

Adam KOWALCZYK, Anna SZLACHTA, Robert HANUS
POLITECHNIKA RZESZOWSKA, KATEDRA METROLOGII I SYSTEMÓW DIAGNOSTYCZNYCH,
W. Pola 2, 35-959 Rzeszów

Zastosowanie warunkowego uśredniania do wyznaczania interwału korelacji sygnału stochastycznego

Dr hab. inż. Adam KOWALCZYK

Profesor nadzwyczajny Politechniki Rzeszowskiej, kierownik Katedry Metrologii i Systemów Diagnostycznych. Ukończył specjalność Miernictwo Elektryczne i Przyrządy Pomiarowe na Wydziale Elektrycznym Politechniki Śląskiej w 1973 roku. Stopień doktora uzyskał w 1983r., a doktora habilitowanego w 1992r. Dyscyplina i specjalności naukowe: elektronika, metrologia elektryczna i elektroniczna, systemy pomiarowe wielkości nieelektrycznych, przetwarzanie sygnałów stochastycznych.

e-mail: kowadam@prz.edu.pl



Dr inż. Anna SZLACHTA

Absolwentka Wydziału Elektrycznego Politechniki Rzeszowskiej – specjalność aparatura elektroniczna (1995). W 2006 r. uzyskała stopień doktora nauk technicznych, w dyscyplinie naukowej elektrotechnika, specjalność metrologia elektryczna i elektroniczna. Adiunkt w Katedrze Metrologii i Systemów Diagnostycznych na Wydziale Elektro-techniki i Informatyki Politechniki Rzeszowskiej. Zajmuje się zagadnieniami przetwarzania i analizy sygnałów pomiarowych.

e-mail: annasz@prz.edu.pl



Dr inż. Robert HANUS

Adiunkt w Katedrze Metrologii i Systemów Diagnostycznych Wydziału Elektrotechniki i Informatyki Politechniki Rzeszowskiej. W pracy naukowo-badawczej zajmuje się głównie zagadnieniami związanymi z modelowaniem i analizą sygnałów losowych oraz statystycznymi metodami pomiaru opóźnienia i parametrów przepływów dwufazowych. Autor lub współautor kilkudziesięciu publikacji, członek Sekcji Aparatury i Systemów Pomiarowych KMiAN PAN w kadencji 2007-2010.

e-mail: rohan@prz.edu.pl



Streszczenie

W pracy przedstawiono zastosowanie warunkowego uśredniania sygnału stochastycznego do wyznaczania interwału korelacji. Dla wybranych modeli sygnałów porównano wyniki badań teoretycznych i eksperymentalnych.

Słowa kluczowe: sygnały przypadkowe, interwał korelacji, funkcja autokorelacji, warunkowe uśrednianie.

Application of conditional averaging to determination of correlation interval of stochastic signal

Abstract

The article presents the application of conditional averaging of stochastic signals to determination of correlation interval. For chosen models of signals the results of theoretical analysis are compared with results of experiments. The paper is divided into five sections. The first is a short introduction to the subject of the paper. Section 2 presents the definition and some examples of correlation intervals for typical form of autocorrelation functions (Fig. 1, Tab. 1). Section 3 describes the use of conditional mean value to determination of correlation interval (Eq. 9) and statistical errors of estimation for this method (Eq. 10, Eq. 13). The results of experiments for random signals with Gaussian probability distribution and two typical form of autocorrelation function (Fig. 4) are given in Section 4. Section 5 summarizes the results and presents final remarks. The authors conclude that the method described in this paper may be applied to determination of correlation interval of stochastic signals, particularly for signals with non-oscillative form of autocorrelation function.

Keywords: random signals, correlation interval, autocorrelation function, conditional averaging.

