przedstawia schemat dwóch warstw sieci neuronowej z logiczną funkcją aktywującą typu S . Pierwsza, ukryta powierzchnia zawiera nieliniową funkcję, $y(u) = 1/[1 + \exp(-u)]$ zaś druga powierzchnia, zwana wyjściową, zawiera liniową funkcję $y(u) = u$. Wartość funkcji $y(u) = 1/[1 + \exp(-u)]$ zawiera się w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$, dla dowolnej wartości argumentu u .



Rys. 1. Dwuwarstwowa sieć neuronowa w układzie pojedyncze wejście – pojedyncze wyjście [Bishop, 1997]

Jak wykazał w swej pracy Bishop [1997], każde ciągle funkcjonalne przekształcenie przestrzeni danych wyjściowych można aproksymować dowolnie przez dwie warstwy sieci neuronowej o wystarczająco dużej liczbie logicznych funkcji S , używając w tym celu funkcji warstwy ukrytej. W związku z tym liczba linii pęknięć przewidywana za pomocą modelu musi się zawierać w akceptowalnym przedziale $[N_{lmin}, N_{lmax}]$:

$$N_i = \min \left(\max \left(\left(\frac{\Theta_4}{1 + \exp[-(\Theta_2 t + \Theta_1)]} + \Theta_3 \right), N_{lmin}, N_{lmax} \right) \right) \quad (2)$$

gdzie $N_{lmin} = 0$, N_{lmax} jest 2-3 razy większe niż liczba linii testowych w fazie badawczej dwuwymiarowego modelu generatora cząstek. Operatory min i max zastosowane kolejno do wyjścia sieci neuronowej ograniczają przewidywaną liczbę linii pęknięć do wartości zawartej w przedziale $[N_{lmin}; N_{lmax}]$.

Funkcja celu

Aby można było posługiwać się generatorem, konieczne jest określenie wartości podatności (kruchości) B oraz wartości wag Θ_1 do Θ_4 . Dane wejściowe modelu reprezentowane są przez obraz powierzchni ziarna oraz czas rozdrabniania. Generowanie wartości parametrów odbywa się każdorazowo dla danej populacji cząstek oraz określonego czasu mielenia. Dodatkowo obliczane są rozkłady wielkości cząstek. Działanie modelu jest oceniane poprzez porównanie rozkładów wielkości cząstek uzyskanych w wyniku symulacji z odpowiednimi wielkościami zmierzonymi w wyniku pomiarów wypolerowanych zglądów ziarna dla różnych czasów mielenia. Wartości ważone parametrów otrzymano rozwiązując nieliniowy problem optymalizacji za pomocą równań najmniejszych kwadratów:

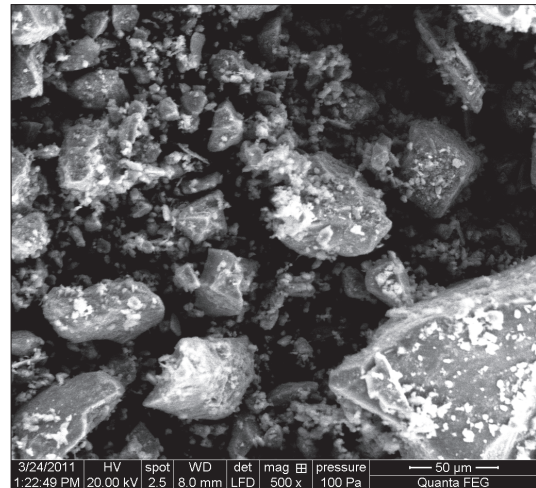
$$\min J(B, \Theta) = \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{i=1}^{nsc} w_i [G^{obs}(\bar{\phi}_i, t_j) - G^{est}(\bar{\phi}_i, t_j/B, \Theta)]^2 + \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{i=1}^{nsc} p_i [F^{obs}(\bar{\phi}_i, t_j) - F^{est}(\phi_i, t_j/B, \Theta)]^2 \quad 0 \leq B \leq 1 \quad (3)$$

gdzie:

