

Mykhaylo DOROZHOVETS<sup>1</sup>, Anton PRYGRODSKY<sup>2</sup>, Kazimierz BRYDAK<sup>1</sup>

<sup>1</sup> POLITECHNIKA RZESZOWSKA, ul. W. Pola 2, 35-959 Rzeszów

<sup>2</sup> NARODOWY UNIWERSYTET „LVIVSKA POLITECHNIKA”, ul. Bandery 12, 79013 Lviv, Ukraina

## Badania wpływu niedokładności równoległych torów pomiarowych na dokładność rekonstrukcji przewodności w tomografii elektrycznej

Prof. dr hab. inż. Mykhaylo DOROZHOVETS

Jest absolwentem (1975) Katedry Techniki Informatyko-Pomiarowej Politechniki Lwowskiej, w 2001 r. obronił pracę habilitacyjną. Obecnie jest zatrudniony na stanowisku profesora zwyczajnego w Katedrze Metrologii i Systemów Diagnostycznych Politechniki Rzeszowskiej. W pracy naukowo-badawczej zajmuje się analizą i oceną niepewności wyników pomiarów, zagadnieniami pomiarów tomograficznych oraz problemami przetwarzania sygnałów pomiarowych. Opublikował ponad 240 prac naukowych oraz 6 podręczników.

e-mail: michdor@prz.edu.pl



Mgr inż. Kazimierz BRYDAK

Jest absolwentem (1978) Wydziału Elektrycznego Politechniki Rzeszowskiej – specjalność metrologia i automatyka. Zatrudniony jest na stanowisku starszego wykładowcy w Katedrze Metrologii i Systemów Diagnostycznych. W pracy naukowo-badawczej zajmuje się zagadnieniami pomiarów tomograficznych i problemami przetwarzania sygnałów pomiarowych w mikrokontrolerach analogowych.

e-mail: brydak@prz.edu.pl



Mgr inż. Anton PRYGRODSKY

Jest absolwentem (2009) Katedry Technologii Informatyko-Pomiarowych Politechniki Lwowskiej. Obecnie jest na studiach doktoranckich (Politechnika Lwowska) oraz zatrudniony na stanowisku inżyniera w firmie komputerowej. W pracy naukowo-badawczej zajmuje się zagadnieniami pomiarów w tomografii elektrycznej.

e-mail: prygrodsky.anton@gmail.com



### Streszczenie

W pracy przedstawiono analizę wpływu oddziaływań addytywnych oraz multiplikatywnych w torze pomiaru napięć międzyelektrodowych na dokładność rekonstrukcji rozkładu przestrzennego przewodności w tomografii elektrycznej (TE). Przedstawiono ogólną zasadę konstruowania obrazu TE, metodę pomiarową realizującą równoległy pomiar napięć międzyelektrodowych oraz algorytm rekonstrukcji obrazu przewodności.

Słowa kluczowe: tomografia impedancyjna.

### Uncertainty influence investigation of the measurement parallel channels on the reconstruction conductivity accuracy in electrical tomography

#### Abstract

The influence analysis of additive and multiplicative interactions in measuring system of inter-electrode voltages on accuracy of reconstruction of conductivity spatial distribution in electrical tomography has been presented in this paper. The measurement method based on parallel controlling of inter-electrode voltages was considered. It was referred to analogical research based on serial measurement method [3]. The errors of measuring apparatus were presented as sum of three basic components: random additive, systematic additive and systematic multiplicative. For quantitative comparison of particular errors influence on reconstruction errors the conversion factor was introduced. It was defined as square root of ratio of reconstruction variance errors. The results of investigations of conversion degree of instrumental errors in relation to errors of conductivity image obtained from relations (6) and (7) as well as using Monte Carlo method have been compared (Fig. 1). The instrumental errors have bigger negative influence on reconstruction accuracy of elements conductivity in the internal area of considered object (lower numbers in figures). They are cause of results' retrogradation in this area. The influence of systematic additives and random errors is significantly bigger than systematic multiplicative. The derived relations can be applied for the requirement formulation in relation to accuracy requirements of measuring systems on the beginning of tomography system design process.

Keywords: electrical tomography.