1. Wstęp

W teoretycznych i eksperymentalnych badaniach procesów stochastycznych, w analizie estymat charakterystyk statystycznych i ocenie niepewności estymacji często wymagana jest znajomość funkcji autokorelacji procesu [1÷4]. W szczególności w eksperymentalnej analizie charakterystyk sygnału stochastycznego $x(t)$

w dziedzinie czasu w celu doboru parametrów eksperymentu (odstęp próbkowania, czas analizy, maksymalny czas opóźnienia, liczba wyznaczonych punktów charakterystyki itp.) wymagane mogą być:

- model analityczny funkcji autokorelacji $R_x(\tau)$ lub autokorelacji unormowanej $\rho_x(\tau)$,
- stopień rozciągłości funkcji wzdłuż osi argumentu,
- parametry liczbowe charakteryzujące funkcję autokorelacji takie jak:
 - interwały korelacji,
 - wartości charakterystyczne (np. maksymalne i minimalne) $R_x(t)$ i ich położenie na osi opóźnienia τ ,
 - znak korelacji i jego zmienność w funkcji τ ,
 - liczba przecięć funkcji unormowanej $\rho_x(\tau)$ z osią τ .

2. Interwały korelacji

W analizie sygnałów losowych często wykorzystuje się pojęcia interwałów korelacji. Spośród kilku zdefiniowanych w tej grupie parametrów statystycznych najczęściej używane są trzy interwały korelacji: zwykły τ_k , bezwzględny τ_{kb} oraz maksymalny τ_{km} [1÷2]. Zwykłym interwałem korelacji τ_k sygnału losowego $x(t)$ posiadającego unormowaną funkcję autokorelacji $\rho_x(\tau)$ jest przedział czasu, określony funkcjonalnie:

$$\tau_k = \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) d\tau. \quad (1)$$

Podany parametr stosowany jest dla charakteryzowania sygnałów losowych z nieoscylicyjną funkcją autokorelacji (rys. 1a). Interwał korelacji τ_k pozwala zorientować się, dla jakiego przedziału czasu średnio występuje korelacja między wartościami sygnału stochastycznego. Dla sygnałów losowych posiadających oscylacyjną funkcję autokorelacji stosowany jest bezwzględny interwał korelacji τ_{kb} (rys. 1b) zdefiniowany zależnością:

$$\tau_{kb} = \int_0^{\infty} |\rho_x(\tau)| d\tau. \quad (2)$$

Jeżeli $\rho_x(\tau) > 0$ dla wszystkich $\tau \in (0, \infty)$ to $\tau_k = \tau_{kb}$.

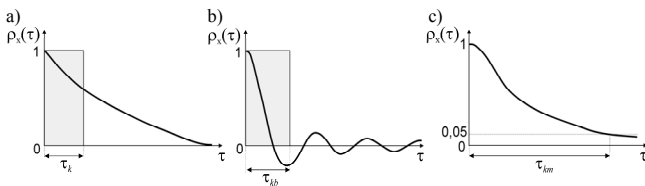
W praktycznych zastosowaniach często używany jest maksymalny interwał korelacji τ_{km} , równy wartości argumentu unormowanej funkcji autokorelacji, począwszy, od którego spełniony jest warunek:

$$|\rho_x(\tau)| \leq \varepsilon, \quad (3)$$

gdzie: ε jest małą zadaną liczbą dodatnią.

Przeważnie stosuje się wyznaczenie wartości τ_{km} z zależności $|\rho_x(\tau_{km})| = 0,05$, co oznacza, że wartości funkcji $|\rho_x(\tau)|$ są mniejsze od 0,05 dla dowolnej wartości $|\tau| > \tau_{km}$ (rys. 1c). Wartości sygnału rozdzielone maksymalnym interwałem korelacji τ_{km} uważa się w praktyce za nieskorelowane.

Planując pomiarowe wyznaczenie charakterystyk statystycznych ergodycznego procesu stochastycznego należy uzyskać wstępną informację o wartościach wybranych interwałów korelacji badanych realizacji procesu. Taka wiedza jest niezbędna dla wyboru odstępu próbkowania T_p nieskorelowanymi próbkami (parami próbek) oraz niezbędnej długości realizacji T_r sygnału stochastycznego w celu uzyskania zadanych dokładności estymacji charakterystyk statystycznych [3÷7].



