

Sebastian GŁOWIŃSKI

## DYNAMIKA STATKU POWIETRZNEGO I FOTEŁA KATAPULTOWEGO W UKŁADZIE PRZESTRZENNYM

### Streszczenie

Artykuł przedstawia model matematyczny dynamiki statku powietrznego i fotela katapultowego. Przeprowadzono symulację wybranego typu fotela katapultowego z uwzględnieniem zmiany masy pilota i prędkości lotu statku powietrznego przy wykorzystaniu pakietu MATLAB ze szczególnym uwzględnieniem przelotu nad statecznikiem pionowym samolotu.

### WSTĘP

Dynamiczne równania ruchu statku powietrznego są z reguły wprowadzane w nieinercyjnym układzie współrzędnych związanym z samolotem F<sub>3</sub>. W celu ujednoczenia w przypadku fotela katapultowego należy zastosować to samo podejście. Jako uproszczenia nie mające większego wpływu na wyniki symulacji, samolot i fotel z pilotem są traktowane jako bryły sztywne. Atmosfera jest zgodna z atmosferą wzorcową. Dynamiczne równania ruchu wyprowadzono przy wykorzystaniu równań Boltzmana-Hamela [4,5,6].

## 1. SIŁY I MOMENTY SIŁ DZIAŁAJĄCE NA OBIEKT

### 1.1. Statek powietrzny

Siły aerodynamiczne działające na samolot w układzie współrzędnych F<sub>3</sub>, związanym sztywno z poruszającym się samolotem O<sub>s</sub>x<sub>s</sub>y<sub>s</sub>z<sub>s</sub> o początkach w dowolnie przyjętym punkcie opisane są zależnościami [2]

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{sa} &= -\frac{1}{2}\rho\mathbf{V}_{s0}^2S_s(C_{Xs}\cos\beta_s\cos\alpha_s + C_{Ys}\sin\beta_s\cos\alpha_s - C_{Zs}\sin\alpha_s) + X_{sa}^{qs}\mathbf{q}_s, \\ \mathbf{Y}_{sa} &= -\frac{1}{2}\rho\mathbf{V}_{s0}^2S_s(-C_{Xs}\sin\beta_s + C_{Ys}\cos\beta_s) + Y_{sa}^{ps}\mathbf{p}_s + Y_{sa}^{rs}\mathbf{r}_s, \\ \mathbf{Z}_{sa} &= -\frac{1}{2}\rho\mathbf{V}_{s0}^2S_s(C_{Xs}\cos\beta_s\sin\alpha_s + C_{Ys}\sin\beta_s\sin\alpha_s + C_{Zs}\cos\alpha_s) + Z_{sa}^{qs}\mathbf{q}_s. \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie:

$C_{Xs}, C_{Ys}, C_{Zs}$  - bezwymiarowe współczynniki sił aerodynamicznych (oporu, nośnej i bocznej samolotu w układzie F<sub>3</sub>).

$X_{sa}^{qs}, Y_{sa}^{ps}, Y_{sa}^{rs}, Z_{sa}^{qs}$  - pochodne sił aerodynamicznych  $X_{sa}, Y_{sa}, Z_{sa}$  względem prędkości kątowych  $\mathbf{p}_s, \mathbf{q}_s, \mathbf{r}_s$ .

$\mathbf{V}_{s0}$  - prędkość lotu (przy uwzględnieniu wiatru). Przy braku wiatru równa jest prędkości samolotu  $\mathbf{V}_s$ . Posiada ten sam kierunek i wartość.

$S_s$  - pole powierzchni skrzydeł samolotu.

$\rho$  - gęstość powietrza na danej wysokości.

Jeśli środek ciężkości statku powietrznego nie pokrywa się z początkiem układu  $F_3$  i jest opisany wektorem  $\mathbf{r}_{cs}=[x_{cs}, y_{cs}, z_{cs}]^T$ , równania momentów mają postać

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{sa} &= -\frac{1}{2}\rho\mathbf{V}_{s0}^2S_s[y_{cs}(C_{Xs}\cos\beta_s\sin\alpha_s + C_{Ys}\sin\beta_s\sin\alpha_s - C_{Zs}\cos\alpha_s) + \\ &\quad -z_{cs}(C_{Xs}\sin\beta_s - C_{Ys}\cos\beta_s) + \frac{b}{2}(C_{Ls}\cos\beta_s\cos\alpha_s + \\ &\quad + C_{Ms}\sin\beta_s\cos\alpha_s - C_{Ns}\sin\alpha_s)] + L_{sa}^{ps}\mathbf{p}_s + L_{sa}^{rs}\mathbf{r}_s. \\ \mathbf{M}_{sa} &= -\frac{1}{2}\rho\mathbf{V}_{s0}^2S_s[z_{cs}(C_{Xs}\cos\beta_s\cos\alpha_s + C_{Ys}\sin\beta_s\cos\alpha_s - C_{Zs}\sin\alpha_s) + \\ &\quad -x_{cs}(C_{Xs}\cos\beta_s\sin\alpha_s + C_{Ys}\sin\beta_s\sin\alpha_s + C_{Zs}\cos\alpha_s) + \\ &\quad + c_s(C_{Ls}\sin\beta_s - C_{Ms}\cos\beta_s)] + M_{sa}^{qs}\mathbf{q}_s + M_{sa}^{ws}\mathbf{w}_s. \\ \mathbf{N}_{sa} &= -\frac{1}{2}\rho\mathbf{V}_{s0}^2S_s[x_{cs}(C_{Xs}\sin\beta_s - C_{Ys}\cos\beta_s) - y_{cs}(C_{Xs}\cos\beta_s\cos\alpha_s + \\ &\quad + C_{Ys}\sin\beta_s\cos\alpha_s - C_{Zs}\sin\alpha_s) + \frac{b}{2}(C_{Ls}\cos\beta_s\sin\alpha_s + \\ &\quad + C_{Ms}\sin\beta_s\sin\alpha_s + C_{Ns}\cos\alpha_s)] + N_{sa}^{ps}\mathbf{p}_s + N_{sa}^{rs}\mathbf{r}_s.\end{aligned}\quad (2)$$

gdzie:

$C_{Ls}, C_{Ms}, C_{Ns}$  - bezwymiarowe współczynniki aerodynamicznego momentu przechylenia, pochylenia i odchylenia.