### 1. Wstęp

Niedokładności torów pomiarowych są najważniejszymi czynnikami niedokładności rekonstrukcji obrazu przewodności w tomografii elektrycznej. Wymagania dotyczące dokładności aparatury pomiarowej zależne są od wymaganej dokładności rekonstrukcji oraz w dużym stopniu od właściwości samego algorytmu rekonstrukcji i wpływu oddziaływań w wejściowych wynikach pomiarowych [1]. Ponieważ wynikiem pomiaru tomograficznego jest obraz wielkości  $y$ , dlatego pełną charakterystyką instrumentalnej składowej niepewności jest macierz kowariancyjna, która odwzoruje tak niepewności oddzielnych elementów obrazu, jak i ich statystyczne związki [1]. W ogólnym przypadku dla wektora  $\Delta x$  błędów wejściowych wyników pomiaru (wektor  $M_x$ ) przedstawianych macierzą kowariancyjną  $K_{\Delta x}$ , macierz kowariancyjna  $K_{\Delta y}$  błędów  $\Delta y$  wyników rekonstrukcji obrazu na wyjściu algorytmu rekonstrukcyjnego, opisywanego macierzą  $REC$ , może być obliczona wg wzoru:

$$K_{\Delta y} = M_x [REC \cdot \Delta x \cdot (REC \cdot \Delta x)^T] = REC \cdot K_{\Delta x} \cdot REC^T \quad (1)$$

Błędy aparatury pomiarowej można przedstawić jako sumę trzech podstawowych składowych: addytywna losowa  $\Delta_{a,los}$ , addytywna systematyczna  $\Delta_{a,syst}$  oraz multiplikatywna systematyczna  $\delta_{m,syst} \cdot M_x$ :  $\Delta_{pom} = \Delta_{a,los} + \Delta_{a,syst} + \delta_{m,syst} \cdot M_x$ .

Do pomiaru odpowiedzi pobudzanego badanego obiektu można zastosować dwie metody pomiarowe: szeregową oraz równoległą. W przypadku metody szeregowej, wyniki pomiaru są pobierane jednym kanałem pomiarowym kolejno od każdej pary elektrod, dla każdej projekcji wymuszania. Natomiast w metodzie równoległej, wyniki są pobierane jednocześnie wieloma kanałami pomiarowymi dla każdej projekcji wymuszania. Metoda pomiarowa posiada zdecydowany wpływ na transformacje błędów w wynikach pomiaru w błędy rekonstruowanego obrazu. Wpływ błędów instrumentalnych na dokładność rekonstrukcji obrazu przy wykorzystaniu szeregowej metody pomiarowej został zbadany w [3].

Celem badań jest analiza wpływu błędów instrumentalnych na dokładność rekonstrukcji obrazu przy wykorzystaniu równoległej metody pomiarowej.

### 2. Modele błędów instrumentalnych w równoległej metodzie pomiarowej

W pełnym cyklu pomiarowym (dla wszystkich projekcji pobudzenia) każdy wynik pomiaru otrzymuje się dwukrotnie: pierwszy raz przy pomiarze różnicy potencjałów  $j$ -ej pary elektrod przy pobudzeniu z  $i$ -ej pary elektrod, a drugi raz odwrotnie – przy

pomiarze różnicy potencjałów  $i$ -ej pary elektrod przy pobudzeniu z  $j$ -ej pary elektrod. Wynik końcowy jest obliczany jako wartość średnia uzyskanych wyników [1].

Ponieważ odstęp czasowy pomiędzy wynikami pomiaru w tym samym kanale toru pomiarowego jest zdecydowanie większy od interwału korelacji składowej szumowej, dlatego błędy losowe oddzielnych wyników nie są skorelowane. Przy wykorzystaniu równoległych torów pomiarowych, z jednakowym typem elementów tych torów, wariancję losowej składowej błędów pomiarowych można przyjąć stałą  $\sigma_{a,los}^2 = const$  dla wszystkich wyników pomiaru. Dlatego może być przedstawiona jako  $\mathbf{K}_{Ax,a,los} = (\sigma_{a,los}^2 / 2) \cdot \mathbf{I}$  (gdzie  $\mathbf{I}$  jest macierzą jednostkową diagonalną) [1] i składowa macierzy kowariancyjnej od wpływu oddziaływań losowych nieskorelowanych w (1) ma postać:

$$\mathbf{K}_{a,los} = (\sigma_{a,los}^2 / 2) \cdot \mathbf{REC} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{REC}^T. \quad (2)$$