Rys. 1. Interpretacja interwałów korelacji: a) τ_k ; b) τ_{kb} ; c) τ_{km}
 Fig. 1. Interpretation of correlation intervals: a) τ_k ; b) τ_{kb} ; c) τ_{km}

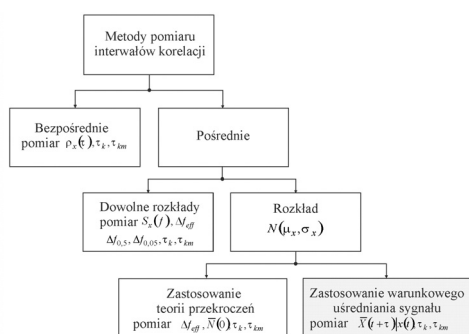
Przykładowo w tabeli 1 dla wybranych modeli unormowanych funkcji autokorelacji $\rho_x(\tau)$ podano parametry τ_k i τ_{km} oraz odstępn próbkowania T_p próbkami nieskorelowanymi, jako krotność interwału τ_k . [1]. Dalej rozpatruje się wyznaczenie interwału korelacji τ_k sygnału stochastycznego o rozkładzie normalnym reprezentowanego szeregiem wartości uzyskanych w wyniku równomiernego próbkowania sygnału z odstępem $\Delta\tau$.

Tab. 1. Wybrane modele $\rho_x(\tau)$ i parametry: τ_k , τ_{km} , T_p
 Tab. 1. Selected models of $\rho_x(\tau)$ and parameters: τ_k , τ_{km} , T_p

Lp.	$\rho_x(\tau)$	τ_k	$T_p = \tau_{mk}$	$\frac{T_p}{\tau_k}$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{3}{\alpha}$	3
2	$(1 + \alpha \tau)e^{-\alpha \tau }$	$\frac{2}{\alpha}$	$\frac{4,5}{\alpha}$	2,25
3	$e^{-\alpha^2\tau^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}$	$\frac{\sqrt{3}}{\alpha}$	1,95
4	$\frac{\sin 2\pi B\tau}{2\pi B\tau}$	$\frac{1}{4B}$	$\frac{3,25}{B}$	13
5	$e^{-\alpha\tau} \cos \omega_0\tau$	$\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega_0^2}$	$\frac{3}{\alpha}$	$3 \cdot \left[1 + \left(\frac{\omega_0}{\alpha}\right)^2\right]$

3. Wyznaczanie interwału korelacji przy zastosowaniu warunkowego uśredniania

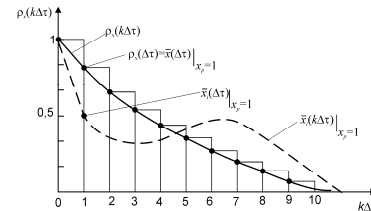
Istnieje kilka metod pomiaru interwałów korelacji (rys. 2). Metody te można podzielić na bezpośrednie, oparte na analizie przebiegu unormowanej funkcji autokorelacji, oraz pośrednie.



Rys. 2. Metody wyznaczania interwałów korelacji
 Fig. 2. Methods of determination of correlation interval

W metodzie bezpośredniej w celu wyznaczenia interwału korelacji τ_k , określonego dla unormowanej funkcji autokorelacji $\rho_x(\tau)$ wyrażeniem (1), można zastosować operację sumowania n pól prostokątów (rys. 3) o bokach $\Delta\tau$ i $\rho_x(k\Delta\tau)$ według zależności:

$$\hat{\tau}_k = \Delta\tau \sum_{k=0}^{n-1} \rho_x(k \cdot \Delta\tau). \quad (4)$$



Rys. 3. Zasada wyznaczania interwału korelacji
 Fig. 3. The principle of determination of correlation interval

W proponowanej metodzie do wyznaczania interwału korelacji τ_k wykorzystuje się warunkowe uśrednianie sygnału $x(t)$ o rozkładzie normalnym i charakterystykę warunkowej wartości średniej w formie ciągłej:

$$\bar{x}(t + \tau) \Big|_{x_p} = x_p \rho_x(\tau), \quad (5)$$

i jej formę dyskretną:

$$\bar{x}(t + k\Delta\tau) \Big|_{x_p} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i(k\Delta\tau) \Big|_{x_p} = x_p \rho_x(k \cdot \Delta\tau), \quad (6)$$

gdzie: x_p – warunek, wartość progowa inicjująca uśrednianie gdy $x(t) = x_p$ z zadaniem znakiem pochodnej; $k = (0, 1, 2, \dots, n-1)$ kolejne numery próbek w warunkowej realizacji sygnału; M – liczba warunkowo uśrednionych realizacji.