$L_{sa}^{ps}, \dots, N_{sa}^{rs}$  - pochodne składowych momentów aerodynamicznych  $\mathbf{L}_{sa}, \mathbf{M}_{sa}, \mathbf{N}_{sa}$  względem prędkości kątowych  $\mathbf{p}_s, \mathbf{q}_s, \mathbf{r}_s$ .

$M_{sa}^{ws}$  - pochodna składowej momentu aerodynamicznego względem składowej przyspieszenia  $\mathbf{w}_s$ .

$b_s$  - rozpiętość skrzydeł.

$c_s$  - średnia cięciwa aerodynamiczna.

Równania sił i momentów aerodynamicznych działających na statek powietrzny w zapisie macierzowym przy wykorzystaniu macierzy transformacji pomiędzy układem grawitacyjnym związanym ze statkiem powietrznym  $O_{sg}x_{sg}y_{sg}z_{sg}$  lub fotelem katapultowym  $O_{g}x_{g}y_{g}z_{g}$ , a układami prędkościowymi dla statku powietrznego  $O_{sa}x_{sa}y_{sa}z_{sa}$  lub dla fotela katapultowego  $O_{a}x_{a}y_{a}z_{a}$  (związanymi z kierunkiem opływu powietrza) można przedstawić jako

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{as} &= \frac{1}{2}\rho\mathbf{V}_{s0}^2S_s\mathbf{T}_{as} \cdot \mathbf{T}_s^F + \mathbf{T}_s^A \cdot \boldsymbol{\Omega}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{sa} \\ \mathbf{Y}_{sa} \\ \mathbf{Z}_{sa} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{m}_{as} &= \frac{1}{2}\rho\mathbf{V}_{s0}^2S_s\mathbf{T}_{as} \cdot (\mathbf{T}_{cs} \cdot \mathbf{T}_s^F + \mathbf{T}_s \cdot \mathbf{T}_s^G) + \mathbf{T}_s^D \cdot \boldsymbol{\Omega}_s + \mathbf{T}_s^E \cdot \dot{\mathbf{v}}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{sa} \\ \mathbf{M}_{sa} \\ \mathbf{N}_{sa} \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (3)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_s^A &= \begin{bmatrix} 0 & X_{sa}^{qs} & 0 \\ Y_{sa}^{ps} & 0 & Y_{sa}^{rs} \\ 0 & Z_{sa}^{qs} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{cs} = \begin{bmatrix} 0 & -z_{cs} & y_{cs} \\ z_{cs} & 0 & -x_{cs} \\ -y_{cs} & x_{cs} & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{T}_s &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}b_s & 0 & 0 \\ 0 & -c_s & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}b_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_s^D = \begin{bmatrix} L_{sa}^{ps} & 0 & L_{sa}^{rs} \\ 0 & M_{sa}^{qs} & 0 \\ N_{sa}^{ps} & 0 & N_{sa}^{rs} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{T}_s^E &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{sa}^{ws} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_s^F = \begin{bmatrix} C_{Xs} \\ C_{Ys} \\ C_{Zs} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_s^G = \begin{bmatrix} C_{Ls} \\ C_{Ms} \\ C_{Ns} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Wektor sił i momentów od sił aerodynamicznych działających na statek powietrzny w zapisie ogólnym przyjmuje postać

$$\mathbf{F}_{as} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{as}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s) \\ \mathbf{m}_{as}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

## 1.2. Fotel katapultowy

Fotel katapultowy ze względu na swój kształt posiada duży współczynnik oporu powietrza [1,3]. Podczas wyjścia fotela z prowadnic kabiny występuje znaczna różnica ciśnienia powietrza od strony nawietrznej i zawietrznej. Wektory sił i momentów aerodynamicznych fotela są opisane równaniami:

$$\mathbf{f}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_a \\ \mathbf{Y}_a \\ \mathbf{Z}_a \end{bmatrix}, \mathbf{m}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_a \\ \mathbf{M}_a \\ \mathbf{N}_a \end{bmatrix}. \quad (5)$$

gdzie:

$\mathbf{X}_a, \mathbf{Y}_a, \mathbf{Z}_a$  - siła podłużna, boczna i wznosząca działające na fotel.  
 $\mathbf{L}_a, \mathbf{M}_a, \mathbf{N}_a$  - moment przechylający, pochylający i odchylający.