Każdy tor pomiarowy charakteryzuje się jednak innym błędem systematycznym. W różnych projekcjach pobudzania, od tych samych par elektrod, w wynikach pomiaru pojawia się ten sam błąd addytywny systematyczny. Przy wykorzystaniu torów pomiarowych tego samego typu, rozkład prawdopodobieństwa oraz inne parametry (np. wartości graniczne, wariancja  $\sigma_{a,syst}^2$ ) też są jednakowe. Stąd składowa macierzy błędów rekonstrukcji spowodowana błędami addytywnymi systematycznymi w wynikach pomiaru może być przedstawiona w postaci:

$$\mathbf{K}_{a,syst} = \sigma_{a,syst}^2 \cdot \mathbf{REC} \cdot \mathbf{k}_u \cdot \mathbf{REC}^T, \quad (3)$$

gdzie:

$$\mathbf{k}_u(i, j) = \frac{1}{4} \left[ \delta(n1_i, n1_j) + \delta(n2_i, n2_j) + \delta(n1_i, n2_j) + \delta(n2_i, n1_j) \right], \quad (4)$$

gdzie:  $\delta(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$  – funkcja Kroneckera, której argu-

menty są wyrażane poprzez globalne numery  $(i, j)$  wyników pomiaru w algorytmie rekonstrukcyjnym oraz lokalne numery  $(n1, n2)$  zbioru wyników pomiaru ( $1/4$  uwzględnia uśrednianie dwóch wyników). Przykładowo, dla 6-elektrodowego systemu pomiarowego (9 niezależnych wyników pomiaru) ta macierz ma postać:

$$\mathbf{k}_u = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Względne multiplikatywne systematyczne błędy (wariancja  $\sigma_{m,syst}^2$ ) torów pomiarowych wpływają na wynik rekonstrukcji w podobny sposób. Ponieważ  $\Delta_{m,syst,i} = \delta_{m,syst} \cdot U_{x,i}$  składowa macierzy błędów rekonstrukcji może być przedstawiona w postaci:

$$\mathbf{K}_{m,syst} = \sigma_{m,syst}^2 \cdot \mathbf{REC} \cdot \mathbf{diag}(U_x) \cdot \mathbf{k}_u \cdot \mathbf{diag}(U_x) \cdot \mathbf{REC}^T, \quad (5)$$

gdzie:  $\mathbf{diag}(U_x)$  – macierz diagonalna, której elementy są równe odpowiednim wynikom pomiaru  $U_x$ .

W celu ilościowego porównywania wpływu wymienionych wyżej składowych błędów pomiaru na błędy rekonstrukcji wprowadzamy współczynnik przetwarzania jako pierwiastek stosunku wariancji błędów rekonstrukcji (diagonalny element macierzy kowariancyjnej  $\mathbf{K}_q(ne, ne)$ , gdzie:  $ne$  – jest numerem rekonstruowanego elementu) do wariancji  $D_q$  odpowiedniej  $q$ -ej składowej błędu instrumentalnego:

$$Kp_{q,ne} = \sqrt{\frac{\mathbf{K}_q(ne, ne)}{D_q}} \cdot \frac{U_n}{x_n} = \frac{U_n}{x_n} \sqrt{(\mathbf{REC} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{REC}^T)_{ne,ne}}, \quad (6)$$

gdzie  $\mathbf{V} = \mathbf{I}$  – dla oddziaływań losowych addytywnych;  $\mathbf{V} = \mathbf{k}_u$  – dla oddziaływań addytywnych systematycznych;  $U_n$  – unormowana wartość napięć mierzonych (na przykład zakres przetwarzania toru pomiarowego);  $x_n$  – unormowana wartość wielkości rekonstruowanej. Stąd współczynnik przetwarzania błędów systematycznych multiplikatywnych na podstawie zależności (5) opisany jest wzorem:

$$Kp_{m,syst,ne} = \frac{1}{x_{ne}} \sqrt{(\mathbf{REC} \cdot \mathbf{diag}(U_x) \cdot \mathbf{k}_u \cdot \mathbf{diag}(U_x) \cdot \mathbf{REC}^T)_{ne,ne}}. \quad (7)$$

### 3. Wyniki badań

Badania wpływu błędów aparatury pomiarowej zostały wykonane dla 24 elektrodowego obiektu badanego aproksymowanego 96 dyskretnymi elementami skończonymi o jednakowym kształcie i wymiarach.

W pracy badano błędy rekonstrukcji różnych modeli rozkładu przewodności obiektu, w których przewodność zmieniała się o 100% dla różnych elementów aproksymacyjnych. Porównano wyniki badania stopnia przetwarzania błędów instrumentalnych na błędy obrazu przewodności uzyskane według podanych wyżej wzorów (6) i (7) oraz równoległe metodą Monte Carlo (MC).