Uwzględniając (6) wyrażenie (4) można zapisać, jako:

$$\hat{\tau}_{k_1} = \Delta\tau \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\bar{x}(k \cdot \Delta\tau) \Big|_{x_p}}{x_p} = \frac{\Delta\tau}{x_p} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i(k \cdot \Delta\tau) \Big|_{x_p}. \quad (7)$$

W zależności (7) operacje sumowania można zamienić miejscami. Obliczenie estymaty $\hat{\tau}_k$ wymaga zsumowania wszystkich wartości (próbek) w warunkowo uzyskanych M realizacjach sygnału o długości $n \Delta\tau$.

$$\hat{\tau}_{k_2} = \frac{\Delta\tau}{x_p M} \sum_{i=1}^M \sum_{k=0}^{n-1} x_i(k \cdot \Delta\tau) \Big|_{x_p}. \quad (8)$$

Po przekształceniu wyrażenia (8) uzyskuje się:

$$\hat{\tau}_{k_2} = \frac{\Delta\tau \cdot n}{x_p M} \sum_{i=1}^M \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_i(k \cdot \Delta\tau) \Big|_{x_p}. \quad (9)$$

Wariancję estymatora $\hat{\tau}_{k_2}$ można obliczyć z zależności:

$$\text{Var}(\hat{\tau}_{k_2}) = \left(\frac{\Delta\tau \cdot n}{x_p M} \right)^2 \sum_{i=1}^M \text{Var} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_i(k \cdot \Delta\tau) \Big|_{x_p} \right). \quad (10)$$

Jeżeli przyjąć, że kolejno uśredniane warunkowe realizacje sygnału o długości $n \Delta\tau$ są nieskorelowane to wariancja ich sumy jest równa sumie wariancji. Wariancja średniej arytmetycznej i -tej realizacji jest obliczana dla próbek skorelowanych i wynosi:

$$\text{Var}(\bar{X}_i) = \frac{\sigma_x^2}{n} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n} \right) \rho_x(k \cdot \Delta\tau) \right] = \frac{\sigma_x^2}{n} \lambda(n, \rho_x). \quad (11)$$

Zakładając w przybliżeniu równość wariancji dla poszczególnych średnich arytmetycznych \bar{X}_i wyrażenie (10) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\tau}_{k_2}) &\approx \left(\frac{\Delta\tau \cdot n}{x_p M} \right)^2 \cdot M \frac{\sigma_x^2}{n} \lambda(n, \rho_x) = \\ &= \frac{\Delta\tau^2 \sigma_x^2 \cdot n}{x_p^2 M} \lambda(n, \rho_x) = \frac{T_r^2}{v^2 M \cdot n} \lambda(n, \rho_x) \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie: $T_r = n \cdot \Delta\tau$; $v = x_p / \sigma_x$ - warunek (poziom) analizy wybierany z przedziału $1 \div 2$ [7]. Względna niepewność standardowa oceny τ_{k_2} wynosi:

$$\delta_{\hat{\tau}_k} = \frac{\sigma_{\hat{\tau}_{k_2}}}{\tau_k} = \frac{T_r}{\tau_k} \frac{1}{v} \frac{\sqrt{\lambda(n, \rho_x)}}{\sqrt{M \cdot n}}. \quad (13)$$

Czynnik $\lambda(n, \rho_x)$ zwiększający wariancję średniej arytmetycznej n wartości skorelowanych dla modelu funkcji autokorelacji 1 z tabeli 1 może być przedstawiony wyrażeniem [7]:

$$\lambda(n, \rho_x) = \frac{1 + \rho}{1 - \rho} - \frac{2\rho(1 - \rho^n)}{n(1 - \rho)^2}, \quad (14)$$

gdzie: $\rho = e^{-\alpha|\Delta\tau|}$.