Siły aerodynamiczne działające na fotel w układzie współrzędnych  $F_3$ , związanym sztywno z poruszającym się fotelem  $Oxyz$  o początkach w dowolnie przyjętym punkcie mają postać

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_a &= -\frac{1}{2}\rho\mathbf{V}_0^2(S_{yzf}C_X\cos\beta\cos\alpha + S_{xzf}C_Y\sin\beta\cos\alpha + S_{xyf}C_Z\sin\alpha) + X_{fa}^q\mathbf{q}, \\ \mathbf{Y}_a &= -\frac{1}{2}\rho\mathbf{V}_0^2(S_{yzf}C_X\sin\beta - S_{xzf}C_Y\cos\beta) + Y_{fa}^p\mathbf{p} + Y_{fa}^r\mathbf{r}, \\ \mathbf{Z}_a &= -\frac{1}{2}\rho\mathbf{V}_0^2(S_{yzf}C_X\cos\beta\sin\alpha + S_{xzf}C_Y\sin\beta\sin\alpha + S_{xyf}C_Z\cos\alpha) + Z_{fa}^q\mathbf{q}. \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie:

$C_X, C_Y, C_Z$  - bezwymiarowe współczynniki sił aerodynamicznych (oporu, nośnej i bocznej fotela w układzie  $F_3$ ).

$X_{fa}^q, Y_{fa}^p, Y_{fa}^r, Z_{fa}^q$  - pochodne sił aerodynamicznych  $\mathbf{X}_a, \mathbf{Y}_a, \mathbf{Z}_a$ , względem prędkości kątowych  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ .

$\mathbf{V}_0$  - prędkość lotu (przy uwzględnieniu wiatru). Przy braku wiatru równa jest prędkości fotela  $\mathbf{V}$ . Posiada ten sam kierunek i wartość.

$S_{xyf}, S_{xzf}, S_{yzf}$  - powierzchnia dolna, boczna i czołowa fotela.

W większości analizowanych przypadków środek aerodynamiczny znajduje się w środku masy fotela, z którym związany jest początek układu współrzędnych  $F_3$  dla którego równania momentów można zapisać

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_a &= -\frac{1}{2}\rho\mathbf{V}_0^2(l_f S_{xzf}C_L\cos\beta\cos\alpha + l_f S_{yzf}C_M\sin\beta\cos\alpha + \\ &\quad -b_f S_{xzf}C_N\sin\alpha) + L_{fa}^p\mathbf{p} + L_{fa}^r\mathbf{r}, \\ \mathbf{M}_a &= -\frac{1}{2}\rho\mathbf{V}_0^2 l_f (S_{xzf}C_L\sin\beta - S_{yzf}C_M\sin\beta) + M_{fa}^q\mathbf{q}, \\ \mathbf{N}_a &= -\frac{1}{2}\rho\mathbf{V}_0^2(l_f S_{xzf}C_L\cos\beta\sin\alpha + l_f S_{yzf}C_M\sin\beta\cos\alpha + \\ &\quad + b_f S_{xzf}C_N\cos\alpha) + N_{fa}^p\mathbf{p} + N_{fa}^r\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie:

$C_L, C_M, C_N$  - bezwymiarowe współczynniki aerodynamicznego momentu przechylania, pochylania i odchylania fotela w układzie współrzędnych  $F_3$ .

$L_{fa}^p, \dots, N_{fa}^r$  - pochodne składowych momentów aerodynamicznych  $\mathbf{L}_{fa}, \mathbf{M}_{fa}, \mathbf{N}_{fa}$  względem

- $l_f$                       prędkości kątowych  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{r}$ .  
 - wysokość fotela.  
 $b_f$                       - długość fotela.

Wektor sił i momentów od sił aerodynamicznych działających na fotel jest funkcją zmiennych stanu  $\mathbf{x}$  i w zapisie ogólnym przyjmuje postać [9]

$$\mathbf{F}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a(\mathbf{x}) \\ \mathbf{m}_a(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

## 2. RÓWNANIA RUCHU OBIEKTU W PRZESTRZENI

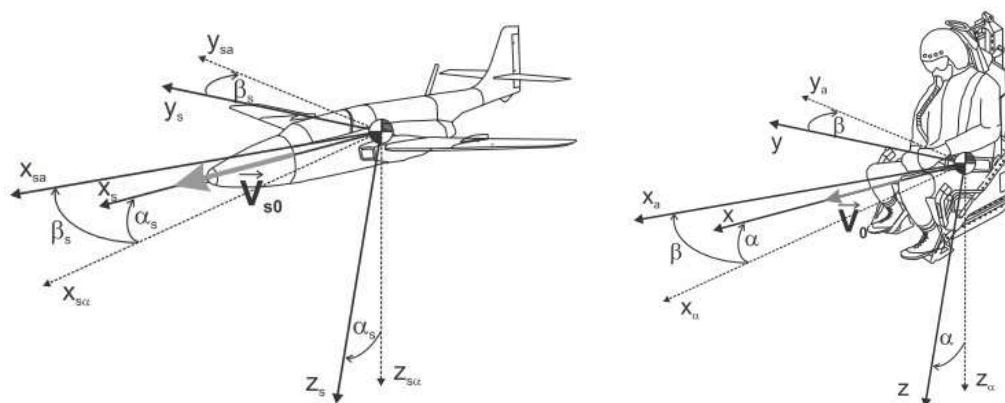
### 2.1. Statek powietrzny

Najkorzystniej jest zapisywać równania ruchu przy wykorzystaniu  $V_{s0}$ ,  $\alpha_s$  oraz  $\beta_s$  zamiast  $\mathbf{u}_s$ ,  $\mathbf{v}_s$ ,  $\mathbf{w}_s$ , ponieważ te dane są odczytywane podczas lotu. W przypadku samolotu jego prędkość lotu względem powietrza  $V_s$ , kąt natarcia  $\alpha_s$  i kąt ślizgu  $\beta_s$  wynoszą odpowiednio [7,8]

$$\begin{aligned} V_{s0} &= \sqrt{\mathbf{u}_s^2 + \mathbf{v}_s^2 + \mathbf{w}_s^2} \\ \alpha_s &= \arctan\left(\frac{\mathbf{w}_s}{\mathbf{u}_s}\right) \\ \beta_s &= \arcsin\left(\frac{\mathbf{v}_s}{V_{s0}}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Składowe wektora prędkości liniowej  $\mathbf{u}_s$ ,  $\mathbf{v}_s$ ,  $\mathbf{w}_s$  opisują równania