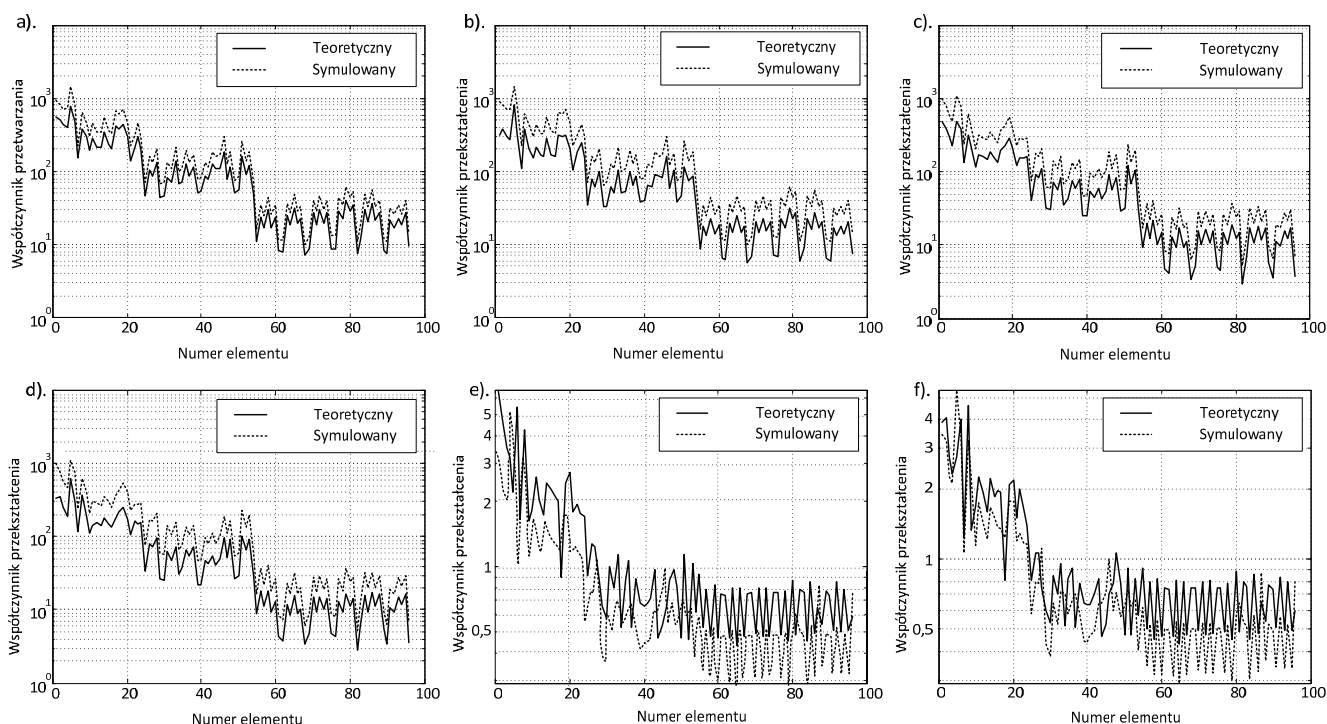
Wpływ wartości losowych addytywnych symulowano w każdym kanale nieskorelowanymi wartościami losowymi o rozkładzie normalnym z zerową wartością średnią i standardowym odchyleniu o wartości 0,01% wartości zakresu toru pomiarowego ( $\sigma_{a,los} = \pm U_n \cdot 10^{-4}$ ). Wartości wpływów systematycznych addytywnych symulowano w różnych kanałach wartościami o rozkładzie jednostajnym w granicach 0,01% zakresu toru pomiarowego ( $\Delta_{a,syst,gr} = \pm U_n \cdot 10^{-4}$ ,  $\Delta_{a,syst,gr} / \sqrt{3}$ ). Względne wartości błędów multiplikatywnych i systematycznych dla różnych torów przyjmowano jako wartości o rozkładzie jednostajnym o wartościach granicznej  $\pm 0,01\%$  ( $\delta_{a,m,syst,gr} = \pm 0,01\%$ ) wartości mierzonego napięcia.

Dla każdego modelu rozkładu przewodności w metodzie MC zrealizowano  $K = 10^4$  serii po 252 wyników pomiaru napięć międzyelektrodowych. Na podstawie tych wyników zrekonstruowano  $K = 96 \cdot 10^4$  wartości przewodności elementów oraz wyznaczono błędy rekonstrukcji (względem modeli rozkładu przewodności), oraz standardowe odchylenia  $\sigma_{g,ne}$  tych błędów dla każdego z  $ne = 1, \dots, 96$  elementów.