Przykład

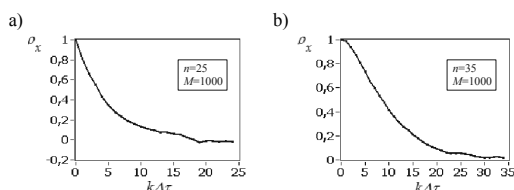
Dla funkcji autokorelacji $R_x(k\Delta\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha k|\Delta\tau|}$ przy $\rho = 0,8$; $n = 25$; $\Delta\tau = 0,2$ ms; $\tau_k = 1,0$ ms; $v = 1,9$ w oparciu o wyrażenie (14) $\sqrt{\lambda(25; 0,8)} \approx 2,72$ oraz z wyrażenia (13) dla: $M = 500$

$$\delta_{\hat{\tau}_k} = \frac{25 \cdot 0,2 \cdot 2,72}{1 \cdot 1,9 \cdot \sqrt{500 \cdot 25}} = 0,064; \quad M = 250 \quad \delta_{\hat{\tau}_k} = \frac{25 \cdot 0,2 \cdot 2,72}{1 \cdot 1,9 \cdot \sqrt{250 \cdot 25}} = 0,090$$

4. Badania eksperymentalne

Badano właściwości proponowanej zasady pomiaru interwału korelacji τ_k sygnału stochastycznego $x(t)$ o rozkładzie $N(0, \sigma_x)$ dla dwóch modeli unormowanej funkcji autokorelacji zestawionych w tabeli 1 w rubrykach 1 (model 1) i 2 (model 2). Modele 1 i 2 funkcji $\rho_x(\tau)$ uzyskano przepuszczając szum biały o rozkładzie normalnym przez wybrane układy liniowe o ograniczonym paśmie. Dla modelu 1 zadane i analizowane parametry wynosiły: $\sigma_x = 0,54$ V; $\tau_k = 1,023$ ms; $\tau_{km} = 3,070$ ms. Dla modelu 2: $\sigma_x = 0,39$ V; $\tau_k \approx 2$ ms; $\tau_{km} \approx 4,5$ ms. Sygnały próbkowano z odstępem $\Delta\tau = 0,2$ ms.

Metodą warunkowego uśredniania sygnałów wyznaczono unormowane funkcje autokorelacji $\rho_x(\tau)$. Przebiegi funkcji uzyskane w eksperymentach dla liczby warunkowo uśrednianych realizacji $M = 1000$ przedstawia rysunek 4. W modelu 1 dla $k = 1$, $\Delta\tau = 0,2$ ms, $\rho_x(\Delta\tau) \approx 0,8$.



Rys. 4. Eksperymentalne funkcje $\rho_x(\Delta\tau)$: a) model 1; b) model 2
Fig. 4. Experimental functions $\rho_x(\Delta\tau)$: a) model 1; b) model 2

Przeprowadzono 15 razy eksperyment wyznaczania interwału korelacji (τ_{k_2}) i dla badanych modeli sygnałów z zastosowaniem zależności (9). Korzystając z 15 elementowych statystyk obliczono wartości: średniej arytmetycznej $\bar{\tau}_k \approx \tau_k$ oraz względnej niepewności standardowej średniej arytmetycznej $\delta_{\hat{\tau}_k}$. Wyniki obliczeń dla zadanych wartości v , T_r , M przedstawia tabela 2.