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_s &= V_{s0} \cos \alpha_s \cos \beta_s \\ \mathbf{v}_s &= V_{s0} \sin \beta_s \\ \mathbf{w}_s &= V_{s0} \sin \alpha_s \cos \beta_s. \end{aligned} \quad (10)$$



Rys.1. Prędkościowe układy odniesienia samolotu i fotela katapultowego, kąt natarcia  $\alpha$  i ślizgu  $\beta$

Po obliczeniu pochodnych z równań (9) uzyskujemy przyspieszenia

$$\begin{aligned} \dot{V}_{s0} &= \frac{\mathbf{u}_s \dot{\mathbf{u}}_s + \mathbf{v}_s \dot{\mathbf{v}}_s + \mathbf{w}_s \dot{\mathbf{w}}_s}{V_s} \\ \dot{\alpha}_s &= \frac{\mathbf{u}_s \dot{\mathbf{w}}_s - \mathbf{w}_s \dot{\mathbf{u}}_s}{\mathbf{u}_s^2 + \mathbf{w}_s^2} = \frac{\mathbf{u}_s \dot{\mathbf{w}}_s - \mathbf{w}_s \dot{\mathbf{u}}_s}{(V_s \cos \beta_s)^2} \\ \dot{\beta}_s &= \frac{V_s \dot{\mathbf{w}}_s - \mathbf{v}_s \dot{V}_s}{V_s^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}_s}{V_s}\right)^2}} = \frac{\dot{\mathbf{v}}_s V_s \cos \beta_s - \dot{V}_s \mathbf{v}_s \cos \beta_s}{(V_s \cos \beta_s)^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Równania ruchu statku powietrznego (6 stopni swobody) w zapisie ogólnym

$$\mathbf{M}_s \dot{\mathbf{V}}_s + \mathbf{K}_s \mathbf{M}_s \mathbf{V}_s = \mathbf{Q}_s \quad (12)$$

Macierz bezwładności  $\mathbf{M}_s$  oraz macierz związków kinematycznych  $\mathbf{K}_s$  można zapisać

$$\mathbf{M}_s = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} m_s & 0 & 0 & 0 & S_{zs} & -S_{ys} \\ 0 & m_s & 0 & -S_{zs} & 0 & S_{xs} \\ 0 & 0 & m_s & S_{ys} & -S_{xs} & 0 \\ \hline 0 & -S_{zs} & S_{ys} & I_{xs} & -I_{xys} & -I_{xzs} \\ S_{zs} & 0 & S_{xs} & -I_{yx} & I_{ys} & -I_{yz} \\ -S_{ys} & S_{xs} & 0 & -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zs} \end{array} \right] \quad (13)$$

$$\mathbf{K}_s = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -\mathbf{r}_s & \mathbf{q}_s & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{r}_s & 0 & -\mathbf{p}_s & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{q}_s & \mathbf{p}_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\mathbf{w}_s & \mathbf{v}_s & 0 & -\mathbf{r}_s & \mathbf{q}_s \\ \mathbf{w}_s & 0 & -\mathbf{u}_s & \mathbf{r}_s & 0 & -\mathbf{p}_s \\ -\mathbf{v}_s & \mathbf{u}_s & 0 & -\mathbf{q}_s & \mathbf{p}_s & 0 \end{array} \right] \quad (14)$$

gdzie:

- $m_s$  - masa statku powietrznego.
- $S_{xs}, S_{ys}, S_{zs}$  - momenty statyczne względem płaszczyzn  $O_{yzs}, O_{xzs}, O_{xys}$ .
- $I_{xs}, I_{ys}, I_{zs}$  - masowe momenty bezwładności względem osi  $O_{xs}, O_{ys}, O_{zs}$ .
- $I_{xys}, I_{xzs}, I_{yzs}$  - masowe momenty dewiacji względem płaszczyzn  $O_{xys}, O_{xzs}, O_{yzs}$ .
- macierz sił zewnętrznych działających na samolot

$$\mathbf{Q}_s = [\mathbf{X}_s, \mathbf{Y}_s, \mathbf{Z}_s, \mathbf{L}_s, \mathbf{M}_s, \mathbf{N}_s]^T$$

- wektor przyspieszeń statku powietrznego

$$\dot{\mathbf{V}}_s = [\dot{\mathbf{u}}_s, \dot{\mathbf{v}}_s, \dot{\mathbf{w}}_s, \dot{\mathbf{p}}_s, \dot{\mathbf{q}}_s, \dot{\mathbf{r}}_s]^T$$

- wektor prędkości samolotu

$$\mathbf{V}_s = [\mathbf{u}_s, \mathbf{v}_s, \mathbf{w}_s, \mathbf{p}_s, \mathbf{q}_s, \mathbf{r}_s]^T$$