Wartości współczynnika przetwarzania błędów instrumentalnych w metodzie MC wyznaczono według wzorów:

- dla błędów losowych addytywnych:

$$Kp_{MC,a,los,ne} = \frac{\sigma_{g,ne}}{\sigma_{a,los}} \cdot \frac{U_n}{g_n}; \quad (8)$$



Rys. 1. Współczynniki przetwarzania addytywnych błędów losowych (a, b) i systematycznych (c, d) oraz multiplikatywnych błędów systematycznych (e, f) w błędy rekonstruowanego obrazu przewodności metodą bezpośrednią (a, c, e) i pośrednią (b, d, f); linie ciągłe – wartości teoretyczne, linie punktowe – wartości symulowane  
 Fig. 1. Process coefficients of additive random (a, b), regular (c, d) and multiplicative regular errors (e, f) in error reconstruction picture of direct method (a, c, e) and indirect (b, d, f); continuous line -value theoretical, dot line – value from the simulation

- dla błędów systematycznych addytywnych:

$$Kp_{MC,a,syst,ne} = \frac{\sigma_{g,ne}}{\Delta_{a,syst,gr}} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot U_n}{g_n}; \quad (9)$$

- dla błędów systematycznych multiplikatywnych:

$$Kp_{MC,m,syst,ne} = \frac{\sigma_{g,ne}}{\delta_{m,syst,gr}} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot U_n}{g_n \cdot U_x}; \quad (10)$$

gdzie:  $U_x$  - jest wartością średnią napięć mierzonych (jej wartość przyjmowana w przybliżeniu jako  $U_n/2$ ).

Na rys. 1 przedstawiono wyniki dotyczące przetwarzania błędów instrumentalnych przy rekonstruowaniu przewodności obiektu badanego, w którym 15 losowo wybranych elementów zmieniało swoją wartość o 100%. Do rekonstrukcji przewodności wykorzystano dwie metody: bezpośrednią i pośrednią – poprzez wstępną rekonstrukcję rezystywności [3]. Na każdym rysunku podano wyniki dotyczące obydwu metod wyznaczania współczynnika przetwarzania: teoretyczną (6), (7) oraz metodą MC (8), (9) i (10).

#### 4. Analiza wyników i podsumowanie

Porównując podane na rys. 1 wartości współczynników przetwarzania błędów instrumentalnych w błędy rekonstrukcji obrazu przewodności obliczonych na podstawie wzorów teoretycznych oraz uzyskanych metodą MC, można zauważyć dobrą ich zbieżność. To znaczy, że metoda obliczania oczekiwanych błędów rekonstrukcji obrazu na podstawie a priori zadanych parametrów błędów aparatury pomiarowej jest poprawna.

Błędy instrumentalne we większym stopniu negatywnie wpływają na dokładność rekonstrukcji przewodności elementów w obszarze wewnętrznym obiektu badanego (na rysunkach są to elementy z niższymi numerami). Związane jest to z tym, że prąd

pobudzający w mniejszym stopniu przenika w te obszary obiektu i dlatego informacja (w wynikach pomiaru) o przewodności staje się porównywalną z poziomem błędów instrumentalnych. Powoduje to pogorszenie wyników rekonstrukcji w tym obszarze.

Wpływ addytywnych systematycznych oraz losowych błędów jest istotnie większy (do około 100 razy) od wpływu błędów systematycznych multiplikatywnych.

Wyprowadzone wzory na obliczanie oczekiwanych błędów rekonstrukcji obrazu mogą być wykorzystane do sformułowania wymagań do dokładności aparatury pomiarowej na etapie projektowania systemu tomograficznego, zapewniającego zadany poziom dokładności rekonstrukcji obrazu przewodności.

#### 5. Literatura

- [1] Dorzhovets M.M.: Pomiar tomograficzny rozkładu przestrzennego wielkości fizycznych (Na przykładach elektrycznej i akustycznej tomografii). Monografia habilitacyjna. Lviv, 2001, 335 s. (Ukr.).
- [2] Dorzhovets M., Prygodsky A.: Pośrednia metoda rekonstrukcji przewodności w tomografii elektrycznej. Technika Pomiarowa i Metrologia (Wymiaralna Technika i Metrologia). №71, Lwów, 2010, str. 3-7. (Ukr.).
- [3] Dorzhovets M., Prygodsky A., Brydak K.: Analiza wpływu oddziaływań addytywnych i multiplikatywnych przy rekonstrukcji obrazu przewodności w tomografii elektrycznej, Podstawowe Problemy Metrologii, Prace Komisji Metrologii Oddziału PAN w Katowicach, Seria: Konferencje Nr 15, 2011, str. 92-96.
- [4] Primrose K., Qiu C.L Performance and Application Studies of an Electrical Resistance Tomography System. 1st World Congress on Industrial Process Tomography, Buxton, Greater Manchester, April 14-17, 1999. pp. 133-139.