Tab. 2. Wyniki eksperymentu
Tab. 2. Experiment results

Model $\rho_x(\tau)$	Parametry eksperymentu	$\bar{\tau}_k$, ms	$\delta_{\hat{\tau}_k}$
1	$v = 1,9$; $T_r = 25 \Delta\tau$; $M = 500$	1,025	0,062
1	$v = 1,9$; $T_r = 25 \Delta\tau$; $M = 250$	1,008	0,084
2	$v = 1,8$; $T_r = 25 \Delta\tau$; $M = 250$	1,932	0,106

Dla modelu 1 wyniki $\bar{\tau}_k$ i $\delta_{\hat{\tau}_k}$ uzyskane z zależności teoretycznych są (dla ocen statystycznych) wystarczająco zgodne z wartościami eksperymentalnymi. Dla modelu 2 estymata $\bar{\tau}_k$ odpowiada zadanej w eksperymencie, a $\delta_{\hat{\tau}_k}$ jest większa od odpowiedniej wartości dla modelu 1 ze względu na wzrost $\lambda(n, \rho_x)$ powodowany kształtem ρ_x w modelu 2 i większymi wartościami składników w sumie (11).

5. Podsumowanie

W pracy zaproponowano metodę wyznaczania interwału korelacji sygnału stochastycznego o rozkładzie normalnym przy wykorzystaniu warunkowej wartości średniej tego sygnału. Metoda ta nie wymaga wcześniejszego wyznaczania funkcji autokorelacji, jak to ma miejsce w metodzie bezpośredniej.

Uzyskane w przeprowadzonych badaniach wyniki można podsumować następująco:

- dla sygnałów z nieoscylacyjną funkcją autokorelacji (modele 1, 2, 3 w tabeli 1) podstawową informację o skorelowaniu wartości sygnału daje zwykły interwał korelacji τ_k ;
- w celu wstępnej oceny średniego przedziału czasu występowania skorelowania danych pomiarowych o rozkładzie normalnym i wyznaczenia interwału korelacji τ_k dla modeli 1, 2 i 3 można zastosować warunkowe uśrednianie wartości sygnału stochastycznego;
- dla modelu 1 sygnału wykazano wystarczającą w praktyce zgodność wartości wyznaczonych parametrów $\bar{\tau}_k$ i $\delta_{\hat{\tau}_k}$ uzyskanych drogą teoretyczną i eksperymentalną;
- wyznaczana według proponowanej zasady wartość $\bar{\tau}_k$ dla modelu oscylacyjnego $\rho_x(\tau)$ (model 4 z tablicy 1) nie daje prawidłowej informacji o skorelowaniu wartości sygnału ze względu na sumowanie wartości o różnych znakach oraz statystyczną zależność kolejnych uśrednianych realizacji sygnału.

Niniejsza praca powstała w ramach grantu badawczego numer NN505 466038 finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego na podstawie decyzji nr 4660/B/T02/2010/38.

6. Literatura

- Mirskij G. J.: Charakteristiki stochastycznej wzaimoswiazi i ich izmierienija, Energoizdat, Moskwa 1982.
- Shanmugam K.S., Breipohl A. M.: Random signals detection, estimation and data analysis. John Wiley&Sons, New York 1988.
- Dorozhovets M.: Wpływ braku znajomości a priori funkcji autokorelacji obserwacji na ocenę standardowej niepewności ich wartości średniej. Pomiar Automatyka Kontrola, Vol. 55, nr 12/2009, s. 2-5.
- Zięba A.: Effective number of observations and unbiased estimators of variance for autocorrelated data – an overview. Metrology and Measurement System, Vol. XVII (2010), no. 1, pp.3-16.
- Volkov I. I., Motov V. V., Tokarev A. P.: Method of designing hardware for estimating the correlation interval of a noncentered stationary stochastic process. Radiophysics and Quantum Electronics Vol. 19 (1976), no. 8, pp. 830-833.
- Khraisat, Y.S.: Relationship between an interval of correlation of echo-signal envelope and turbulence intensity in radar reflecting volume of cloud or precipitation. Proc. 2002 International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, 2002, pp. 287-289.
- Kowalczyk A., Szlachta A., Hanus R.: Zastosowanie warunkowego uśredniania danych skorelowanych do oceny standardowej niepewności średniej arytmetycznej. Podstawowe Problemy Metrologii, Prace Komisji Metrologii Oddziału PAN w Katowicach Seria: Konferencje Nr 15, str. 38-42.

otrzymano / received: 06.09.2011

przyjęto do druku / accepted: 02.11.2011

artykuł recenzowany