Ogólnie przyjmuje się, że początek układu współrzędnych pokrywa się ze środkiem masy statku powietrznego. W związku z tym, momenty statyczne i dewiacji są równe zero  $S_{xs}=S_{ys}=S_{zs}=I_{xys}=I_{yzs}=0$ . Po uwzględnieniu tego założenia i przekształceniu zależności (12) uzyskuje się sześć nieliniowych równań opisujących ruch statku powietrznego

$$\dot{\mathbf{u}}_s = \mathbf{r}_s \mathbf{v}_s - \mathbf{q}_s \mathbf{w}_s - g \sin \theta_s + \frac{\mathbf{X}_{sa} + \mathbf{T}}{m_s}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_s = \mathbf{p}_s \mathbf{w}_s + g \cos \theta_s + \frac{\mathbf{Y}_{sa}}{m_s}$$

$$\dot{\mathbf{w}}_s = \mathbf{q}_s \mathbf{u}_s - \mathbf{p}_s \mathbf{v}_s + g \cos \theta_s \cos \phi_s + \frac{\mathbf{Z}_{sa}}{m_s} \quad (15)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_s I_{xs} - \mathbf{r}_s I_{xzs} = L_{sa} - \mathbf{q}_s \mathbf{r}_s (I_{zs} - I_{ys}) + \mathbf{q}_s \mathbf{p}_s I_{xzs}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_s I_{ys} = \mathbf{M}_{sa} - \mathbf{p}_s \mathbf{r}_s (I_{xs} - I_{zs}) - (\mathbf{p}_s^2 + \mathbf{r}_s^2) I_{xzs} - \mathbf{r}_s h_{eng}$$

$$\mathbf{r}_s I_{xs} - \dot{\mathbf{p}}_s I_{xzs} = \mathbf{N}_{sa} - \mathbf{p}_s \mathbf{r}_s (I_{ys} - I_{xs}) - \mathbf{q}_s \mathbf{r}_s I_{xzs} + \mathbf{q}_s h_{eng}$$

gdzie:

- $\mathbf{X}_s = \bar{q} S C_x$  - wektor sił działających wzdłuż osi x.
- $\mathbf{Y}_s = \bar{q} S C_y$  - wektor sił działających wzdłuż osi y.
- $\mathbf{Z}_s = \bar{q} S C_z$  - wektor sił działających wzdłuż osi z.
- $\mathbf{L}_s = \bar{q} S b C_l$  - wektor momentów działających wokół osi x.
- $\mathbf{M}_s = \bar{q} S \bar{c} C_m$  - wektor momentów działających wokół osi y.
- $\mathbf{N}_s = \bar{q} S b C_n$  - wektor momentów działających wokół osi z.
- $\mathbf{T}$  - siła ciągu silnika.

$$h_{eng} = [h_{eng}, 0, 0]^T = [I_{eng} \omega_{eng}, 0, 0]^T$$

Dla ruchu obrotowego 3 ostatnie równania (15) mogą być przekształcone do postaci

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_s &= (a_1 \mathbf{r}_s + a_2 \mathbf{p}_s + a_4 h_{eng}) \mathbf{q}_s + a_3 \mathbf{L}_{sa} + a_4 \mathbf{N}_{sa} \\ \dot{\mathbf{q}}_s &= (a_5 \mathbf{p}_s - a_7 h_{eng}) \mathbf{r}_s - a_6 (\mathbf{p}_s^2 - \mathbf{r}_s^2) + a_7 \mathbf{M}_{sa} \\ \dot{\mathbf{r}}_s &= (a_8 \mathbf{p}_s - a_2 \mathbf{r}_s + a_9 h_{eng}) \mathbf{q}_s + a_4 \mathbf{L}_{sa} + a_9 \mathbf{N}_{sa}.\end{aligned}\quad (16)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{(I_{ys} - I_{zs})I_{zs} - I_{xzs}^2}{I_{xs}I_{zs} - I_{xzs}^2}, & a_4 &= \frac{I_{xzs}}{I_{xs}I_{zs} - I_{xzs}^2}, & a_7 &= \frac{1}{I_{ys}}, \\ a_2 &= \frac{(I_{xs} - I_{ys} + I_{zs})I_{xzs}}{I_{xs}I_{zs} - I_{xzs}^2}, & a_5 &= \frac{I_{zs} - I_{xs}}{I_{ys}}, & a_8 &= \frac{(I_{xs} - I_{ys})I_{xs} - I_{xzs}^2}{I_{xs}I_{zs} - I_{xzs}^2}, \\ a_3 &= \frac{I_{zs}}{I_{xs}I_{zs} - I_{xzs}^2}, & a_6 &= \frac{I_{xzs}}{I_{ys}}, & a_9 &= \frac{I_{xs}}{I_{xs}I_{zs} - I_{xzs}^2}.\end{aligned}$$

Tor lotu statku powietrznego można wyznaczyć

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{Es} &= \mathbf{u}_s \cos \psi_s \cos \theta_s + \mathbf{v}_s (\cos \psi_s \sin \theta_s \sin \phi_s - \sin \psi_s \cos \phi_s) + \\ &\quad + \mathbf{w}_s (\cos \psi_s \sin \theta_s \cos \phi_s + \sin \psi_s \sin \phi_s), \\ \dot{\mathbf{y}}_{Es} &= \mathbf{u}_s \sin \psi_s \cos \theta_s + \mathbf{v}_s (\sin \psi_s \sin \theta_s \sin \phi_s + \cos \psi_s \cos \phi_s) + \\ &\quad + \mathbf{w}_s (\sin \psi_s \sin \theta_s \cos \phi_s - \cos \psi_s \sin \phi_s), \\ \dot{\mathbf{h}}_{Es} &= \mathbf{u}_s \sin \theta_s - \mathbf{v}_s \cos \theta_s \sin \phi_s - \mathbf{w}_s \cos \theta_s \cos \phi_s.\end{aligned}\quad (17)$$