- $J(B, \Theta)$ – funkcja celu, ważona suma kwadratów odchyłeń między danymi eksperymentalnymi a symulacją modelu [-],
- n_i – czas mielenia [min],
- nsc – liczba klas rozmiarowych ziarna [-],
- w_i – waga odchylenia czynników między symulacją a obserwacją średniego rozmiaru ziarna w i -tej klasie rozmiarowej [-],
- $G^{obs}(\bar{\phi}_i, t_j)$ – średni obserwowany rozmiar cząstki po czasie mielenia t_j [mm]
- $G^{est}(\bar{\phi}_i, t_j/B, \Theta)$ – obliczeniowy średni rozmiar ziarna po czasie mielenia t_j [mm]
- p_i – ważony czynnik odchylenia pomiędzy skumulowanym rozmiarem ziarn uzyskany z symulacji i obserwacji [-]
- i – oznaczenie klasy rozmiarowej ziarn, (1, 2, ...nsc) [-]
- $F^{obs}(\bar{\phi}_i, t_j)$ – obserwowana skumulowana frakcja ziarn o średnicy mniejszej niż $\bar{\phi}_i$, mierzona według obszaru ziarn po czasie mielenia t_j [-]
- $F^{est}(\phi_i, t_j/B, \Theta)$ – oliczeniowa skumulowana frakcja ziarn o średnicy mniejszej niż ϕ_i , mierzona według obszaru ziarn po czasie mielenia t_j [-]
- Θ – maczyca parametrów $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ i Θ_4 [-]

Badania oraz walidacja danych eksperymentalnych

40 kg granitu (materiału wyjściowego) poddano mieleniu w młynie kulowym. Ziarna surowca składały się głównie z twardych wtrąceń kwarcytu oraz miękkiej ilowej osnowy. Jako wartościowy minerał, który był uwalniany podczas mielenia przyjęto wtrącenia kwarcytu o rozmiarze mniejszym niż 100 μm . Na rys. 2 przedstawiono obraz ziarn granitu przed rozpoczęciem mielenia widziany pod mikroskopem skaningowym przy powiększeniu 500 razy. Rozmiar ziarn nadawy zawierał się w przedziale 5÷8 mm.



Rys. 2. Obraz powierzchni granitu. Powiększenie 500 razy

Materiał testowy mielony był w młynie kulowym, działającym okresowo. Produkt mielenia do analizy pobierano po 30, 60, 90 i 150 minutach mielenia. Reprezentatywne próbki zmielonego surowca poddano analizie granulometrycznej, wykorzystując w tym celu analizator cząstek AWK 3D, firmy Kamika Instruments. Uzyskano w ten sposób dane opisujące średnie rozmiary ziarn, powierzchnię oraz objętość ziarn, przeliczane na podstawie zastępczej średnicy Fereta, wyliczanej dla trzech charakterystycznych wymiarów ziarna: długości, szerokości oraz wysokości.

Dodatkowo, wykorzystując mikroskop skaningowy QUANTA 200F zbadano skład chemiczny, określany liczbą atomów poszczególnych pierwiastków wchodzących w skład związków chemicznych minerałów, z których zbudowane były ziarna produktu.

Jeśli N_{ij} jest liczbą lub udziałem cząstek sferycznych lub elipsoidalnych zawartych w klasie rozmiarowej ϕ_j przypadającej na obliczeniową powierzchnię ziarna to N_{Aij} określa udział ziarn dla klasy rozmiarowej i (w granicach od ϕ_{i-1} do ϕ_i) będący następstwem rozdziału ziarna o rozmiarze ϕ_j :

$$N_{Aij} = p_{ij} \phi_j N_{Vj} K(q) \quad (4)$$

gdzie:

- p_{ij} – prawdopodobieństwo utworzenia ziarna o rozmiarach między ϕ_{i-1} a ϕ_i w wyniku rozdrobnienia ziarna o rozmiarze ϕ_j [-]
- $K(q)$ – stała zależna od proporcji między trzema charakterystycznymi wymiarami ziarna: długością, szerokością oraz wysokością opisującymi jego kształt, [-]