## 2.2. Fotel katapultowy

Równania ruchu fotela katapultowego (6 stopni swobody) w zapisie ogólnym

$$\mathbf{M}_f \dot{\mathbf{V}}_f + \mathbf{K}_f \mathbf{M}_f \mathbf{V}_f = \mathbf{Q} \quad (18)$$

gdzie:

- macierz bezwładności fotela

$$\mathbf{M}_f = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} m_f & 0 & 0 & 0 & S_{zf} & -S_{yf} \\ 0 & m_f & 0 & -S_{zf} & 0 & S_{xf} \\ 0 & 0 & m_f & S_{yf} & -S_{xf} & 0 \\ \hline 0 & -S_{zf} & S_{yf} & I_{xf} & -I_{xyf} & -I_{xzf} \\ S_{zf} & 0 & S_{xf} & -I_{yxf} & I_{yf} & -I_{yzf} \\ -S_{yf} & S_{xf} & 0 & -I_{zxf} & -I_{zyf} & I_{zf} \end{array} \right] \quad (19)$$

- macierz związków kinematycznych fotela

$$\mathbf{K}_f = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -\mathbf{r}_f & \mathbf{q}_f & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{r}_f & 0 & -\mathbf{p}_f & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{q}_f & \mathbf{p}_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\mathbf{w}_f & \mathbf{v}_f & 0 & -\mathbf{r}_f & \mathbf{q}_f \\ \mathbf{w}_f & 0 & -\mathbf{u}_f & \mathbf{r}_f & 0 & -\mathbf{p}_f \\ -\mathbf{v}_f & \mathbf{u}_f & 0 & -\mathbf{q}_f & \mathbf{p}_f & 0 \end{array} \right] \quad (20)$$

- macierz związków kinematycznych

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{X}_f, \mathbf{Y}_f, \mathbf{Z}_f, \mathbf{L}_f, \mathbf{M}_f, \mathbf{N}_f]^T$$

- wektor przyspieszeń

$$\dot{\mathbf{V}}_f = [\dot{\mathbf{u}}_f, \dot{\mathbf{v}}_f, \dot{\mathbf{w}}_f, \dot{\mathbf{p}}_f, \dot{\mathbf{q}}_f, \dot{\mathbf{r}}_f]^T$$

- wektor prędkości

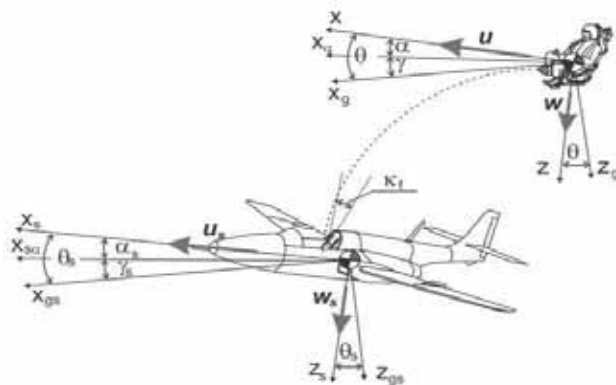
$$\mathbf{V}_f = [\mathbf{u}_f, \mathbf{v}_f, \mathbf{w}_f, \mathbf{p}_f, \mathbf{q}_f, \mathbf{r}_f]^T$$

Warunki początkowe fotela wychodzącego z prowadnic są warunkami odpowiadającymi wektorowi stanu, natomiast prędkość ruchu fotela schodzącego z prowadnic ma postać:

$$\mathbf{V}_{f0} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \cos \kappa_f - \mathbf{w}_s \sin \kappa_f + \mathbf{q}_s Z_{sf0} \\ \mathbf{v}_s + \mathbf{r}_s x_{sf0} - \mathbf{p}_s Z_{sf0} \\ \mathbf{u}_s \sin \kappa_f + \mathbf{w}_s \cos \kappa_f + \mathbf{v}_{strzahu} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

gdzie:

- $\mathbf{v}_{strzahu}$  - prędkość początkowa wyrzucania fotela z samolotu [m/s].
- $\kappa_f$  - nachylenie prowadnic względem osi  $Oz_s$  [rad].
- $x_{sf0}, z_{sf0}$  - współrzędne środka masy fotela z pilotem w układzie samolotowym  $Ox_s y_s z_s$ .



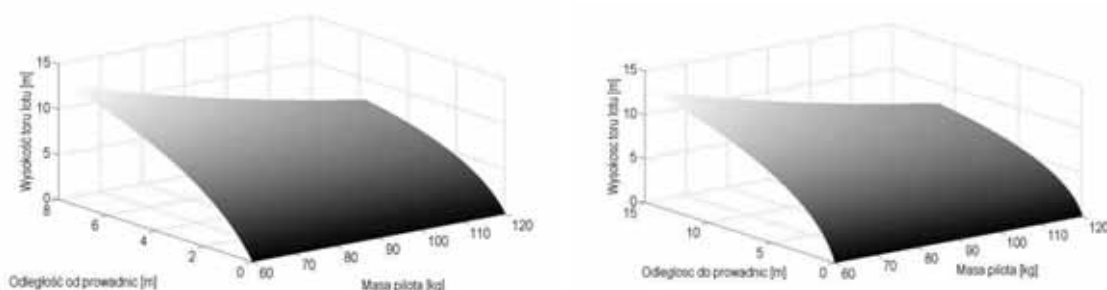
**Rys.2.** Charakterystyczne kąty ślizgu  $\beta$ , natarcia  $\alpha$  i pochylenia prowadnic fotela  $\kappa_f$

W przedostatniej fazie katapultowania (po wyjściu fotela z prowadnic kabiny) pomiędzy samolotem a fotelem nie ma żadnych więzów kinematycznych, samolot i fotel mają po sześć stopni swobody. Równania ruchu fotela w tej fazie można zapisać jako

$$\begin{aligned} m_f(\dot{\mathbf{u}}_f + \mathbf{q}_f \mathbf{w}_f - \mathbf{r}_f \mathbf{v}_f) - S_{xf}(\mathbf{q}_f^2 + \mathbf{r}_f^2) - S_{yf}(\dot{\mathbf{r}}_f - \mathbf{p}_f \mathbf{q}_f) + S_{zf}(\dot{\mathbf{q}}_f - \mathbf{p}_f \mathbf{r}_f) &= \\ &= -(C_{Df} \cos \alpha_f \cos \beta_f + C_{Yf} \cos \alpha_f \cos \beta_f - C_{Lf} \sin \alpha_f) - m_f g \sin \theta_f, \\ m_f(\dot{\mathbf{v}}_f + \mathbf{r}_f \mathbf{u}_f - \mathbf{p}_f \mathbf{w}_f) + S_{xf}(\dot{\mathbf{r}}_f + \mathbf{p}_f \mathbf{q}_f) - S_{yf}(\mathbf{p}_f^2 + \mathbf{r}_f^2) - S_{zf}(\dot{\mathbf{p}}_f - \mathbf{q}_f \mathbf{r}_f) &= \\ &= -(C_{Df} \sin \beta_f + C_{Yf} \cos \beta_f) + m_f g \cos \theta_f \sin \phi_f, \\ m_f(\dot{\mathbf{w}}_f + \mathbf{p}_f \mathbf{v}_f - \mathbf{q}_f \mathbf{u}_f) - S_{xf}(\dot{\mathbf{q}}_f - \mathbf{p}_f \mathbf{r}_f) + S_{yf}(\dot{\mathbf{p}}_f + \mathbf{q}_f \mathbf{r}_f) - S_{zf}(\mathbf{q}_f^2 + \mathbf{p}_f^2) &= \\ &= -(C_{Df} \sin \alpha_f \cos \beta_f + C_{Yf} \sin \alpha_f \sin \beta_f + C_{Lf} \sin \alpha_f) + m_f g \cos \theta_f \cos \phi_f, \\ I_{xf} \dot{\mathbf{p}}_f - (I_{yf} - I_{zf}) \mathbf{q}_f \mathbf{r}_f - I_{xyf}(\dot{\mathbf{q}}_f - \mathbf{p}_f \mathbf{r}_f) - I_{xzf}(\dot{\mathbf{r}}_f + \mathbf{p}_f \mathbf{q}_f) - I_{yzf}(\mathbf{q}_f^2 - \mathbf{r}_f^2) + \\ + S_{yf}(\dot{\mathbf{w}}_f - \mathbf{q}_f \mathbf{u}_f + \mathbf{p}_f \mathbf{v}_f) - S_{zf}(\dot{\mathbf{v}}_f - \mathbf{p}_f \mathbf{w}_f + \mathbf{r}_f \mathbf{u}_f) &= \\ &= g(S_{yf} \cos \theta_f \cos \phi_f + S_{zf} \cos \theta_f \sin \phi_f) + L_{Af} + L_{Af}^T, \\ I_{yf} \dot{\mathbf{q}}_f - (I_{zf} - I_{xf}) \mathbf{p}_f \mathbf{r}_f - I_{xyf}(\dot{\mathbf{p}}_f - \mathbf{q}_f \mathbf{r}_f) - I_{yzf}(\dot{\mathbf{r}}_f + \mathbf{p}_f \mathbf{q}_f) - I_{xzf}(\mathbf{r}_f^2 - \mathbf{p}_f^2) + \\ + S_{xf}(\dot{\mathbf{w}}_f + \mathbf{p}_f \mathbf{v}_f) + S_{zf}(\dot{\mathbf{u}}_f - \mathbf{r}_f \mathbf{v}_f + \mathbf{q}_f \mathbf{w}_f) &= \\ &= -g(S_{zf} \sin \theta_f + S_{xf} \cos \theta_f \cos \phi_f) + M_{Af} + M_{Af}^T, \\ I_{zf} \dot{\mathbf{r}}_f - (I_{xf} - I_{yf}) \mathbf{p}_f \mathbf{q}_f - I_{xyf}(\dot{\mathbf{q}}_f + \mathbf{p}_f \mathbf{r}_f) - I_{xzf}(\dot{\mathbf{p}}_f - \mathbf{q}_f \mathbf{r}_f) - I_{xyf}(\mathbf{p}_f^2 - \mathbf{q}_f^2) + \\ + S_{xf}(\dot{\mathbf{v}}_f - \mathbf{p}_f \mathbf{w}_f + \mathbf{r}_f \mathbf{u}_f) - S_{yf}(\dot{\mathbf{u}}_f - \mathbf{r}_f \mathbf{v}_f + \mathbf{q}_f \mathbf{w}_f) &= \\ &= g(S_{xf} \cos \theta_f \sin \phi_f + S_{yf} \sin \theta_f) + N_{Af} + N_{Af}^T. \end{aligned} \quad (22)$$