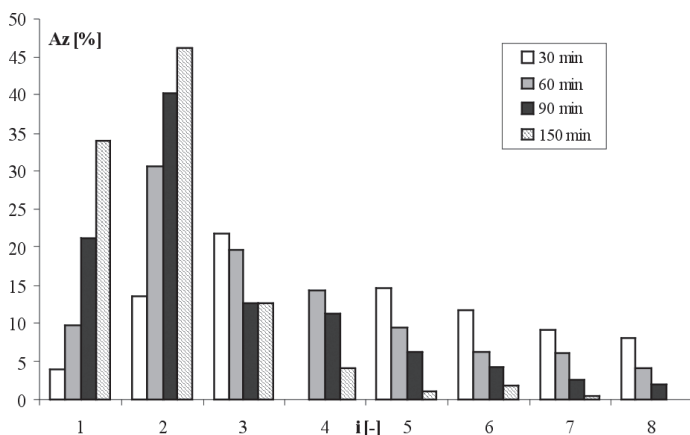
Prawdopodobieństwo p_{ij} można ocenić wykorzystując zależność:

$$p_{ij} = F_{ij} - F_{i-j} \quad (5)$$

F_{ij} reprezentuje funkcję rozkładu prawdopodobieństwa określoną zależnością:

$$F_{ij} = \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{\phi}_i}{\phi_j}\right)^2}, & \bar{\phi}_i \leq \phi_j \\ 1, & \bar{\phi}_i > \phi_j \end{cases} \quad (6)$$

Rys. 3 przedstawia udziały ziarn dla ośmiu klas rozmiarowych. Udziały zawierają powierzchnię ziarn liczoną z wykorzystaniem zastępczej średnicy Fereta.



Rys. 3. Zmierzone powierzchniowe udziały ziarn A_z produktu mielenia granitu dla i -tej klasy rozmiarowej i czterech czasów mielenia granitu

W celu kalibracji modelu wykonano 100 iteracji. W tab. 1 zamieszczono obliczone wartości parametrów θ_1 , θ_2 , θ_3 oraz θ_4 , jak również sumę kwadratów odchylenia (SD) między zmierzoną a modelową wartością rozkładów powierzchni wraz z liczbą linii pęknięć ziarn uzyskanych dla czterech czasów mielenia.

Tab. 1. Wartości parametrów modelu oraz SD dla zmierzonych i oszacowanych rozkładów powierzchni ziarn

B	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	Liczba linii				SD
					30	60	90	150	
0,75	0,499	5,481	0,098	3,485	28	41	44	53	706,3
0,80	0,525	4,587	0,058	3,168	26	37	42	50	587,2
0,85	0,584	3,983	0,108	2,459	25	35	41	46	430,2
0,90	0,682	4,957	0,195	2,191	23	34	39	44	318,8
0,95	0,761	5,496	-0,25	2,221	21	32	36	40	248,9

Wnioski

Porównanie modelu *Neldera i Meada* [1965] oraz danych doświadczalnych wskazuje na dużą zbieżność wyników. Opis powierzchniowego rozkładu wielkości produktu mielenia (kwarcytu) daje zbliżone rozkłady wielkości uwalnianych ziarn.

Pomimo zaobserwowanej różnicy w wartościach uzyskanych z modelu i badań laboratoryjnych, wielkości oraz charakter zmian występujących dla poszczególnych klas rozmiarowych ziarn (wynikający z czasu mielenia) jest zbliżony.

Model generatora wielkości uwalnianych cząstek ze skały płonnej może służyć do przewidywania rozkładów drobnych minerałów uwalnianych w procesie przemiału. Możliwe jest jego stosowanie do analizy innych struktur krystalograficznych, pod warunkiem wykonania wzorcowania danych modelowych z wynikami modelowymi.

Parametry modelu mogą być powiązane z warunkami procesowymi np. czasem mielenia lub energią rozdrabniania ziarn surowca.

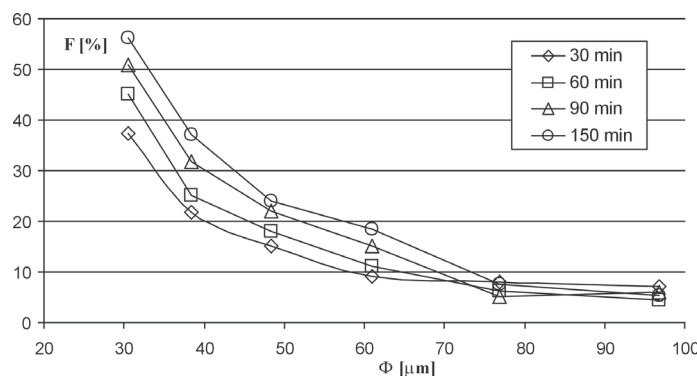
LITERATURA

Barbery G., Leroux D., 1988. Prediction of particle composition distribution after fragmentation of heterogeneous materials. *Int. J. Mineral Proc.* **22**, 9–24; DOI: 10.1016/0301-7516(88)90053-1