### 3. METODYKA WYKONYWANIA OBLICZEŃ

Jako dane początkowe podawana jest prędkość samolotu  $V_s$ , kąt natarcia i ślizgu  $\alpha_s, \beta_s$  oraz prędkości kątowe  $\mathbf{p}_s, \mathbf{q}_s, \mathbf{r}_s$ . Ponadto znane są kąty opisujące położenie samolotu w przestrzeni  $\phi_s, \theta_s, \psi_s$ , współrzędne geograficzne  $x_{ES}, y_{ES}, z_{ES}$  i wysokość lotu  $h_s$ . Określona jest prędkość obrotowa pędni silnika, co odpowiada wartości siły ciągu w funkcji wysokości lotu. Kolejną czynnością jest obliczenie wartości  $\mathbf{u}_s, \mathbf{v}_s, \mathbf{w}_s$  (10). Następnie wyznaczane są przyspieszenia z zależności (15) i (16) w układzie związanym ze statkiem powietrznym  $\dot{\mathbf{u}}_s, \dot{\mathbf{v}}_s, \dot{\mathbf{w}}_s, \dot{\mathbf{p}}_s, \dot{\mathbf{q}}_s, \dot{\mathbf{r}}_s$  i na końcu po podstawieniu do (11) uzyskiwane są przyspieszenia w układzie aerodynamicznym. Taka procedura skraca znacznie czas nieliniowych obliczeń. Ponadto pozwala na zaimplementowanie bezwymiarowych współczynników aerodynamicznych bezpośrednio do układu współrzędnych związanego z samolotem, bez ich przekształcania. W ten sposób uzyskujemy położenie statku powietrznego w układzie przestrzennym. Podobną procedurę przeprowadzamy dla fotela katapultowego. Zmienne stanu w początkowej fazie katapultowania fotela są zależne od położenia i warunków statku powietrznego. Przykładowe wyniki przeprowadzonych symulacji dla danych dotyczących statku powietrznego TS-11 „Iskra” i fotela katapultowego SK-1 zaimplementowanych do pakietu MATLAB przedstawiono na Rys.3. Statek powietrzny wykonuje lot poziomy ze stałą prędkością 250 lub 650 km/h. Przeprowadzone symulacje pokazują tor lotu fotela z pilotem względem statecznika pionowego. Wzrost masy pilota z 60 do 120 kg zmniejsza minimalną odległość toru lotu do statecznika pionowego z 8m do 4m, a wzrost prędkości do 650 km/h przy maksymalnej dopuszczalnej masie pilota do 2m. Stwarza to możliwość zderzenia pilota ze statecznikiem pionowym. Jest to o tyle niebezpieczne, że pilot musi odepchnąć się od fotela, w przeciwnym wypadku nie ma możliwości rozwinięcia spadochronu ratunkowego, ponieważ znajduje się on w misce fotela (pilot na nim siedzi). Kolidują układ pilot – samolot zmniejsza szanse na uratowanie – szczególnie na małych wysokościach lotu do 1000m.



Rys.3. Tor lotu fotela względem samolotu, ( $V_s = 250 \text{ km/h}$  i  $V_s = 650 \text{ km/h}$ )

### PODSUMOWANIE

Modelowanie dynamiki obiektów jakimi są statki powietrzne i fotele katapultowe jest procesem pracochłonnym i złożonym. Przedstawione modele dynamiki obiektów umożliwiają przeprowadzenie symulacji numerycznej. Opracowane modele komputerowe foteli w programach CAD i przeprowadzone symulacje opływu obiektów przy wykorzystaniu np. pakietu COMSOL pozwalają na wyznaczenie charakterystyk aerodynamicznych w funkcji kątów pochylenia, przechylenia i ślizgu, które z powodzeniem mogą być wykorzystane do symulacji. Upraszcza to koszty rzeczywistych badań i pozwala na wyeliminowanie błędów i wprowadzenie zmian konstrukcyjnych w obiektach.

### BIBLIOGRAFIA

1. Cook M., *Flight Dynamics, principles*. Elsevier, Great Britain 2007.



2. Etkin B., Reid L., *Dynamics of flight, stability and control*. Wiley, USA 1996.
3. Głowiński S., Krzyżyński T., *On modeling of ejection process in a training combat aircraft*. Archives of transport, 2011.
4. Markiewicz J., Maryniak A., i in., *Katapultowanie – możliwości problemy i modelowanie*, NiT, Warszawa 2003,
5. Milkiewicz A., *Praktyczna aerodynamika lotu samolotu odrzutowego w tym wysokomanewrowego*. Wyd. ITWL, Warszawa 2011.
6. Sibilski K., *Modelowanie i symulacja dynamiki obiektów latających*. Oficyna Wydawnicza MH, Warszawa 2004.
7. Stengel R., *Flight Dynamics*. Princeton University Press, New Jersey 2004.
8. Stevens B., Lewis F., *Aircraft control and simulation*. Wiley, Mexico 2003.
9. Żugaj M., *Układy automatycznego sterowania lotem*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2011.

## **AIRCRAFT AND EJECTION SEAT DYNAMICS IN THREE-DIMENSIONAL SPACE**

### *Abstract*

*Paper discussed the mathematical model of dynamics of the aircraft and ejection seat. The numerical simulation on the selected type of ejection seat in function of pilot mass and speed of aircraft by using MATLAB package with a particular focus on the vertical stabilizer plane was studied.*

### ***Autor:***

dr inż. **Sebastian Głowiński** – Politechnika Koszalińska, Zakład Mechatroniki i Mechaniki Stosowanej, ul. Śniadeckich 2, 75-620 Koszalin, [sebastian.glowinski@tu.koszalin.pl](mailto:sebastian.glowinski@tu.koszalin.pl)