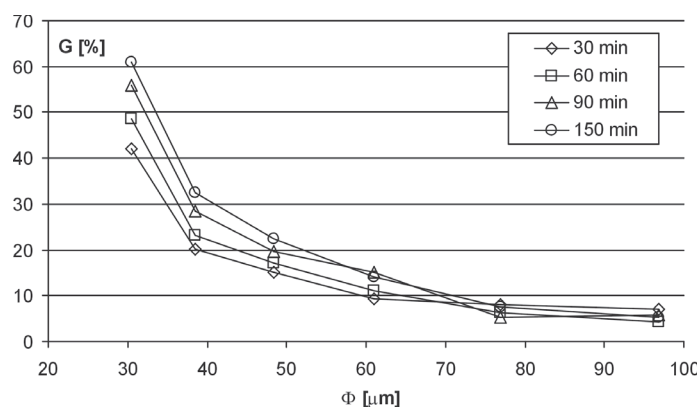
Bishop C.M., 1997. *Neural Networks for Pattern Recognition*. Clarendon Press, Oxford (ISBN: 978-0-19-853864-6)

Choi W.Z., Adel G.T., Yoon R.H., 1988. Liberation modelling using automated image analysis. *Int. J. Mineral Proc.* **22**, 59–73; DOI: 10.1016/0301-7516(88)90056-7

Gaudin A.M., 1926. An investigation of the crushing phenomena. *AIME, Transactions*, **73**, 253–316



Rys. 4. Rozkład procentowy uwolnionych ziarn kwarcytu o różnych średnicach zastępczych w zależności od czasu mielenia – dane doświadczalne



Rys. 5. Rozkład procentowy uwolnionych ziarn kwarcytu o różnych średnicach zastępczych w zależności od czasu mielenia – dane modelowe

Herbst J.A., Rajamani K., Lin C.L., Miller J.D., 1988. Development of a multi-component-multisize liberation model. *Minerals Engineering* **1**, nr 2, 97–111; DOI: 10.1016/0892-6875(88)90001-5

Klimpel, R., Austin, L., 1983. A Preliminary Model of Liberation from a Binary System. *Powder Technology*, **34**, nr 1, 121-130 DOI: 10.1016/0032-5910(83)87040-5

King R.P., 1979. A model for the quantitative estimation of mineral liberation by grinding. *Int. J. Mineral Proc.* **6**, 207–220; DOI: 10.1016/0301-7516(79)90037-1

King R.P., 1990. *Calculation of the liberation spectrum in products produced in continuous milling circuits*. [w:] Proceedings 7th European Symposium on Comminution, Ljubljana, **2**, 429–444

Meloy T.P., Preti U., Ferrara G., 1987. Liberation-volume and mass lockedness profiles derived-theoretical and practical conclusions. *Int. J. Mineral Proc.* **20**, 17–34; DOI: 10.1016/0301-7516(87)90014-7

Nelder J.A., Mead R., 1965. A Simplex method for function minimization. *Computer J.* **7**, nr 4, 308-313. DOI: 10.1093/comjnl/7.4.308

Olejnik P.T., 2012. Grinding kinetics of granite considering morphology and physical properties grains, *Physicochemical Problems of Mineral Processing*, **48**, 1, 149-158

Rowan T.H., 1990. *Functional stability analysis of numerical algorithms*. PhD Thesis, University of Texas, Austin. (03.2013): <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.1.1.5708&rep=rep1&type=pdf>

Schneider, C., 1995. *Measurement and calculation of liberation in continuous milling circuits*. PhD Thesis, University of Utah (03.2013): http://mineraltech.com/Downloads/CLSchneider_Dissertation.pdf

Badania były finansowane z programu W-10/1/2013/Dz.St. Wydziału Inżynierii Procesowej i Ochrony Środowiska Politechniki Łódzkiej.